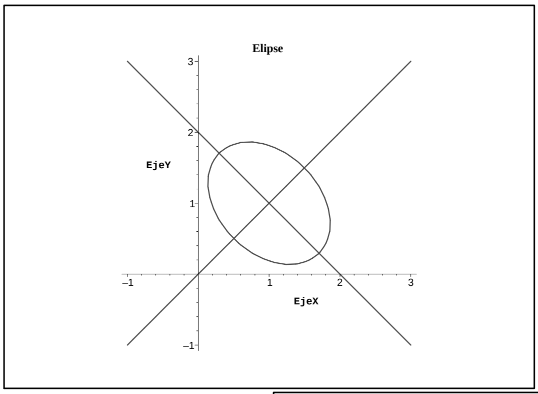
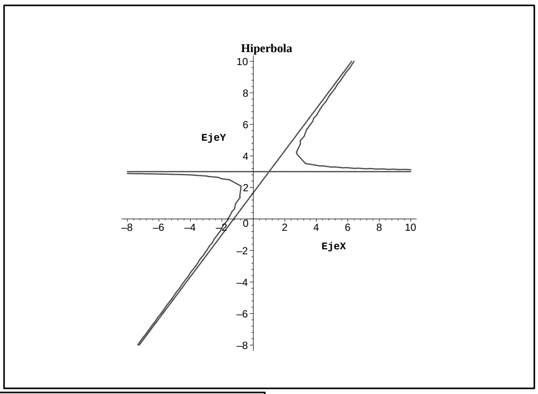
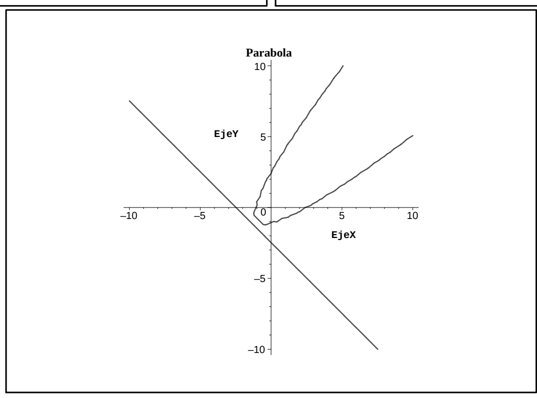
Prácticas de algebra lineal en la Ingeniería de Montes

por

Ana Luzón y Pilar Cristobal







Prefacio

El objetivo de estos apuntes es servir de guía para las prácticas para los estudiantes que cursan Algebra Lineal en la escuela de ingenieros de montes de la Universidad Politécnica de Madrid. Estos apuntes complementan a los apuntes de teoría de este mismo curso.

La primera práctica consiste en una introducción al paquete de cálculo simbólico y a la asignatura. La 2 y la 3 tratan de espacios vectoriales, la 4 y la 5 de aplicaciones lineales. En la práctica 6, resolvemos algún problema de programación lineal y comparamos métodos. En la 7 intentamos deducir las propiedades de los determinantes y en la 8 calculamos alguna forma canónica.

Utilizamos el Maple 8 como paquete de cálculo simbólico y numérico, ya que es el que tiene licencia de campus la Universidad Politécnica de Madrid.

Estos apuntes han tenido diversas fuentes: las primeras clases que recibimos las autoras, lo que fuimos aprendiendo de algunos de los compañeros del departamento, especialmente del profesor Manuel Alonso Morón, de nuestro propio trabajo de investigación, de la bibliografía que añadimos al final del libro incluyendo algunas páginas web.

Las autoras

Índice General

1 Introducción **1**

1.1 Introducción al Maple 1

1.2 Primer problema 12

1.3 Introducción al algebra lineal con Maple 14

2 Espacios vectoriales **19**

3 Espacios vectoriales II **25**

4 Aplicaciones lineales **29**

4.1 Solución a un problema de cambio de base 35

5 aplicaciones lineales **39**

6 programación lineal **41**

7 Determinantes **51**

8 Formas canónicas **53**

8.1 Algunos ejemplos 58

9 Espacios euclídeos **63**

10 Cónicas **67**

Bibliografía **81**

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción al Maple

```
> restart:
```

Observar la barra de herramientas: En **File** encontraremos las ordenes necesarias para abrir y guardar documentos (también representados con iconos más abajo).

Visita el **help** en la barra de herramientas, la Introducción y Matemáticas.

Observa los iconos de la derecha de hacer y deshacer: el sumatorio te pedira una fórmula, la T te permitira escribir un texto como este y [> te permite abrir una linea para trabar en Maple en en lugar que desees.

Definimos una función f, observar como se multiplica y eleva a un exponente

```
> f:=x^2+3*x+5;
```

$$f := x^2 + 3\,x + 5$$

Observar la diferencia entre poner ″:ªl final de un comando en lugar de poner ″;″

Pregunta 1: ¿Qué diferencia hay entre ″**:**″y ″**;**″en la sintáxis de Maple?

```
> f:=x^2+3*x+5:
```

Vamos a calcular cuanto vale la función f en el punto x=3

```
> subs(x=3,f);
```

$$23$$

Escribimos ahora otra función de la siguiente manera

```
> g=3*x+2;
```

$$g = 3\,x + 2$$

E intentamos calcular su valor en x=1

```
> subs(x=1,g);
```

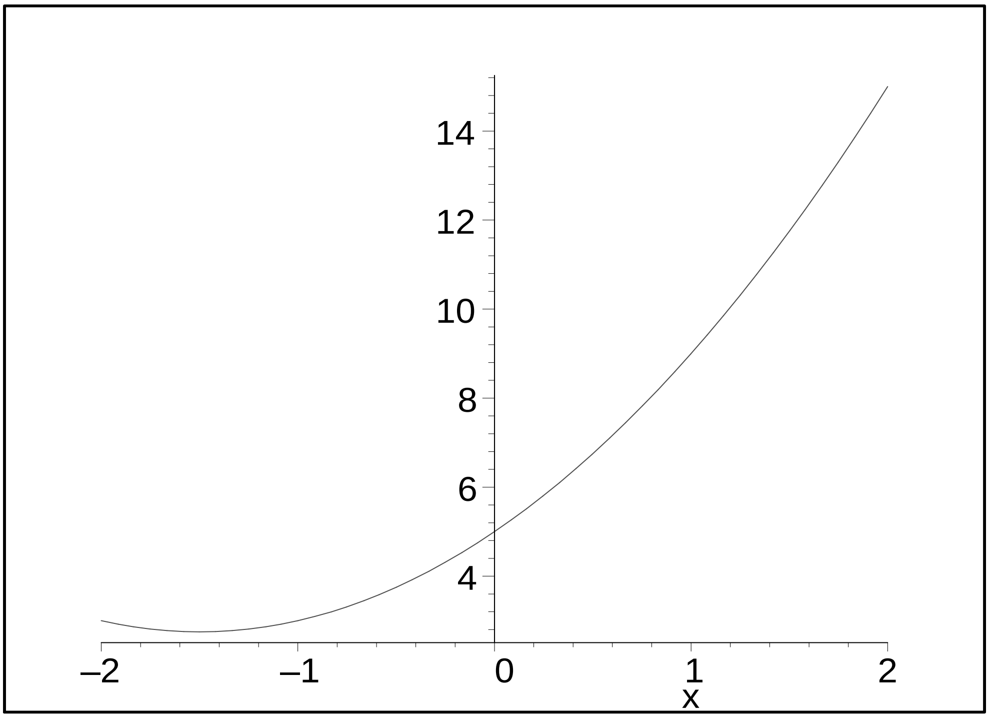
$$g$$

Observamos que no sale el valor 5 esperado

Pregunta 2: ¿Qué diferencia hay entre las definiciones de f y g? Define la función g y calcula su valor en 234.947693

```
También podemos pintar funciones
```

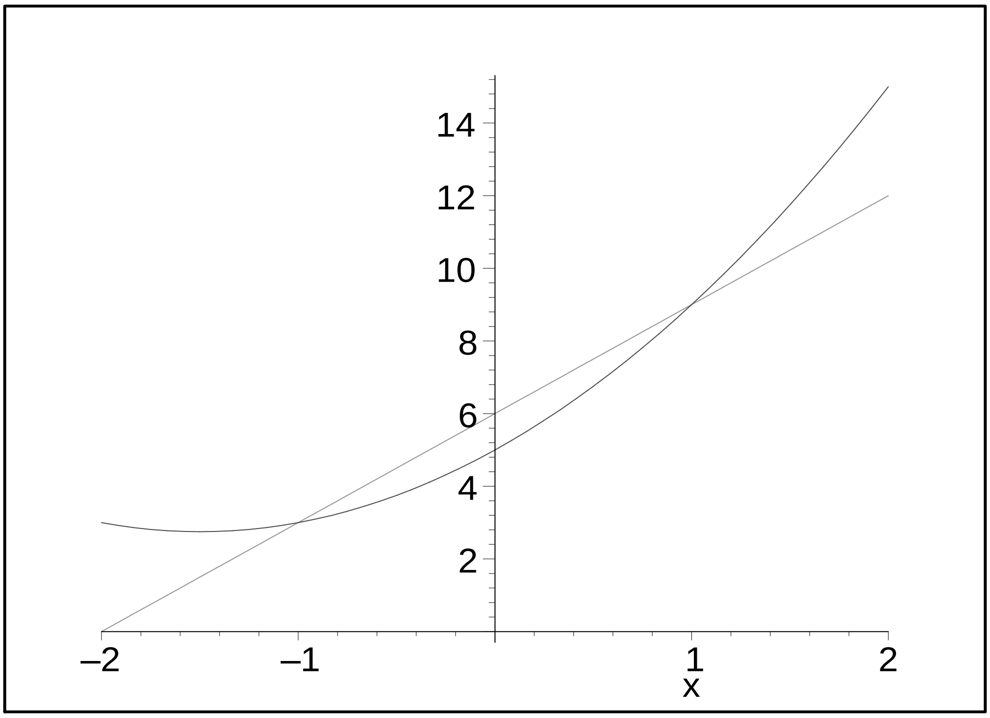
```
> plot(f,x=-2..2);
```



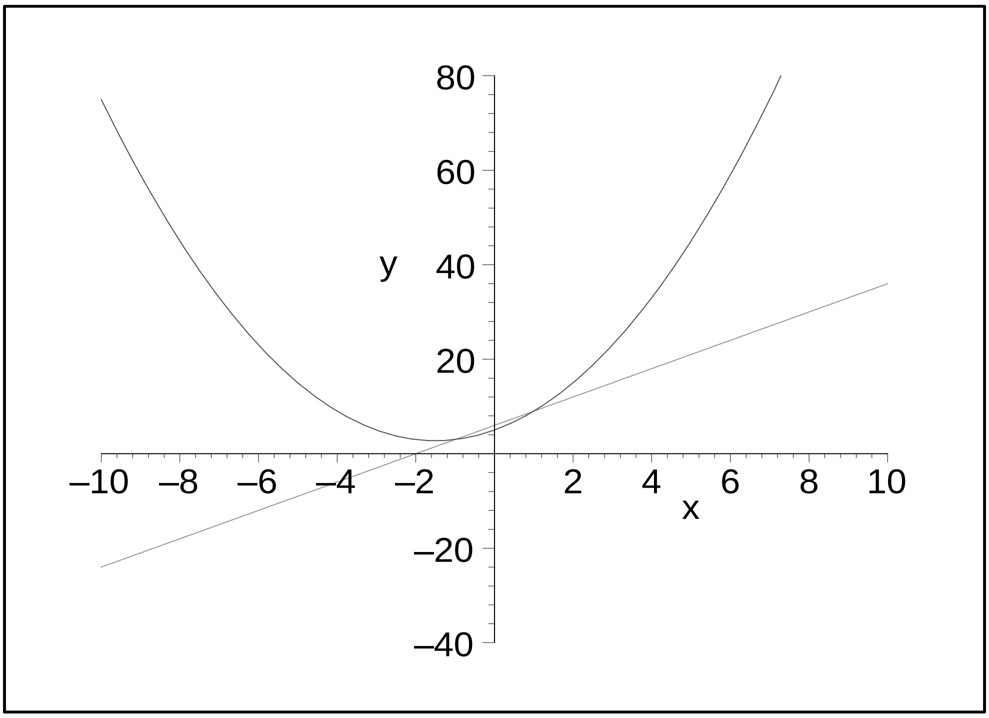
Tambien podemos pintar dos funciones a la vez

```
>  g:=3*x+6:
```

```
>  plot([f,g],x=-2..2);
```




```
>  plot([f,g],x=-10..10, y=-40..80);
```



Podemos derivar e integrar funciones:

```
> diff(f,x);
```

$$2\,x + 3$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + 5\,x$$

También calcular integrales definidas

```
> int(f,x=0..1);
```

$$\frac{41}{6}$$

Pregunta 3 ¿Qué otras opciones crees te pueden ser útiles a la hora de estudiar matemáticas? Da una lista de 3 y busca en el help como lo harias.

Ahora queremos concretar en **álgebra lineal** para ello abrimos la libreria **linalg**

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Definimos una matriz

```
> A:=matrix(4,4,[1,2,3,3,4,-2,3,-1,5,6,5,8,6,7,8,9]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular el determinante de la matriz A;

```
> det(A);
```

$$-61$$

Y su rango

```
> rank(A);
```

$$4$$

Pregunta 4: ¿Cómo se suman matrices? ¿Cómo se multiplican? ¿Cómo se multiplican por un número?

También podemos definir vectores

```
> b:=vector([1,2,3,4]);
```

$$b := [1, 2, 3, 4]$$

Y resolver el sistema AX=b

```
> linsolve(A,b);
```

$$\left[\frac{23}{61}, \frac{4}{61}, \frac{12}{61}, \frac{-2}{61}\right]$$

Pero también puede ocurrir que la solución **dependa de un par ámetro**

```
> A1:=matrix(3,3,[1,2,3,4,5,6,7,8,9]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> b1:=vector([1,2,3]);
```

$$b1 := [1, 2, 3]$$

```
> linsolve(A1,b1);
```

$$\left[-\frac{1}{3} + \_t_1,\ \frac{2}{3} - 2\,\_t_1,\ \_t_1\right]$$

También podemos resolver ecuaciones matriciales como AX=B

```
> B:=matrix(4,4,[1,2,-2,3,4,3,-6,-1,5,3,4,5,6,7,8,9]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -6 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{61} & \frac{84}{61} & \frac{-24}{61} \\ 0 & \frac{108}{61} & \frac{614}{61} & \frac{147}{61} \\ 0 & \frac{80}{61} & \frac{12}{61} & \frac{75}{61} \\ 0 & \frac{-115}{61} & \frac{-490}{61} & \frac{-104}{61} \end{bmatrix}$$

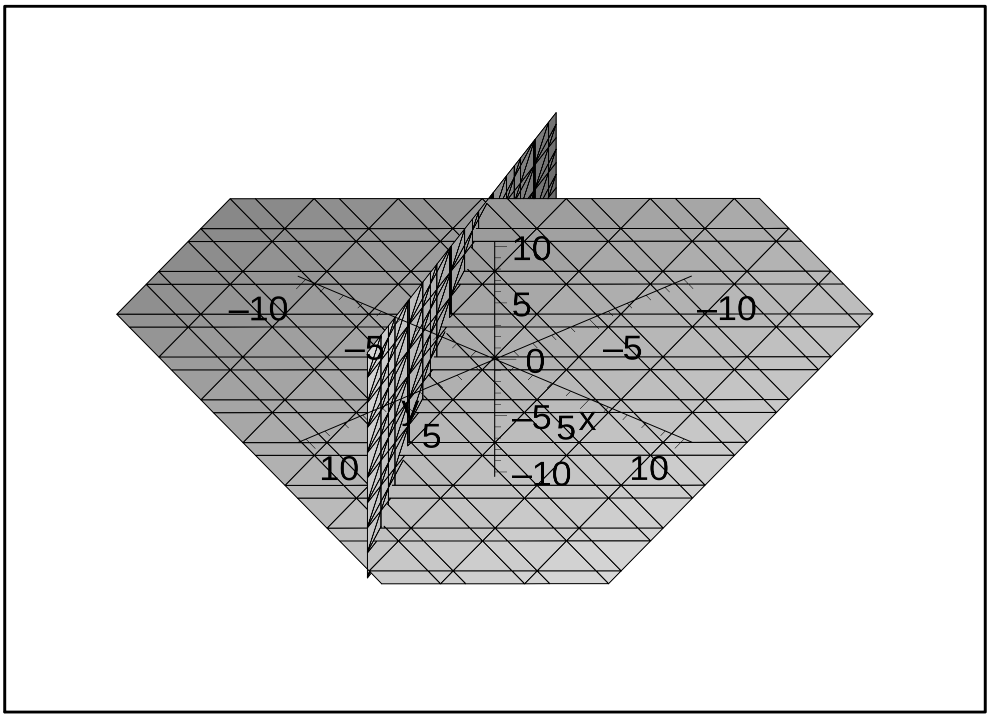
Si queremos hacer gráficas y tener todas las opciones posibles cargaremos la libreria **plots**

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Ahora pintaremos un par de planos

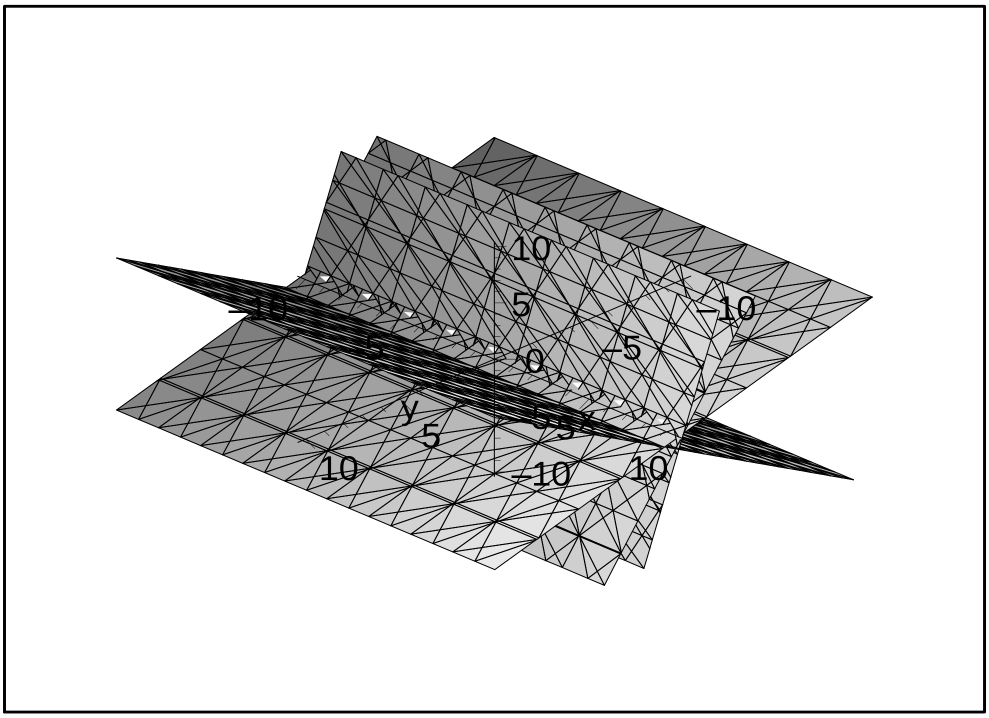
```
> implicitplot3d({x+y+z= 4,
> 2*x-4*y=7},x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,axes=normal);
```



problema 6

En primer lugar empezaremos pintando varios planos dando distintos valores de b

```
>  implicitplot3d({x-z=1,x+2*z=1,5*x+2*z=1,10*x+2*z=1
>  },x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,axes=normal);
```



Resolvemos algerbaicamente el sistema

```
> A2:=matrix(2,3,[1,0,-1,0,b,2]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 2 \end{bmatrix}$$

```
> b2:=vector([1,1]);
```

$$b2 := [1, 1]$$

```
> linsolve(A2,b2);
```

$$\left[-\frac{1}{2}\, b\,\_t_1 + \frac{3}{2},\ \_t_1,\ -\frac{1}{2}\, b\,\_t_1 + \frac{1}{2}\right]$$

Observar que esto no tinee sentido si b=0, de manera que ese caso debemos de estudiarlo a parte

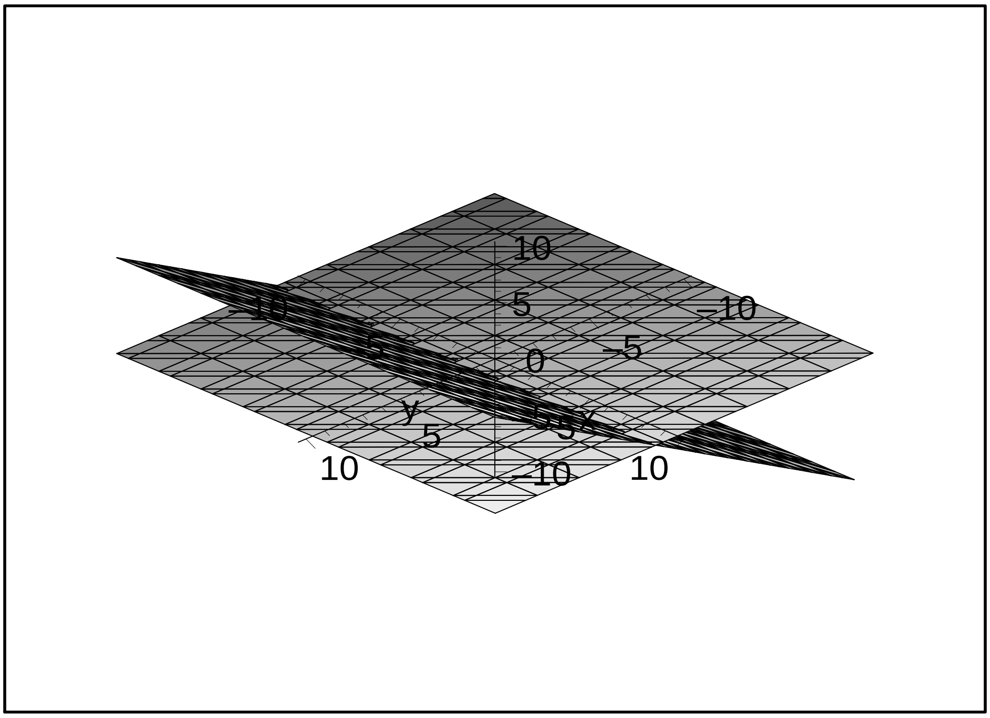
```
> A3:=matrix(2,3,[1,0,-1,0,0,2]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

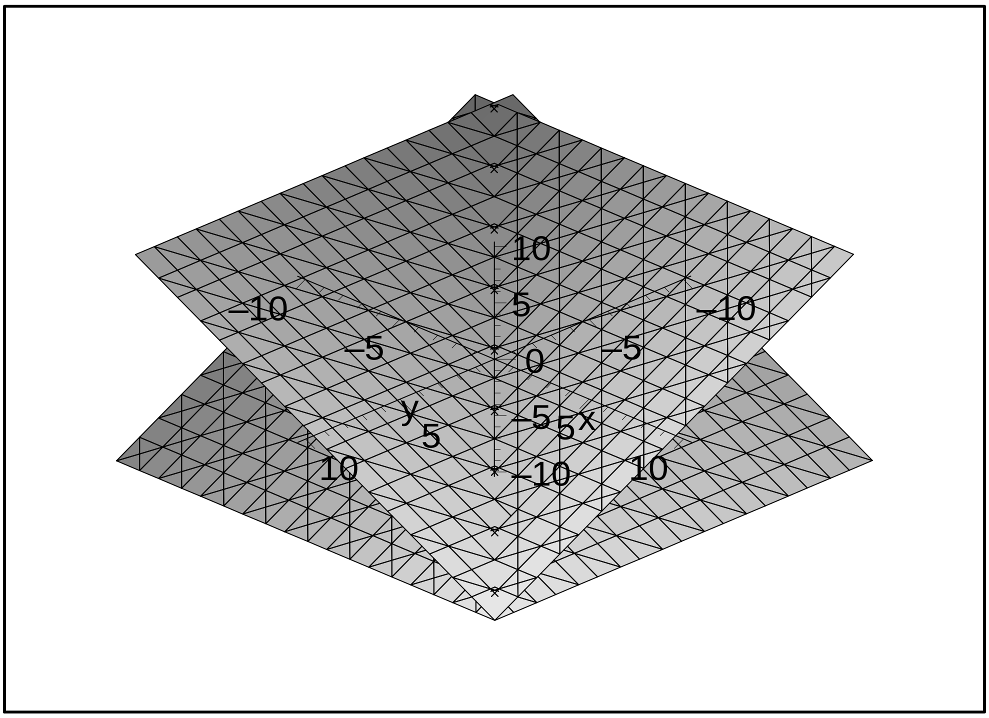
```
> linsolve(A3,b2);
```

$$\left[\frac{3}{2},\ \text{-}t_1,\ \frac{1}{2}\right]$$

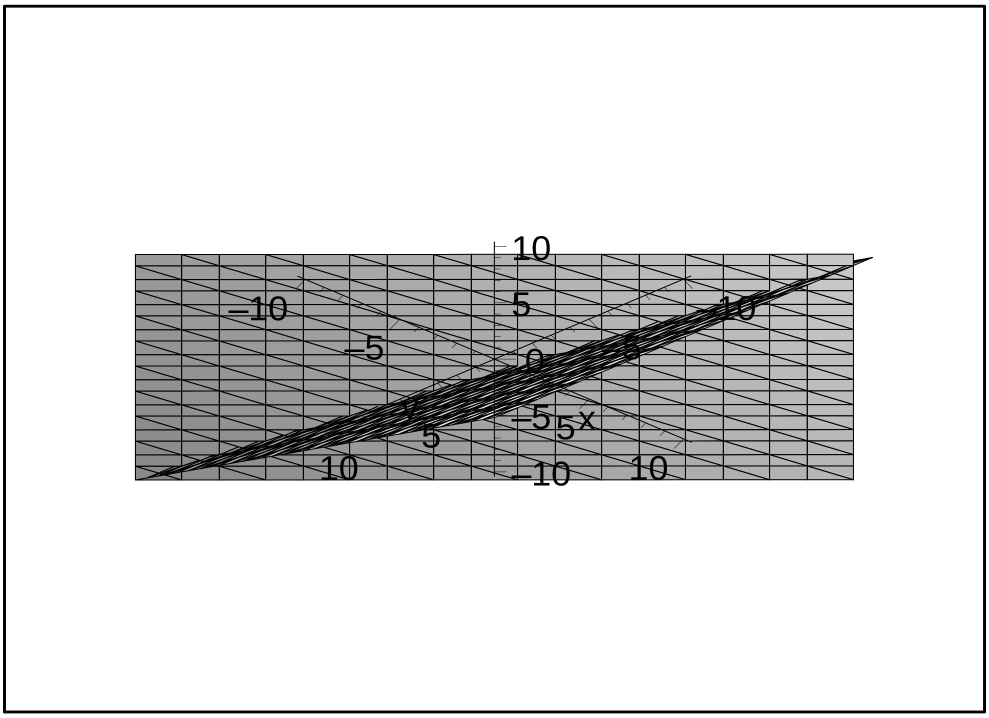
```
> implicitplot3d({x-z=1,2*z=1
> },x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,axes=normal);
```




```
> implicitplot3d({x+z=1,y+z=1
> },x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,axes=normal);
```




```
>  implicitplot3d({x+y=1,y-z=1
>  },x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,axes=normal);
```



1.2 Primer problema

Primera parte Contesta a las **preguntas 1, 2, 3** y **4** anteriores.

Segunda parte Esta parte de la práctica esta basada en el **problema 6** de las hojas de clase.

EXPERIMENTANDO

1º Pintar varios sistemas $\begin{cases} x - z = 1 \\ by + 2z = -1 \end{cases}$ con diferentes valores de b ¿Se cortan siempre los pares de planos?

2º Resuelve algebraicamente el sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ by + 2z = -1 \end{cases}$

OBSERVACIÓN: Estudia la solución dada por Maple para el valor $b = 0$ ¿Qué ocurre en este valor?

3º Pinta el sistema para el valor $b = 0$ y resuelvelo algebraicamente.

4º ¿Determina el sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ by + 2z = -1 \end{cases}$ una recta para cualquier valor de b? Demuestralo.

INVESTIGANDO

1º Pinta pares de planos en los que cada ecuación falte una variable distinta. Por ejemplo: $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y algunos más de tu cosecha.

2º ¿Observas alguna característica común en estos pares de planos?

3º ¿Podrías dar una hipótesis, lo más general posible, que explicara lo que esta ocurriendo?

4º ¿Podrías demostrar dicha hipótesis?

1.3 Introducción al algebra lineal con Maple

Objetivos: **1º** Conocer los comandos de Maple necesarios para las operaciones elementales y la resolución de sistemas lineales.

2º Relacionar las operaciones elementales con las matrices elementales.

```
> restart:
```

```
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm
```

```
Warning, new definition for trace
```

1ª parte

De la práctica 1 recordamos que para resolver un sistema lineal AX=b, basta que pongamos en A la matriz de los coeficientes, formamos el vector b de los términos independientes. Y el comando **linsolve(A,b);** del paquete **linalg** nos da la solución X.

Observar cómo da la solución Maple cuando el sistema es incompatible.

```
> A:=matrix(2,2,[1,2,2,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> b:=vector([1,0]);
```

$$b := [1,\ 0]$$

```
> X:=linsolve(A,b);
```

$$X :=$$

Problema 1.- Estudiar en el **help** de Maple el uso de los siguientes comandos: **concat**, **augment**, **addrow, mulrow, transpose, linsolve** (que ya lo conociamos), **gausselim, gaussjord, backsustitution, forwardsustitution.** Pon un ejemplo con cada uno de estos comandos explicando su uso.

```
> AA:=concat(A,b);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> AAA:=augment(A,b);
```

$$AAA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> M:=matrix([[-50, -55, -37, -35, 97], [50, 79, 56, 49, 63],
[57, -59,
> 45, -8, -93], [92, 43, -62, 77, 66]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} -50 & -55 & -37 & -35 & 97 \\ 50 & 79 & 56 & 49 & 63 \\ 57 & -59 & 45 & -8 & -93 \\ 92 & 43 & -62 & 77 & 66 \end{bmatrix}$$

```
> M1:=addrow(M,1,2);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} -50 & -55 & -37 & -35 & 97 \\ 0 & 24 & 19 & 14 & 160 \\ 57 & -59 & 45 & -8 & -93 \\ 92 & 43 & -62 & 77 & 66 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=mulrow(M1,1,-1/50);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{10} & \frac{37}{50} & \frac{7}{10} & \frac{-97}{50} \\ 0 & 24 & 19 & 14 & 160 \\ 57 & -59 & 45 & -8 & -93 \\ 92 & 43 & -62 & 77 & 66 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(M);
```

$$\begin{bmatrix} -50 & -55 & -37 & -35 & 97 \\ 0 & 24 & 19 & 14 & 160 \\ 0 & 0 & \frac{-16801}{200} & \frac{931}{20} & \frac{15812}{25} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1311197}{16801} & \frac{158823925}{100806} \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(M);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-78454729}{7867182} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-62981263}{7867182} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{14388539}{3933591} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{158823925}{7867182} \end{bmatrix}$$

Problema 2.- Resuleve con los comandos anteriores los problemas (de las hojas de clase) de las dos maneras

2ª Parte:

Experimentando:

Ahora vamos a relacionar las operaciones elementales con el producto de matrices elementales.

En una primera aproximación nos vamos a fijar en operaciones por filas y producto de matrices elementales por la izquierda

Definimos la matriz C

```
> C:=matrix(3,3,[1,2,6,2,1,-1,-1,2,0]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para hacer un 0 en el lugar 2,1 multiplicamos por -2 la fila 1 y se la sumamos a la fila 2

```
> C1:=addrow(C,1,2,-2);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -13 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora observo que si multiplico la matriz C, por la izquierda por la matriz siguiente obtengo el mismo resultado

```
> E1:=matrix(3,3,[1,0,0,-2,1,0,0,0,1]);
```

$$E1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(E1,C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -13 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ahora quisiera hacer un 0 en el lugar 3,1 me bastaría con poner en la fila 3 el resultado de sumar las filas 1 y 3, es decir

```
> C2:=addrow(C1,1,3);
```

$$C2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

O tambien multiplicando C1 por la matriz elemental siguiente

```
> E2:=matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,1,0,1]);
```

$$E2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(E2,C1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Problema 3.- Con estas ideas trata de terminar de triangularizar esta matriz.

INVESTIGANDO:

Problema 4.- Describe matricialmente porque matriz estas multiplicando por la izquierda cuando en una matriz nxn sustituyes la fila k-esima por la k-esima+a*j-esima.

Experimentando:

Problema 5.- Multiplica la matriz C por la traspuesta de la matriz E1 por la derecha, es decir, efectúa C*E1ˆt, y lo mismo con E2. Observa las columnas de cada uno de los productos

INVESTIGANDO:

Problema 6.- Describe, en términos de operaciones elementales, que ha ocurrido en el problema 5.

Problema 7.- Describe, en términos de operaciones elementales, que ocurre si multiplicas por la derecha por la traspuesta de la matriz obtenida en el problema 4.

Capítulo 2

Espacios vectoriales

Algebra Lineal

1º C Práctica 3

ESPACIOS VECTORIALES

Objetivos: 1º Conocer los comandos de Maple relacionados con los espacios vectoriales.

2º Encontrar una expresión que me relacione dos subespacios vectoriales con su suma y su interseccion.

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace
```

```
> with(plots):
```

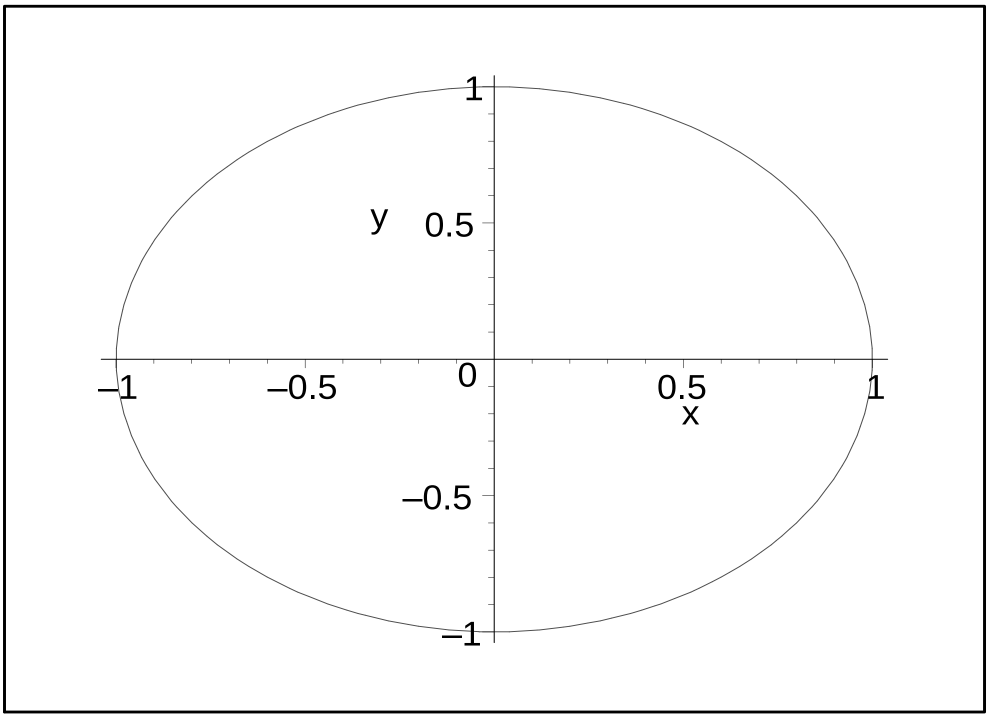
Problema 1: Estudiar en el **help** de Maple, poner un ejemplo y describir lo que hacen los siguientes comandos de Maple: **addcol, mulcol, swapcol, delcol, colspan y colspace.** También, el comando **solve,** ya que aunque no es un comando orientado a espacios vectoriales nos puede ser útil a la hora de resolver sistemas de ecuaciones sean o no lineales. En esta práctica utilizaremos estos comandos y los estudiados en las prácticas anteriores.

Ejemplo 1:

Veamos ahora si el siguiente conjunto de R^2 es un espacio vectorial (**Problema 68**).

e) {(x,y) de R^2 tales que: x^2+y^2=1}

```
>  implicitplot(x^2 + y^2 = 1,x=-1..1,y=-1..1);
```



Observamos que el elemento neutro de R^2, (0,0) no pertenece a este conjunto luego seguro que no va a ser espacio vectorial

Otra manera de poder resolver esto mismo podría ser: damos dos puntos del subconjunto anterior, por ejemplo los puntos intersección entre el subconjunto y el eje x, los calculamos

```
>  solve({x^2 + y^2 = 1,y=0},{x,y});
```

$$\{y = 0,\, x = 1\},\ \{x = -1,\, y = 0\}$$

Si sumaramos ambos puntos y tuvieramos un espacio vectorial la suma tendria que ser un elemento del conjunto, definimos los puntos

```
> P1:=vector([1,0]);
```

$$P1 := [1, 0]$$

```
> P2:=vector([-1,0]);
```

$$P2 := [-1, 0]$$

Calculamos su suma

```
> evalm(P1+P2);
```

$$[0, 0]$$

Y la suma, el elmento neutro del espacio R^2, no pertenece al conjunto, luego este subconjunto no es espacio vectorial.

Problema 2: Resolver el resto de los apartados del **problema 98**.

Observando e Investigando

Ejemplo 2:

Vamos a resolver el **problema 48**

```
> u1:=vector([1,2,-1,3,4]):
```

```
> u2:=vector([2,4,-2,6,8]):
```

```
> u3:=vector([1,3,2,2,6]):
```

```
> u4:=vector([1,4,5,1,8]):
```

```
> u5:=vector([2,7,3,3,9]):
```

Recordando que una **base** de un subespacio es un **sistema generador** del subespacio **linealmente independiente** y que la **dimensión** de un espacio es el número de elementos que tiene cualquiera de sus bases, voy estudiando cómo van siendo cada uno de los subespacios generados por estos vectores

```
> A2:=concat(u1,u2);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Calculo un sistema generador del subespacio generado por estos dos vectores

```
>   colspace(A2);
```

$$\{[1, 2, -1, 3, 4]\}$$

Pregunta 3: ¿Por qué me da solo el vector u1?

Considero ahora el subespacio generado por u1, u2 y u3

```
>   A3:=concat(u1,u2,u3);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

```
>   colspace(A3);
```

$$\{[0, 1, 3, -1, 2], [1, 0, -7, 5, 0]\}$$

Comparar este resultado con el subespacio generado por u1 y u3

```
>   A3b:=concat(u1,u3);
```

$$A3b := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

```
>   colspace(A3b);
```

$$\{[0, 1, 3, -1, 2], [1, 0, -7, 5, 0]\}$$

Pregunta 4: ¿Por qué nos queda el mismo conjunto?

Observar la relación que hay entre los vectores que nos da Maple y los vectores u1 y u3.

```
> A31:=addcol(A3,1,2,-1);
```

$$A31 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A32:=addcol(A31,2,1,-2);
```

$$A32 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -7 & 3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pregunta 5: ¿qué ventaja crees que tienen los vectores que contesta Maple con los que nosotros hemos dado?

Terminamos de buscar el subconjunto generador

```
> A4:=concat(u1,u3,u4);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> colspace(A4);
```

$$\{[0, 1, 3, -1, 2], [1, 0, -7, 5, 0]\}$$

De nuevo podemos olvidarnos de u4 ya que no nos esta generando nada nuevo

```
> A5:=concat(u1,u3,u5);
```

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

```
>  colspace(A5);
```

$$\{\left[1,\ 0,\ 0,\ 5,\ \frac{35}{4}\right],\ \left[0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \frac{-7}{4}\right],\ \left[0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{5}{4}\right]\}$$

De manera que estos vectores me generan el subespacio W y ademas podemos asegurar que son linealmente independientes.

Pregunta 6: ¿Por qué?. Da dos bases de W.

Problema 7: Resuelve los problemas **49, 58, 63 y 72** de las hojas. ¿Encuentras alguna relación entre las dimensiones de los subespacios, su suma y su intersección?

Capítulo 3

Espacios vectoriales II

Objetivos: 1º Conocer los comandos de Maple relacionados con los espacios vectoriales.

2º Utilizar de los cambios de base.

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Problema 1: Estudiar en el **help** de Maple, poner un ejemplo y describir lo que hacen los siguientes comandos de Maple: **basis, sumbasis, intbasis.** Con estos comandos solucionar ahora el **prolema 7 de la práctica anterior**.

Ejemplo 1: Consideramos ahora el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 4. Por un lado consideraremos la base canónica de dicho espacio, es decir B1={1,x,x^2,x^3,x^4}, por otra parte consideraremos la base B2={1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3,(x-1)^4}. Consideramos el polinomio **p(x)=5-3x+2x^2-x^3+7x^4.**

Definimos las coordenadas de p en la base B1

```
> coorpB1:=vector([5,-3,2,-1,7]):
```

Hallamos ahora las coordenadas del polinomio p en la base B2, p(x)=a0*1+a1*(x-1)+a2*(x-1)^2+a3*(x-1)^3+a4*(x-1) ^4, de manera que las coordenadas de p(x) en B2 serán (a0,a1,a2,a3,a4).

Primero igualamos polinomios

```
> p(x):=collect(a0*1+a1*(x-1)+a2*(x-1)^2+a3*(x-1)^3+a4*(x-1)^4,x);
```

$$\mathrm{p}(x) := a4\,x^4 + (a3 - 4\,a4)\,x^3 + (a2 - 3\,a3 + 6\,a4)\,x^2 + (-2\,a2 + 3\,a3 + a1 - 4\,a4)\,x + a0 - a1 - a3 + a2 + a4$$

Debido a la unicidad de las coordenadas los coeficientes que acompañan a terminos del mismo grado han de ser iguales. De manera que al igualar polinomios obetenemos el siguiente sistema:

a0-a1+a2-a3+a4=5

a1-2a2+3a3-4a4=-3

a2-3a3+6a4=2

a3-4a4=-1

a4=7

Resolvemos este sistema para hallarlas coordenadas, para ello definimos la matriz de los coeficientes de las incognitas

```
> A:=matrix(5,5,[1,-1,1,-1,1,0,1,-2,3,-4,0,0,1,-3,6,0,0,0,1,-
4,0,0,0,0,
> 1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema y obtendremos las coordenadas de p en B2

```
> coorpB2:=linsolve(A,coorpB1);
```

$$coorpB2 := [10, 26, 41, 27, 7]$$

Podemos observar que la matriz A corresponde al cambio de base de B2 a B1 ya que

```
> multiply(A,coorpB2);
```

$$[5,\ -3,\ 2,\ -1,\ 7]$$

Si quisieramos realizar el cambio de base inverso bastaría con invertir la matriz A

```
> Mb1b2:=inverse(A);
```

$$Mb1b2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que coorpb2=Mb1b2*coorpb1

```
> multiply(Mb1b2,coorpB1);
```

$$[10,\ 26,\ 41,\ 27,\ 7]$$

Problema 2: Investigando. Si observais las columnas de la matriz Mb1b2 comprobar que la parte distinta de cero coincide con el Triángulo de Pascal. Sabiendo esto podrías predecir cuál sería la matriz de cambio de base en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n de la base canónica de dicho espacio a la base {1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3,...,(x-1)^n}.

Demuestra dicha predicción.

Problema 3: Resuelve el problema **53** de las hojas de clase.

Capítulo 4

Aplicaciones lineales

Algebra Lineal 1º C

Práctica 5 APLICACIONES LINEALES

Objetivos: 1º Calculo de la **Matriz asociada a una aplicación lineal** en un par de bases dadas

2º Relación entre la Matriz asociada a una aplicación en un par de bases y la matriz asociada de esa misma aplicación en otro par de bases distintas.

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

Ejemplo 1: Sea T la aplicación definida por:

T(1,1,1)=(3,5),T(1,1,2)=(1,2),T(1,0,-1)=(4,1)

Comprobamos que esta bien definida

```
> v1:=vector([1,1,1]):
> v2:=vector([1,1,2]):
> v3:=vector([1,0,-1]):
> B1:=basis({v1,v2,v3});
```

$$B1 := \{v1,\ v2,\ v3\}$$

De manera que tenemos bien definida T sobre R^3, ya que los tres vectores de los que nos da imagenes forman una base del espacio origen, R^3.

Damos ahora su matriz asociada de la base B1 en la base canónica de R^2, Bc2={(1,0),(0,1)}

```
> w1:=vector([3,5]):
> w2:=vector([1,2]):
> w3:=vector([4,1]):
> MB1Bc2T:=concat(w1,w2,w3);
```

$$MB1Bc2T := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si en lugar de en la base canónica de R^2 lo hubieramos querido escribir en la base B2={(2,1),(-1,2)}

Comprobamos que es base

```
> u1:=vector([2,1]):
> u2:=vector([-1,2]):
> basis({u1,u2});
```

$$\{u1,\ u2\}$$

tendremos que calcular las coordenadas de los vectores de la imagen en esta base B2, para ello calculamos el cambio de base en general, es decir, dado un vector generico de R^2, (x,y), calculamos sus coordenadas en esta base B2, para ello bastara resolver el sistema: (x,y)= a(2,1)+b(-1,2) donde (a,b) serán las coordenadas de (x,y) en la base B2. Para ello resolvemos el sistema poniendo en el lugar del vector (x,y) auqel del que qeuramos calcular sus coordenadas.

```
> A:=concat(u1,u2);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> coorw1B2:=linsolve(A,w1);
```

$$coorw1B2 := \left[\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right]$$

```
> coorw2B2:=linsolve(A,w2);
```

$$coorw2B2 := \left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$$

```
> coorw3B2:=linsolve(A,w3);
```

$$coorw3B2 := \left[\frac{9}{5}, \frac{-2}{5}\right]$$

De manera que si ahora queremos calcular la matriz asociada de la palicación T de la base en el origen B1 y la base en la imagen B2 tendremos la matriz:

```
> MB1B2T:=concat(coorw1B2,coorw2B2,coorw3B2);
```

$$MB1B2T := \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

```
\textbf{Experimentando e Investigando}
```

Nuestro objetivo ahora va a consistir en buscar que relación hay entre las dos matrices de la aplicación T pero en bases distintas. Para ello necesitaremos los cambios de base entre las distintas bases.

Empezamos dando el cambio de base de B2 a Bc2, el "fácil", no es más que poner por columnas los vectores de la base B2 ya que la aplicación es la Identidad y la base de llegada la canónica. Coincidiendo con lo que habiamos aprendido en la práctica anterior.

```
> CB2Bc2:=concat(u1,u2);
```

$$CB2Bc2 := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Y el cambio inverso no será más que invertir esta matriz

```
> CBc2B2:=inverse(CB2Bc2);
```

$$CBc2B2 := \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Observar el siguiente producto

```
> multiply(CBc2B2,MB1Bc2T);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

Problema 1: ¿Quién es esta matriz?

Vamos a calcular la matriz asociada a la aplicación T pero ahora de la base canónica de R^3, Bc3={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} a la base canónica de R^2. Necesitamos por tanto, saber cuanto valen las imagenes de estos vectores. Para ello observamos que

```
> A:=concat(v1,v2,v3);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> e1:=vector([1,0,0]):
> e2:=vector([0,1,0]):
> e3:=vector([0,0,1]):
> coorde1B1:=linsolve(A,e1);
```

$$coorde1B1 := [-1, 1, 1]$$

```
> coorde2B1:=linsolve(A,e2);
```

$$coorde2B1 := [3, -2, -1]$$

```
> coorde3B1:=linsolve(A,e3);
```

$$coorde3B1 := [-1, 1, 0]$$

Como T es lineal y acabamos de ver que, por ejemplo, e1=-v1+v2+v3, tendremos que

T(e1)=T(-v1+v2+v3)=-T(v1)+T(v2)+T(v3)=-w1+w2+w3

```
> Te1:=evalm(-w1+w2+w3);
```

$$Te1 := [2, -2]$$

siguiendo este mismo razonanmiento calculamos el resto de imagenes

```
> Te2:=evalm(3*w1-2*w2-w3);
```

$$Te2 := [3,\ 10]$$

```
> Te3:=evalm(-w1+w2);
```

$$Te3 := [-2,\ -3]$$

Calculamos ahora la matriz asociada a T de la base canónica de R^3 en la base canónica de R^2

```
> MBc3Bc2T:=concat(Te1,Te2,Te3);
```

$$MBc3Bc2T := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora los cambios de base de B1 a Bc3, el "facil"

```
> CB1Bc3:=concat(v1,v2,v3);
```

$$CB1Bc3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Y el inverso, de Bc3 a B1

```
> CBc3B1:=inverse(CB1Bc3);
```

$$CBc3B1 := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observar el producto siguiente

```
> multiply(MB1Bc2T,CBc3B1);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 2: ¿Quién es esta matriz?

Problema 3: Sea T:R^2——>R^2 lineal, definida de la siguiente forma: T(x,y)=(2x+3y,-5x+2y) y considerando la base canónica de R^2, Bc={(1,0),(0,1)} y la base B={(1,1),(1,2)}. Calcular: MBcT, MBBcT, MBcBT, MBT. Calcular también los cambios de base de B en Bc y el inverso, de Bc en B.

Problema 4: Encontrar todas las relaciones posibles entre las distintas matrices asociadas a la aplicación T y con los cambios de base calculados anteriormente.

4.1 Solución a un problema de cambio de base

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Problema 3: Sea T:R^2—–>R^2 lineal, definida de la siguiente forma: T(x,y)=(2x+3y,-5x+2y) y considerando la base canónica de R^2, Bc={(1,0),(0,1)} y la base B={(1,1),(1,2)}. Calcular: MBcT, MBBcT, MBcBT, MBT. Calcular también los cambios de base de B en Bc y el inverso, de Bc en B.

Damos la base canónica

```
> e1:=vector([1,0]):
> e2:=vector([0,1]):
```

Calculamos su imagenes mediante la aplicación T

```
> Te1:=subs([x=1,y=0],[2*x+3*y,-5*x+2*y]);
```

$$Te1 := [2, -5]$$

```
> Te2:=subs([x=0,y=1],[2*x+3*y,-5*x+2*y]);
```

$$Te2 := [3, 2]$$

Escribimos la matriz asociada a la aplicación T de la base canónica en la base canónica

```
> MBcT:=concat(Te1,Te2);
```

$$MBcT := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Damos otra base B de R^2

```
> f1:=vector([1,1]):
> f2:=vector([1,2]):
```

Comprobamos que es base

```
> basis({f1,f2});
```

$$\{f1, f2\}$$

Calculamos las imagenes de los vectores de la base B mediante la aplicaicón T

```
> Tf1:=subs([x=1,y=1],[2*x+3*y,-5*x+2*y]);
```

$$Tf1 := [5, -3]$$

```
> Tf2:=subs([x=1,y=2],[2*x+3*y,-5*x+2*y]);
```

$$Tf2 := [8, -1]$$

Calculamos la matriz asociada a la aplicación T de la bse B en la base canónica

```
> MBBcT:=concat(Tf1,Tf2);
```

$$MBBcT := \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz asociada de la aplicación T de la base canónica en la base B, para ello calculamos las coordenadas de las imagenes de la base canónica en la base B.

```
> A:=matrix(2,2,[1,1,1,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Te1B:=linsolve(A,Te1);
```

$$Te1B := [9, -7]$$

```
> Te2B:=linsolve(A,Te2);
```

$$Te2B := [4, -1]$$

```
> MBcBT:=concat(Te1B,Te2B);
```

$$MBcBT := \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz asociada a la aplicación T de la base B en la base B, para ello tengo que calcular las coordenadas de Tf1 y Tf2 en la base B

```
> Tf1B:=linsolve(A,Tf1);
```

$$Tf1B := [13, -8]$$

```
> Tf2B:=linsolve(A,Tf2);
```

$$Tf2B := [17, -9]$$

```
> MBT:=concat(Tf1B,Tf2B);
```

$$MBT := \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Damos ahora los cambios de base pedidos, el cambio de base de la base B a la base canónica es:

```
>  CBBc:=concat(f1,f2);
```

$$CBBc := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Y el cambio de base de la base canónica en la base B es:

```
>  CBcB:=inverse(CBBc);
```

$$CBcB := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 4: Encontrar todas las relaciones posibles entre las distintas matrices asociadas a la aplicación T y con los cambios de base calculados anteriormente.

```
>  multiply(CBcB,MBcT,CBBc);
```

$$\begin{bmatrix} 13 & 17 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Observamos que MBT=CBcB MBcT CBBc, de manera que reciprocamente

```
>  multiply(CBBc,MBT,CBcB);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>  multiply(CBBc,MBT);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

o bien mediante MBBcT = MBcT CBBc

```
>  multiply(MBcT,CBBc);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Al igual que MBcBT por MBcBT = MBT CBcB

```
> multiply(MBT,CBcB);
```

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

O MBcBT = CBcB MBcT

```
> multiply(CBcB,MBcT);
```

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 5

aplicaciones lineales

Objetivos: 1º Cálculo del núcleo y de la imagen de una aplicación lineal

2º Construcción de aplicaciones lineales

OBSERVANDO E INVESTIGANDO:

Ejercicio 1: Resuelve el problema **87** de las hojas de clase primero por operaciones elementales y luego utilizando los comandos de Maple adecuados. Compara las soluciones por ambos métodos. ¿Son iguales? Si son diferentes, ¿en qué difieren?

Ejercicio 2: Resuelve el problema **98** con los casos del problema **77.**

Capítulo 6

programación lineal

```
> restart:
```

```
> solve({1/2*x+1/3*y=130},{y});
```

$$\{y = -\frac{3\,x}{2} + 390\}$$

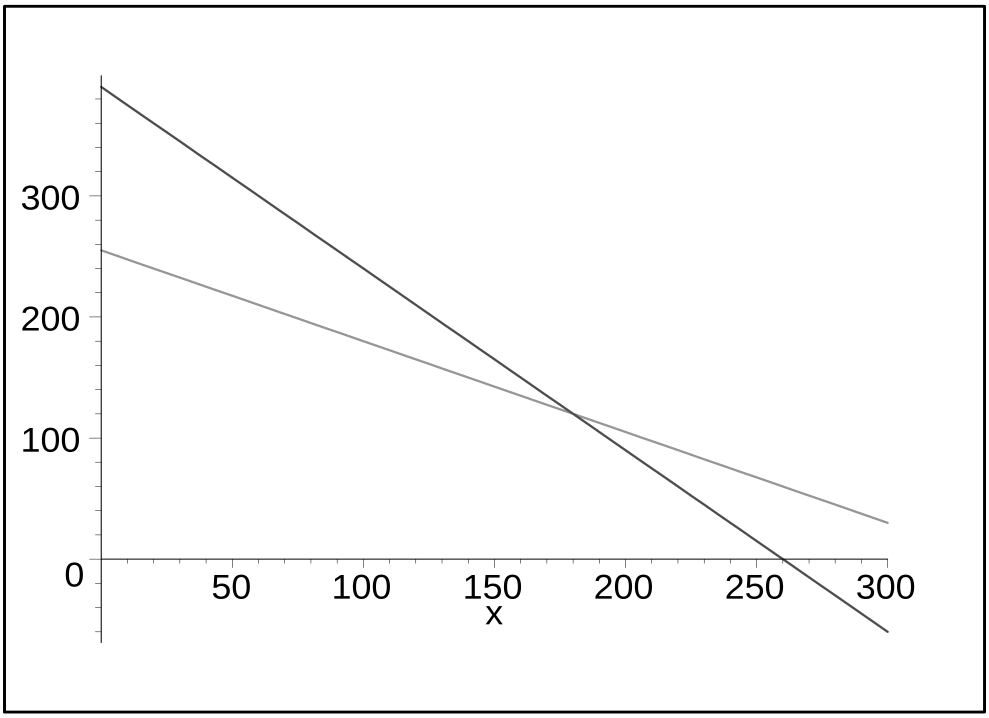
```
> r1:=-3/2*x+390:
```

```
> solve({1/2*x+2/3*y=170},{y});
```

$$\{y = -\frac{3\,x}{4} + 255\}$$

```
> r2:=-3/4*x+255:
```

```
> plot([r1,r2],x=0..300,thickness=3);
```



Calculamos los vértices de la región factible

```
>  solve({1/2*x+1/3*y=130,1/2*x+2/3*y=170},{x,y});
```

$$\{x = 180,\ y = 120\}$$

```
>  solve({1/2*x+1/3*y=130,y=0},{x,y});
```

$$\{y = 0,\ x = 260\}$$

```
>  solve({x=0,1/2*x+2/3*y=170},{x,y});
```

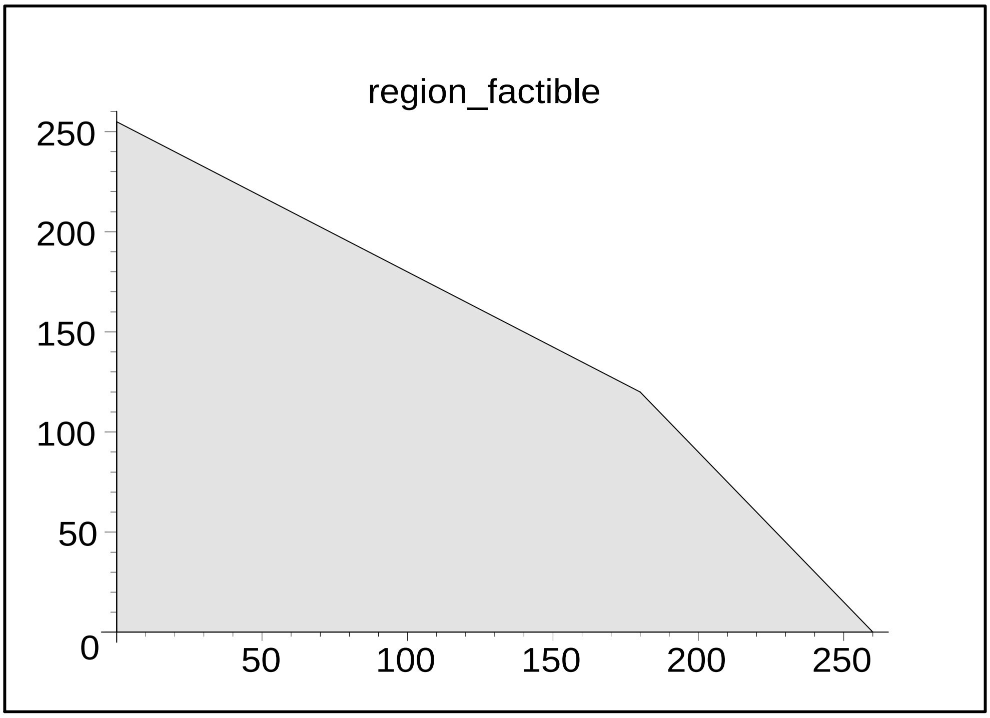
$$\{x = 0,\ y = 255\}$$

```
>  with(plots):
```

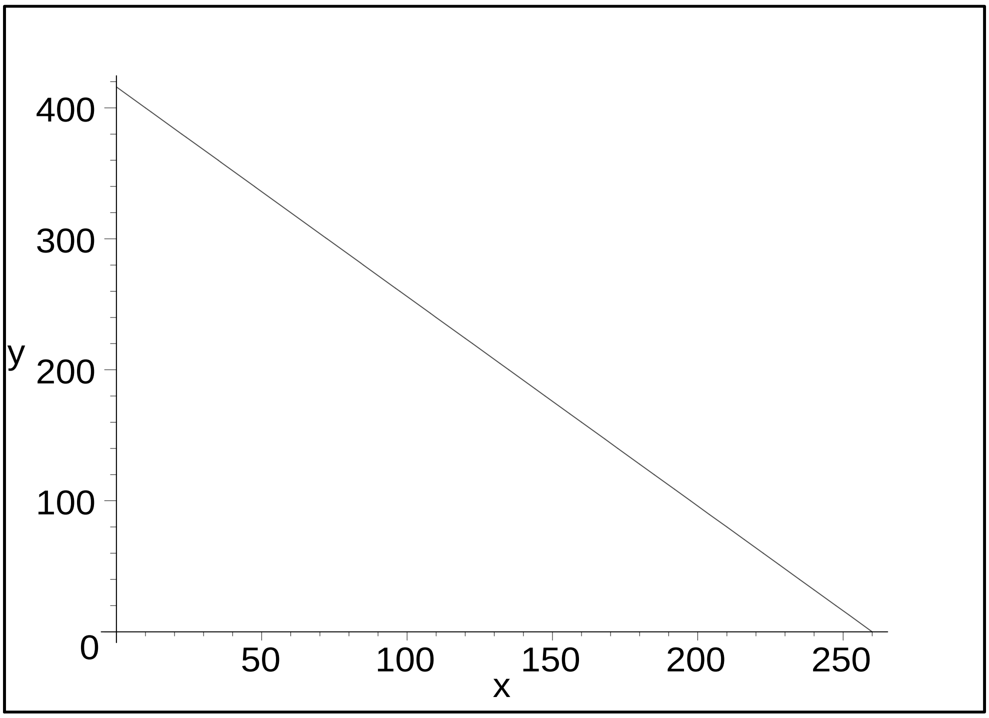
```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Dibujamos la región factible: En este conjunto estan las posibles soluciones al problema

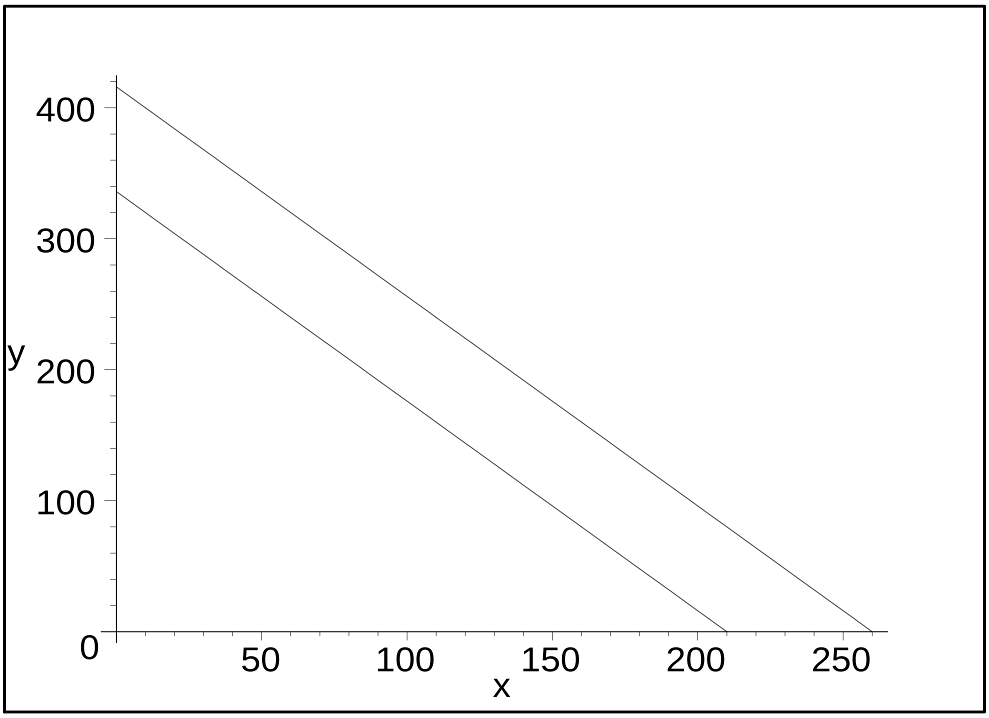
```
> polygonplot([[0,0],[0,255],[180,120]
> ,[260,0]],color=yellow,title='region_factible');
```



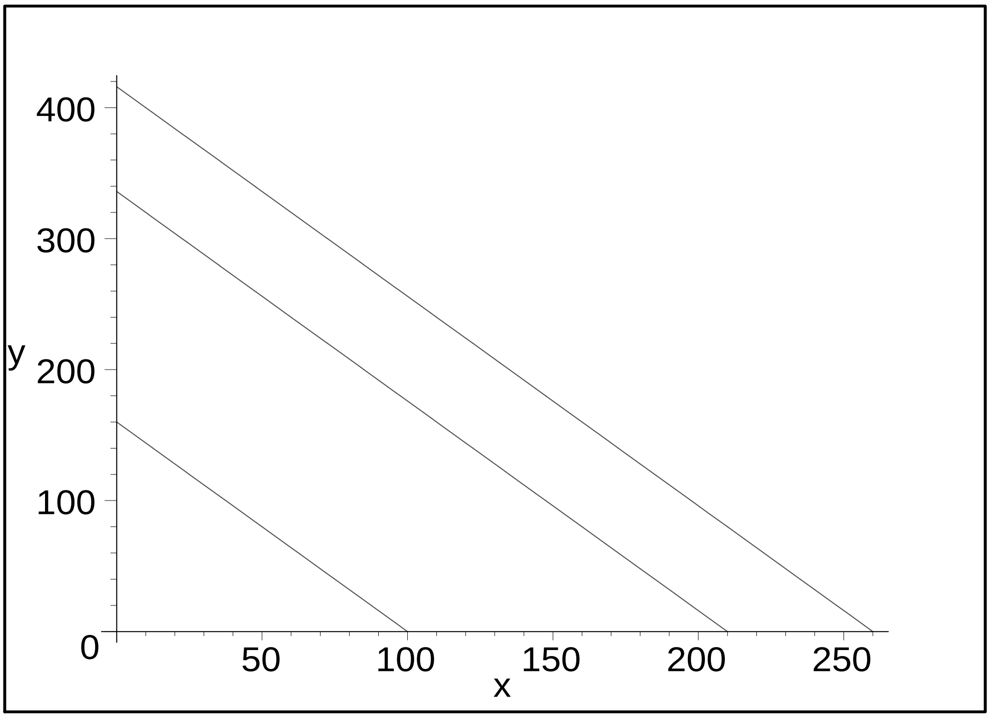

```
> implicitplot({200*x+125*y=52000},x=0..300,y=0..500);
```




```
> implicitplot({200*x+125*y=52000,200*x+125*y=42000
> },x=0..300,y=0..500);
```



```
>  implicitplot({200*x+125*y=52000,200*x+125*y=42000,200*x+125*y=20000
>  },x=0..300,y=0..500);
```



Observamos como a medida que la funcion z, tiene un valor más pequeño sus curvas de nivel se van acercando al origen de coordenadas

```
>  solve(200*x+125*y=52000,y);
```

$$-\frac{8\,x}{5}+416$$

```
>  solve(200*x+125*y=42000,y);
```

$$-\frac{8\,x}{5}+336$$

```
>  solve(200*x+125*y=32000,y);
```

$$-\frac{8\,x}{5}+256$$

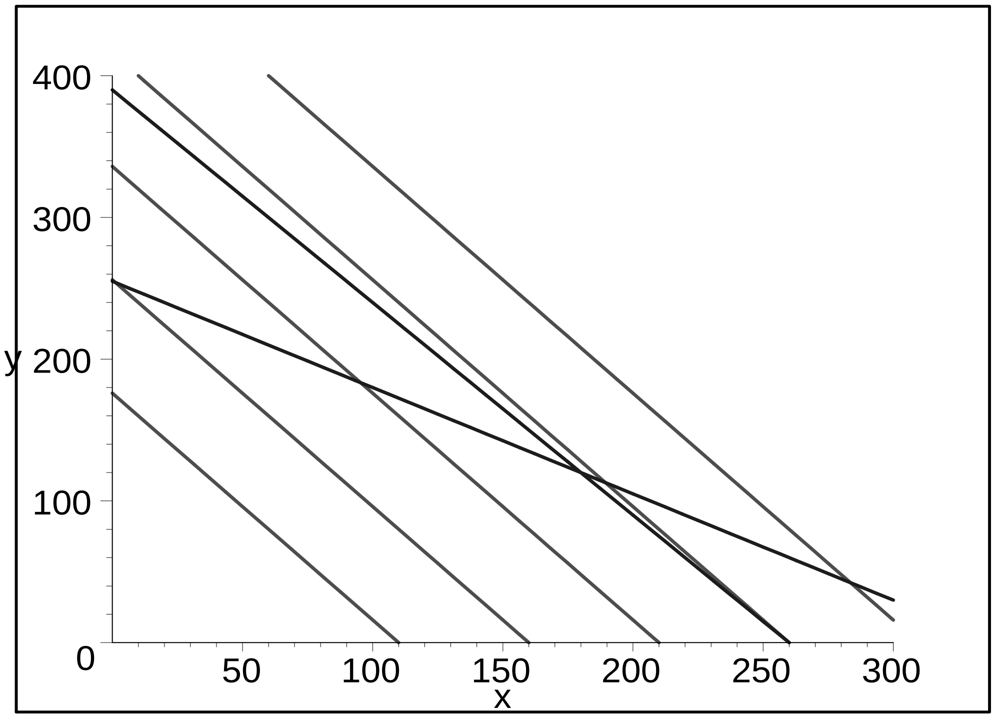
```
>  solve(200*x+125*y=22000,y);
```

$$-\frac{8\,x}{5}+176$$

```
>  solve(200*x+125*y=62000,y);
```

$$-\frac{8\,x}{5}+496$$

```
> z0:=-8/5*x+496:
> z1:=-8/5*x+416:
> z2:=-8/5*x+336:
> z3:=-8/5*x+256:
> z4:=-8/5*x+176:
> plot([r1,r2,z0,z1,z2,z3,z4],x=0..300,
> y=0..400,thickness=4,color=[blue,blue,red,red,red,red,red]);
```



De la gráfica podemos deducir que el valor máximo lo alcanzará en el vértice (0, 260). En general veremos que encontraremos los maximos o minimos en los bordes de la región factible. Ya sea en un sólo vértice o si lo alcanza en 2, lo alcanza en todo el segmento que une ambos vértices.

Todo esto también podiamos haberlo calculado de la siguiente forma.

Calculamos el valor de la función objetivo z en los vértices del polígono

```
> subs({x=0,y=0},200*x+125*y);
```

$$0$$

```
> subs({x=0,y=255},200*x+125*y);
```

$$31875$$

```
> subs({x=180,y=120},200*x+125*y);
```

$$51000$$

```
> subs({x=260,y=0},200*x+125*y);
```

$$52000$$

Resolvemos ahora este problema por el método del simplex, comprobamos que es de la forma AX<=b, con b>=0 y lo que queremos es maximizar una función lineal z.

Primero observamos la solución de Maple

```
> with(simplex):

Warning, the name display has been redefined

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined
and unprotected
> maximize(200*x+125*y,{1/2*x+1/3*y<=130,1/2*x+2/3*y<=170
> },NONNEGATIVE);
```

$$\{x = 260,\ y = 0\}$$

Pero nosotros lo vamos a hacer paso a paso:

Para ello empezamos escribiendo la **tabla inicial** que corresponde al valor de la función en el (0,0)

```
> with(linalg):

Warning, the names basis and pivot have been redefined

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
> t1:=matrix(3,6,[1/2,1/3,1,0,0,130,1/2,2/3,0,1,0,170,-200,-
125,0,0,1,0
> ]);
```

$$t1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 130 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 170 \\ -200 & -125 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez colocada la tabla inicial miramos si hay algún número negativo, si lo hay **elijo columna pivote**, el número de la fila de la z ”más negativo”, en nuestro caso el -200 (si no lo hubiera habido hubiera terminado el problema) y **elijo la fila pivote** efectuamos todos los cocientes de los términos independientes con los de la columna pivote: 130/(1/2)=260 y 170/(1/2)=340, y elegimos el más pequeño de los no negativos en nuestro caso la fila 1, de manera que ya tenemos elegido nuestro pivote que se encontrara en la intersección de la columna y la fila pivote, en nuestro caso el elemento 1,1 de la matriz, el 1/2.

Ahora mediante operaciones elementales por filas (importante, filas) pondremos un 1 en el lugar del pivote

```
> t2:=mulrow(t1,1,2);
```

$$t2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 & 0 & 260 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 170 \\ -200 & -125 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Manteniendo el pivote haremos ceros en la columna pivote, por encima y por debajo, en nuestro caso solo por debajo

```
> t3:=addrow(t2,1,2,-1/2);
```

$$t3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 & 0 & 260 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 & 40 \\ -200 & -125 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> t4:=addrow(t3,1,3,200);
```

$$t4 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 & 0 & 260 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & \frac{25}{3} & 400 & 0 & 1 & 52000 \end{bmatrix}$$

Una vez hechos los ceros debajo del pivote observamos de nuevo la fila de la función z y vemos si tenemos algun número negativo en dicha fila, si es asi volvemos a elegir pivote, como la interseccion de la columna y la fila y volvemos ha hacer unos y ceros. Pero si no hay ningún número negativo como es nuestro caso, es que ya hemos acabado el problema y tenemos la solución. Observar que en la última fila en la última columna nos aparece el valor maximo de la z que buscabamos. Y que se alcanza en el (260, 0)

Práctica 7 : Programación Lineal

Objetivos: 1º Resolución del problema de programación lineal mediante el método geométrico.

2º Resolucón del problema standar de programación lineal mediante el algoritmo del simplex

Problema 1. Resolver el **problema 2 del examen del 23 de junio de 2001** por:

a) mediante el comando del simplex

b) mediante el método del simplex paso a paso con operaciones elementales

Problema 2: Resolver el problema **problema 1 del examen del 9 de septiembre de 2000** por:

a) mediante el comando del simplex

b) mediante el método del simplex paso a paso con operaciones elementales

Capítulo 7

Determinantes

Objetivos: **1º** Conocer algnas propiedades de los determinantes

2º Cálculo de determinantes

```
>  with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Problema 0. Encuentra los comandos que calculan para dar una matriz aleatoria de un tamaño dado, que calculan un menor y que calculan la matriz de los adjuntos. Es conveniente para la realización de la práctica que recuerdes como se sumaban, intercambiaban, etc, filas y columnas en una matriz.

Experimentando e Investigando

```
\textbf{Problema 1.} Dar A una matriz cuadrada aleatoria de tamaño 7.
Calcular su determinante. Transponerla y calcular su determinante.
Compara ambos resultados. Enuncia una propiedad general que englobe
este resultado.
```

Problema 2. Definir la matriz A1 intercambiando las filas 2 y 5 de la matriz A. Calcular —A1— y compararlo con el —A—. Definir la matriz A2 intercambiando las columnas 3 y 4 de la matriz A. Calcular —A2— y compararlo con el —A—. Enuncia una propiedad general que englobe este resultado.

Problema 3. Definir la matriz B1como la matriz A excepto en la fila 6 que la coincidira con la fila 5. Calcula —B1—. Definir la matriz B2 como la matriz A excepto en la columna 5 que coincidira con la columna 6. Calcula —B2—. Enuncia una propiedad general que englobe este resultado.

Problema 4. Definir la matriz C1 como la matriz A excepto la fila 4 que la multiplicaremos por 10. Calcula —C1—. Definir la matriz C2 como la matriz A excepto la fila 7 que la multiplicaremos por -10. Calcula —C2—. Enuncia una propiedad general que englobe este resultado.

Problema 5. Definir la matriz A3 como la matriz A excepto la fila 2 que la sustituiremos por la fila 3 multiplicada por 2. Calcula —A3—. Definir la matriz A4 como la matriz A excepto la columna 5 que la sustituiremos por la columna 6 multiplicada por -6. Calcula —A4—. Enuncia una propiedad general que englobe este resultado.

Problema 6. Definir la matriz B3como la matriz A excepto en la fila 6 que la convertiremos toda en ceros. Calcula —B3—. Definir la matriz B4 como la matriz A excepto en la columna 5 que la convertiremos toda en ceros. Calcula —B4—. Enuncia una propiedad general que englobe este resultado.

Problema 7. Sea H otra matriz cuadrada de tamaño 7, calcula

—A—, —H— y —AH—. ¿Qué relación tienen?

Capítulo 8

Formas canónicas

Objetivos: 1º Relación entre los autovalores de una matriz y las raices de un cierto polinomio dependiente de la matriz

2º Relación de semejanza entre una matiz y su forma canónica

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Diremos que una matriz cuadrada A es diagonalizable si su endomorfismo asociado L_A lo es. De la misma forma diremos que un vector x no nulo es un autovector asociado al autovalor a de A si Ax=ax.

Problema 1. Explica lo que hacen las órdenes **eigenvalues** y **eigenvectors.**

Ejemplo: Consideramos la segunda matriz del **ejercicio 186** de las hojas de clase

```
> A:=matrix(4,4,[0,1,0,0,3,0,2,0,0,2,0,3,0,0,1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definimos la matriz I4 como la identidad de tamaño 4

```
> I4:=array(identity,1..4,1..4):
```

Calculamos el siguiente polinomio p(x)=det(A-xI4)

```
> p:=det(evalm(A-x*I4));
```

$$p := x^4 - 10\,x^2 + 9$$

Factorizamos este polinomio

```
> factor(p);
```

$$(x-1)\,(x+3)\,(x-3)\,(x+1)$$

Calculamos los autovalores de A

```
> eigenvalues(A);
```

$$-1,\ 1,\ 3,\ -3$$

Hacemos esto mismo con la matriz B

```
> B:=matrix(4,4,[1,-1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,2,0,0,0,-2]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> q:=det(B-x*I4);
```

$$q := -4 + 6\,x - 2\,x^2 - x^3 + x^4$$

```
> factor(q,complex);
```

$$(x+2.)\,(x-1.+1.\,I)\,(x-1.)\,(x-1.-1.\,I)$$

```
> eigenvalues(B);
```

$$1,\ -2,\ 1+I,\ 1-I$$

Problema 2: ¿Qué relación encuentras entre las raices de p y q y los autovalores de A y B respectivamente? Explica a qué se debe esta relación.

Como se ha visto en clase el autoespacio asociado al autovalor x de la matriz A coincide con el Ker(A-xI). Vamos a calcular los autovectores de las matrices anteriores.

```
> kernel(A-I4);
```

$$\{[-1,\ -1,\ 1,\ 1]\}$$

```
> v1:=vector([-1, -1, 1, 1]):
> kernel(A+I4);
```

$$\{[1,\ -1,\ -1,\ 1]\}$$

```
> v2:=vector([1, -1, -1, 1]):
> kernel(A-3*I4);
```

$$\{[1,\ 3,\ 3,\ 1]\}$$

```
> v3:=vector([1, 3, 3, 1]):
> kernel(A+3*I4);
```

$$\{[-1,\ 3,\ -3,\ 1]\}$$

```
> v4:=vector([-1, 3, -3, 1]):
```

Comprobamos que estos 4 autovectores forman una base

```
> basis({v1,v2,v3,v4});
```

$$\{v2,\ v1,\ v3,\ v4\}$$

Calculamos esto mismo utilizando el comando de maple

```
> eigenvectors(A);
```

$$[1,\ 1,\ \{[-1,\ -1,\ 1,\ 1]\}],\ [-3,\ 1,\ \{[-1,\ 3,\ -3,\ 1]\}],\ [3,\ 1,\ \{[1,\ 3,\ 3,\ 1]\}],\ [-1,\ 1,\ \{[1,\ -1,\ -1,\ 1]\}]$$

```
> kernel(B-I4);
```

$$\{[0,\ 0,\ 1,\ 0]\}$$

```
> w1:=vector([0, 0, 1, 0]);
```

$$w1 := [0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

```
> kernel(B+2*I4);
```

$$\{\left[0,\ 0,\ 1,\ \frac{-3}{2}\right]\}$$

```
> w2:=vector([0, 0, 1, -3/2]);
```

$$w2 := \left[0,\ 0,\ 1,\ \frac{-3}{2}\right]$$

```
> kernel(B-(1+I)*I4);
```

$$\{[I,\ 1,\ 0,\ 0]\}$$

```
> w3:=vector([I, 1, 0, 0]);
```

$$w3 := [I,\ 1,\ 0,\ 0]$$

```
> kernel(B-(1-I)*I4);
```

$$\{[-I,\ 1,\ 0,\ 0]\}$$

```
> w4:=vector([-I, 1, 0, 0]);
```

$$w4 := [-I,\ 1,\ 0,\ 0]$$

Comprobamos que estos 4 autovectores forman una base

```
> basis({w1,w2,w3,w4});
```

$$\{w3,\ w4,\ w2,\ w1\}$$

Calculamos esto mismo utilizando el comando de maple

```
> eigenvectors(B);
```

$$[-2,\ 1,\ \{\left[0,\ 0,\ 1,\ \frac{-3}{2}\right]\}],\ [1+I,\ 1,\ \{[1,\ -I,\ 0,\ 0]\}],\ [1-I,\ 1,\ \{[1,\ I,\ 0,\ 0]\}],\ [1,\ 1,\ \{[0,\ 0,\ 1,\ 0]\}]$$

Pregunta 3: ¿Qué significan los dos primeros números que aparecen en cada corchete?

Problema 4: ¿Son las matrices A y B diagonalizables si las consideramos como matrices complejas? ¿Y si las consideramos como matrices reales?

Considero el cambio de base de la base de autovectores de A a la base canónica, es decir

```
> P:=concat(v1,v2,v3,v4);
```

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos el cambio de base inverso

```
> P1:=inverse(P);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Calculamos el producto P1*A*P

```
>  multiply(P1,A,P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Y hemos obtenido la forma canónica, diagonal en este caso, de la matriz A

Problema 5. Encuentra una matriz diagonal que sea semejante a B.

8.1 Algunos ejemplos

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> M := matrix([[119047645447/116928581701, 387497206568/350785745103,
> -106526857023/116928581701, 49156061573/350785745103,
> -67009781747/350785745103, -8655612275/18462407637],
> [32350831898/116928581701, 676856785711/350785745103,
> -34791198709/116928581701, -87608539658/350785745103,
> -217033674916/350785745103, -5940525193/18462407637],
> [-341432482287/116928581701, 268974126666/116928581701,
> 165558854059/116928581701, -257017528858/116928581701,
> 218875870746/116928581701, -1863846399/6154135879],
> [-108162674529/116928581701, 79761788672/350785745103,
> 23333960103/116928581701, 322293397271/350785745103,
> 389348046796/350785745103, 12441808318/18462407637],
> [-241468371205/116928581701, 1295413559951/701571490206,
> -221599042265/233857163402, 351629487425/701571490206,
> 785888397770/350785745103, -10025857993/18462407637],
> [440489423658/116928581701, -995704516303/350785745103,
> 56297271636/116928581701, 447726116918/350785745103,
> -687997178411/350785745103, 45736809040/18462407637]]):
```

```
{\large Vamos a calcular su forma de Jordan, empezamos calculando los
autovalores:}
```

```
> pcM:=charpoly(M,x):
> factor(pcM):
```

Para saber si es diagonalizable o no calculamos sus autoespacios:

```
> I6:=array(identity,1..6,1..6):
> M3:=evalm(M-3*I6):
> kernel(M3):
> u:=vector([-9/5, 1, 67/5, -14/5, 6/5, -87/5]):
> M2:=evalm(M-2*I6):
> kernel(M2):
> M1:=evalm(M-I6):
> kernel(M1):
```

Como vemos las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden para los autovalores 2 y 1 así que calculamos sus autoespacios generalizados:

```
> M22:=multiply(M2,M2):
> kernel(M22):
> M23:=multiply(M2,M2,M2):
> kernel(M23):


> v1:=vector([2030/3349, 6961/3349, 6050/3349, 1, 0, 4754/3349]):
```

Calculamos ahora su imagen por M2

```
> v2:=multiply(M2,v1):
```

Calculamos ahora el autoespacio generalizado de asociado al autovalor 1

```
> M12:=multiply(M1,M1):
> kernel(M12):
> M13:=multiply(M1,M1,M1):
> kernel(M13):
```

```
> M14:=multiply(M1,M1,M1,M1):
```

```
> kernel(M14):
```

Vemos que se han estabilidado los nucleos y es por tanto M13, el autoespacio generalizado para el autovalor 1. Elegimos un vector que este en M13 y no este en M12, por ejemplo:

```
> w1:=vector([0, 0, -85414/14577, -76728/24295, 1, 72681/24295]):
```

Calculamos ahora su imagen por M1

```
> w2:=multiply(M1,w1):
```

Calculamos ahora su imagen por M1

```
> w3:=multiply(M1,w2):
```

Comprobamos que los seis vectores anteriores nos dan una base B

```
> basis({u,v2,v1,w3,w2,w1}):
```

Calculamos el cambio de base de B a Bc

```
> P:=concat(u,v2,v1,w3,w2,w1):
```

Calculamos el cambio de base de Bc a B

```
> P1:=inverse(P):
```

Calculamos su forma de jordan

```
> multiply(P1,M,P):
```

La comparamos con la orden jordan.

```
> jordan(M,Q):
```

```
> print(Q):
```

$$\left[\frac{16259275836}{116928581701}, \frac{40836815845}{116928581701}, \frac{10210357493}{116928581701}, \frac{14371501234}{116928581701},\right.$$
$$\left.\frac{-81446661264}{116928581701}, \frac{90458948372}{116928581701}\right]$$
$$\left[\frac{-9032931020}{116928581701}, \frac{106175721197}{116928581701}, \frac{-17090125164}{116928581701}, \frac{7797303861}{116928581701},\right.$$
$$\left.\frac{-38668902095}{116928581701}, \frac{26123056184}{116928581701}\right]$$
$$\left[\frac{-121041275668}{116928581701}, \frac{58338308350}{116928581701}, \frac{-67087406700}{116928581701}, \frac{13148394746}{116928581701},\right.$$
$$\left.\frac{-90600832601}{116928581701}, \frac{188128682368}{116928581701}\right]$$
$$\left[\frac{25292206856}{116928581701}, \frac{-12834427837}{116928581701}, \frac{-106584451894}{116928581701}, \frac{5962644129}{116928581701},\right.$$
$$\left.\frac{-39328208510}{116928581701}, \frac{81292245038}{116928581701}\right]$$
$$\left[\frac{-10839517224}{116928581701}, \frac{-52504477515}{116928581701}, \frac{-80800040177}{116928581701}, \frac{15135942789}{116928581701},\right.$$
$$\left.\frac{-86484819065}{116928581701}, \frac{91639557401}{116928581701}\right]$$
$$\left[\frac{157172999748}{116928581701}, \frac{68839203853}{116928581701}, \frac{-17324533055}{116928581701}, \frac{-11007958392}{116928581701},\right.$$
$$\left.\frac{74628753364}{116928581701}, \frac{-139848466693}{116928581701}\right]$$

Capítulo 9

Espacios euclídeos

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> p1:=1:
```

Calculamos su norma

```
> n1:=sqrt(int(p1*p1,x=-1..1));
```

$$n1 := \sqrt{2}$$

De manera que el primer vector de la base ortonormal será

```
> q1:=p1/n1;
```

$$q1 := \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comprobamos que tiene norma 1

```
> sqrt(int(q1^2,x=-1..1));
```

```
> p2:=x:
> c1:=-int(p2*q1,x=-1..1);
```

$$c1 := 0$$

Observar que c1=0 implica que 1 y x eran ortogonales, lo comprobamos

```
> int(p2*p1,x=-1..1);
```

$$0$$

Calculamos ahora la norma de p2:

```
> n2:=sqrt(int(p2*p2,x=-1..1));
```

$$n2 := \frac{\sqrt{6}}{3}$$

De manera que el segundo vector de la base ortonormal será q2

```
> q2:=p2/n2;
```

$$q2 := \frac{x\sqrt{6}}{2}$$

Comprobamos que tiene norma 1

```
> sqrt(int(q2^2,x=-1..1));
```

$$1$$

Buscamos ahora el tercer vector de la base buscando un vector que este en el subespacio generado por {q1, q2, p3} y que sea ortogonal a q1 y q2. Esto es, r3=p3+d1*q1+d2*q2 y <r3,q1>=0 y <r3,q2>=0, de manera que d1=-<p3,q1> y d2=-<p3,q2>

```
> p3:=x^2:
> d1:=-int(p3*q1,x=-1..1);
```

$$d1 := -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

```
> d2:=-int(p3*q2,x=-1..1);
```

$$d2 := 0$$

```
> r3:=p3+d1*q1;
```

$$r3 := x^2 - \frac{1}{3}$$

Lo normalizamos

```
> n3:=sqrt(int(r3^2,x=-1..1));
```

$$n3 := \frac{2\sqrt{10}}{15}$$

```
> q3:=r3/n3;
```

$$q3 := \frac{3\,(x^2 - \frac{1}{3})\,\sqrt{10}}{4}$$

Comprobamos que tiene norma 1

```
> sqrt(int(q3^2,x=-1..1));
```

$$1$$

Buscamos ahora el cuarto vector de la base buscando un vector que este en el subespacio generado por {q1, q2, q3, p4} y que sea ortogonal a q1, q2 y q3. Esto es, r4=p4+h1*q1+h2*q2+h3*q3 y <r4,q1>=0 <r4,q2>=0, y <r4,q3>=0, de manera que h1=-<p4,q1> , h2=-<p4,q2> y h3=-<p4,q3>

```
> p4:=x^4:
```

```
> h1:=-int(p4*q1,x=-1..1);
```

$$h1 := -\frac{\sqrt{2}}{5}$$

```
> h2:=-int(p4*q2,x=-1..1);
```

$$h2 := 0$$

```
> h3:=-int(p4*q3,x=-1..1);
```

$$h3 := -\frac{4\sqrt{10}}{35}$$

```
> r4:=p4+h1*q1+h2*q2+h3*q3 ;
```

$$r4 := x^4 + \frac{3}{35} - \frac{6}{7}\,x^2$$

```
> n4:=sqrt(int(r4^2,x=-1..1));
```

$$n4 := \frac{8\sqrt{2}}{105}$$

```
> q4:=r4/n4;
```

$$q4 := \frac{105\,(x^4 + \frac{3}{35} - \frac{6}{7}\,x^2)\,\sqrt{2}}{16}$$

Capítulo 10

Cónicas

```
> restart:
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> with(geometry):
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> f:=8*x^2+4*x*y+5*y^2+12*y+4;
```

$$f := 8\,x^2 + 4\,x\,y + 5\,y^2 + 12\,y + 4$$

```
> A:=matrix(3,3,[8,2,0,2,5,6,0,6,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Consideramos la traza:

```
> s:=8+5;
```

$$s := 13$$

El determinante de la forma cuadrática

```
> delta:=det(minor(A,3,3));
```

$$\delta := 36$$

El determinante de la matriz entera

```
> det(A);
```

$$-144$$

```
> C:=minor(A,3,3);
```

$$C := \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvectors(C);
```

$$[4,\, 1,\, \{[1,\, -2]\}],\ [9,\, 1,\, \{[2,\, 1]\}]$$

Los nuevos ejes tendrán por dirección $[1,\, -2]$, $[2,\, 1]$

Calculamos la base ortonormal

```
> P:=matrix(2,2,[1/sqrt(5),2/sqrt(5),-2/sqrt(5),1/sqrt(5)]);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

```
> P1:=inverse(P);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

```
> U:=vector([u,v]);
```

$$U := [u,\, v]$$

```
> multiply(P,U);
```

$$\left[\frac{\sqrt{5}\,u}{5} + \frac{2\sqrt{5}\,v}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}\,u}{5} + \frac{\sqrt{5}\,v}{5}\right]$$

```
> x:=1/5*sqrt(5)*u+2/5*sqrt(5)*v;
```

$$x := \frac{\sqrt{5}\,u}{5} + \frac{2\,\sqrt{5}\,v}{5}$$

```
> y:=-2/5*sqrt(5)*u+1/5*sqrt(5)*v;
```

$$y := -\frac{2\,\sqrt{5}\,u}{5} + \frac{\sqrt{5}\,v}{5}$$

```
> collect(f,u);
```

$$4\,u^2 - \frac{24}{5}\,\sqrt{5}\,u + 9\,v^2 + \frac{12}{5}\,\sqrt{5}\,v + 4$$

Hacemos ahora la traslación calculando el centro

```
> ec1:=simplify(diff(f,u));
```

$$ec1 := 8\,u - \frac{24\,\sqrt{5}}{5}$$

```
> ec2:=simplify(diff(f,v));
```

$$ec2 := 18\,v + \frac{12\,\sqrt{5}}{5}$$

```
> solve({ec1,ec2});
```

$$\{v = -\frac{2\,\sqrt{5}}{15},\ u = \frac{3\,\sqrt{5}}{5}\}$$

Estas son las coordenadas del centro de manera que definimos unas nuevas variables:

```
> u:=a+3/5*sqrt(5);
```

$$u := a + \frac{3\,\sqrt{5}}{5}$$

```
> v:=b-2/15*sqrt(5);
```

$$v := b - \frac{2\,\sqrt{5}}{15}$$

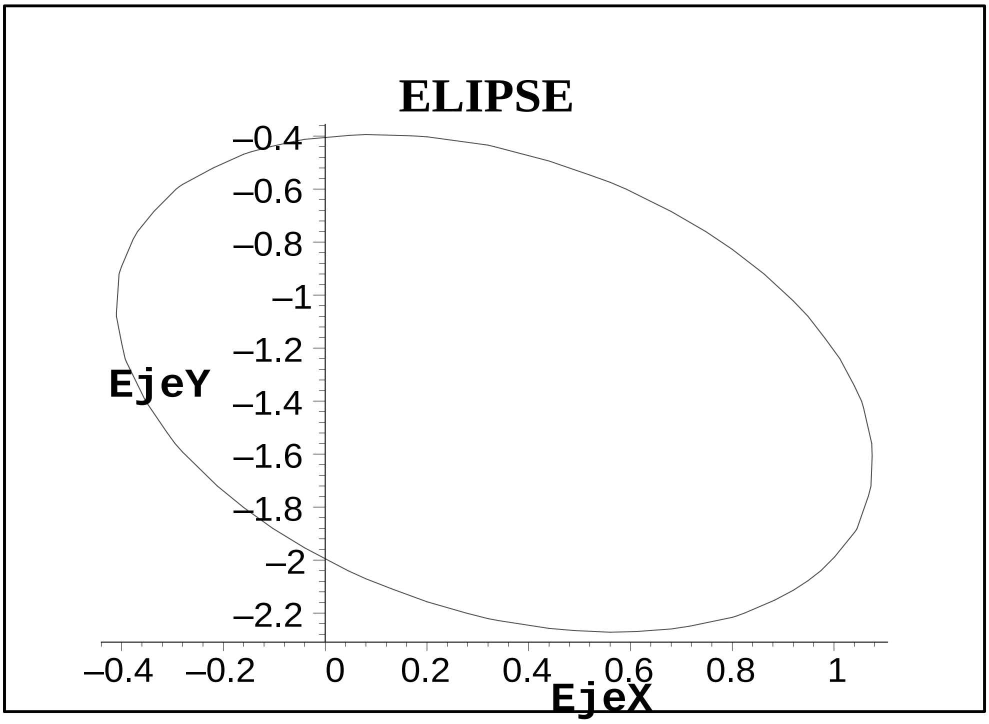
```
> simplify(collect(f,a));
```

$$4\,a^2 - 4 + 9\,b^2$$

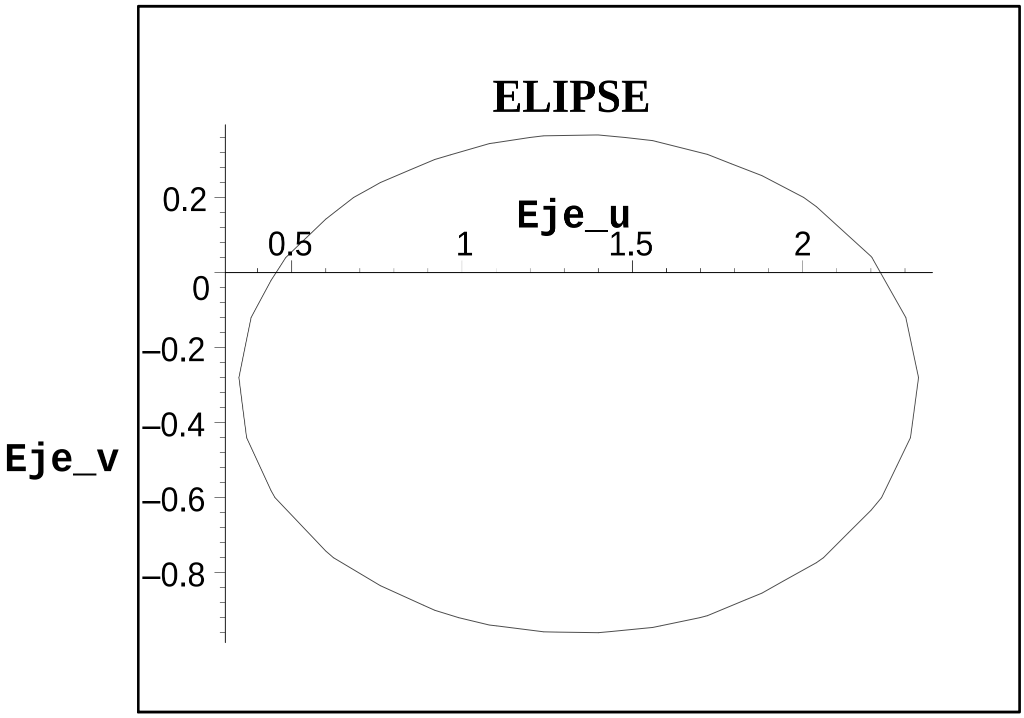
```
> restart:
> with(geometry):
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

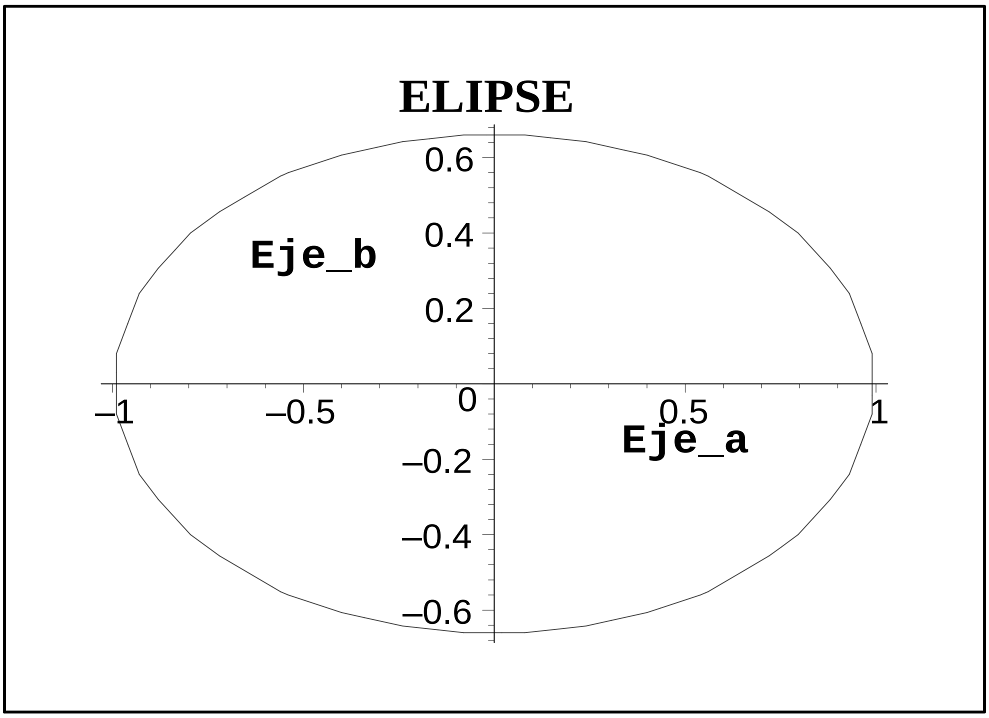
```
> implicitplot({8*x^2+4*x*y+5*y^2+12*y+4=
> 0
> },x=-1..2,y=-3..1,title='ELIPSE',labels=['EjeX','EjeY'],titlefont=[TI
> MES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```




```
> implicitplot({4*u^2-24/5*sqrt(5)*u+9*v^2+12/5*sqrt(5)*v+4=
> 0
> },u=-1..3,v=-3..1,title='ELIPSE',labels=['Eje_u','Eje_v'],titlefont=[
> TIMES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```



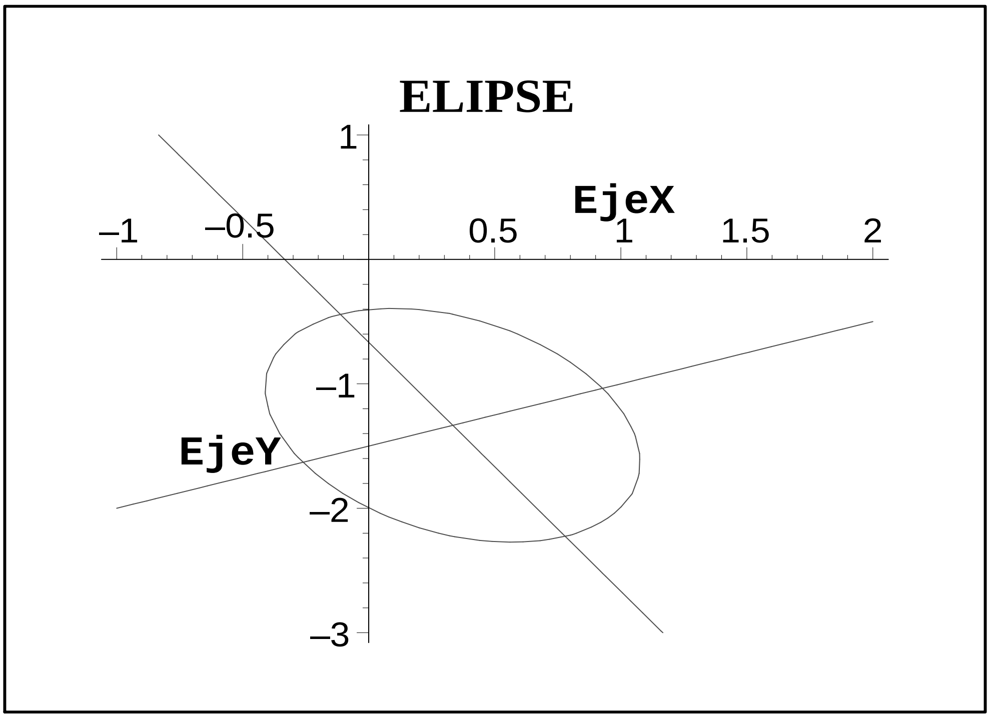

```
> implicitplot({4*a^2-4+9*b^2=
> 0
> },a=-2..2,b=-2..2,title='ELIPSE',labels=['Eje_a','Eje_b'],titlefont
> TIMES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```




```
>  conic(c1,8*x^2+4*x*y+5*y^2+12*y+4=0,[x,y]):

>  detail(c1);
```

$$\begin{aligned}
&\textit{name of the object}: \ c1\backslash \\
&\textit{form of the object}: \ ellipse2d\backslash \\
&\textit{center}: \ [1/3,\ -4/3]\backslash \\
&\textit{foci}: \ [[2/3,\ -2],\ [0,\ -2/3]]\backslash \\
&\textit{length of the major axis}: \ 2\backslash \\
&\textit{length of the minor axis}: \ 4/3\backslash \\
&\textit{equation of the ellipse}: \ 8*x\hat{\ }2+4*x*y+5*y\hat{\ }2+12*y+4\ =\ 0
\end{aligned}$$

```
>  implicitplot({8*x^2+4*x*y+5*y^2+12*y+4=
>  0,2*y-x+3=0,3*y+6*x+2=0
>  },x=-1..2,y=-3..1,title='ELIPSE',labels=['EjeX','EjeY'],titlefont=[TI
>  MES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```




```
> restart:
```

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> with(geometry):
```

Problema. Hacer esto mismo con los siguientes problemas

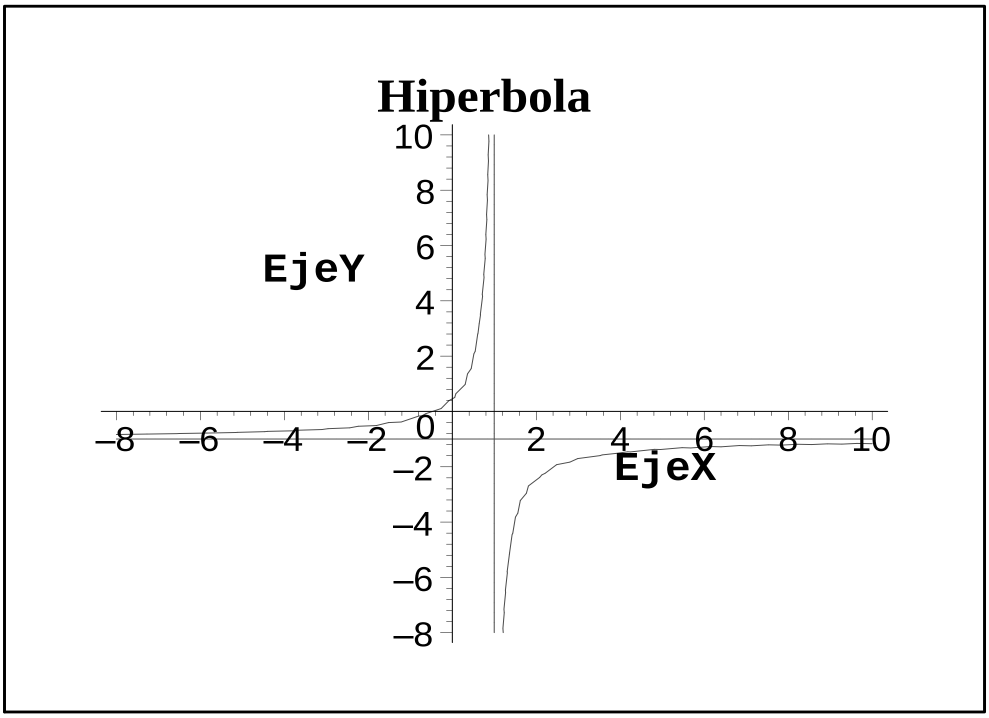
Problema 346 (ii) (Junio 98)

```
> conic(c2,-2*x*y-2*x+2*y-1=0,[x,y]):
```

```
> detail(c2);
```

$name\ of\ the\ object:\ \ c2\backslash$
$form\ of\ the\ object:\ \ hyperbola2d\backslash$
$center:\ \ [1,\ -1]\backslash$
$foci:\ \ [[-1/2*(-2\hat{}(1/2)-6\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2),\ 1/2*(-2\hat{}(1/2)-6\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2)],\ [-\backslash$
$1/2*(-2\hat{}(1/2)+6\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2),\ 1/2*(-2\hat{}(1/2)+6\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2)]]\backslash$
$vertices:\ \ [[-1/2*(-2\hat{}(1/2)-3\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2),\ 1/2*(-2\hat{}(1/2)-3\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2)\backslash$
$],\ [-1/2*(-2\hat{}(1/2)+3\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2),\ 1/2*(-2\hat{}(1/2)+3\hat{}(1/2))*2\hat{}(1/2)]]\backslash$
$the\ asymptotes:\ \ [y*2\hat{}(1/2)+2\hat{}(1/2)\ =\ 0,\ -x*2\hat{}(1/2)+2\hat{}(1/2)\ =\ 0]\backslash$
$equation\ of\ the\ hyperbola:\ \ -2*x*y-2*x+2*y-1\ =\ 0$

```
> implicitplot({-2*x*y-2*x+2*y-1 = 0,2^(1/2)*y+2^(1/2) = 0,
> -x*2^(1/2)+2^(1/2) =
> 0
> },x=-8..10,y=-8..10,title='Hiperbola',labels=['EjeX','EjeY'],titlefon
> t=[TIMES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```

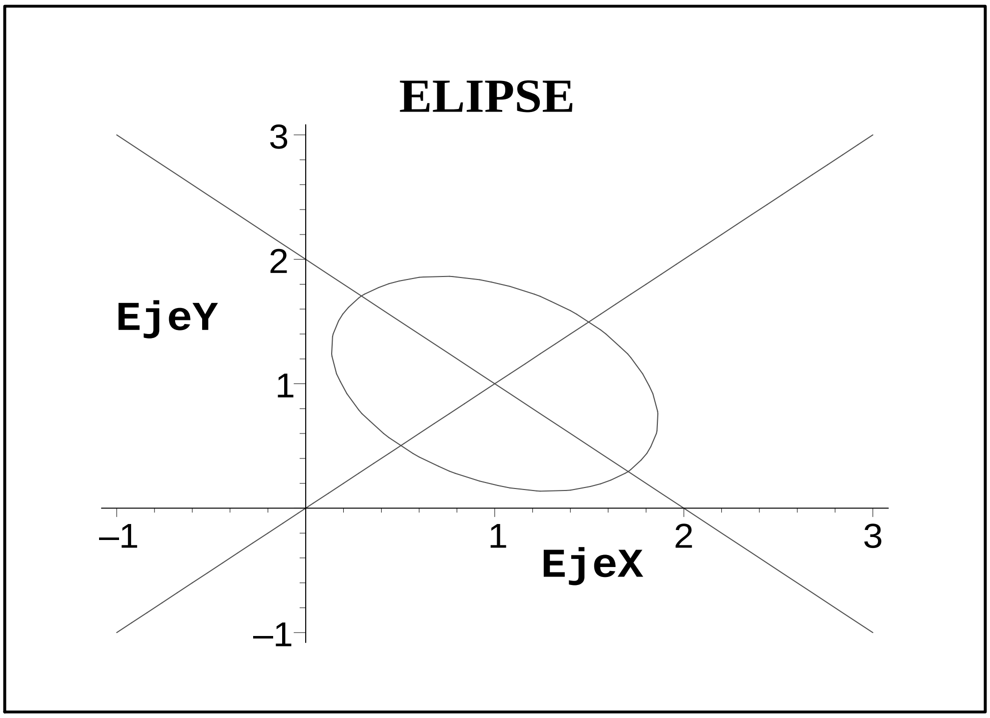


Problema 347 (Febrero 98)

```
> conic(c3,3*x^2+2*x*y+3*y^2-8*x-8*y+6=0,[x,y]):
> detail(c3);
```

name of the object : $c3\backslash$
form of the object : *ellipse2d*$\backslash$
center : $[1,\ 1]\backslash$
foci : $[[3/2,\ 1/2],\ [1/2,\ 3/2]]\backslash$
length of the major axis : $2\backslash$
length of the minor axis : $2\hat{\ }(1/2)\backslash$
equation of the ellipse : $3*x\hat{\ }2+2*x*y+3*y\hat{\ }2-8*x-8*y+6\ =\ 0$

```
> implicitplot({3*x^2+2*x*y+3*y^2-8*x-8*y+6 =
> 0,x-y=0,x+y-2=0
> },x=-1..3,y=-1..3,title='ELIPSE',labels=['EjeX','EjeY'],titlefont=[
> MES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```



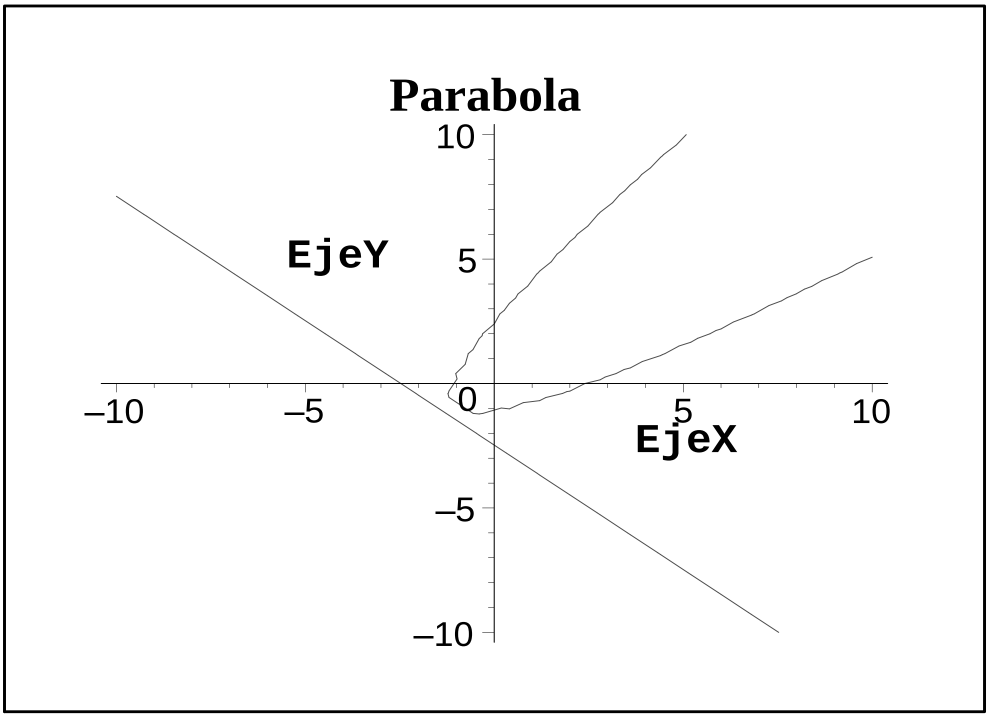
Problema 348 (Sep 97)

```
> conic(c4,x^2-2*x*y+y^2-sqrt(2)*x-sqrt(2)*y-3=0,[x,y]):
```

```
> detail(c4);
```

name of the object : $c4\backslash$
form of the object : $parabola2d\backslash$
vertex : $[-3/4*2\hat{}(1/2), -3/4*2\hat{}(1/2)]\backslash$
focus : $[-5/8*2\hat{}(1/2), -5/8*2\hat{}(1/2)]\backslash$
directrix : $1/2*2\hat{}(1/2)*x+1/2*2\hat{}(1/2)*y+7/4 = 0\backslash$
equation of the parabola : $x\hat{}2-2*x*y+y\hat{}2-2\hat{}(1/2)*x-2\hat{}(1/2)*y-3 = 0$

```
> implicitplot({x^2-2*x*y+y^2-2^(1/2)*x-2^(1/2)*y-3 =
> 0,1/2*2^(1/2)*x+1/2*2^(1/2)*y+7/4 =
> 0
> },x=-10..10,y=-10..10,title='Parabola',labels=['EjeX','EjeY'],titlefo
> nt=[TIMES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```

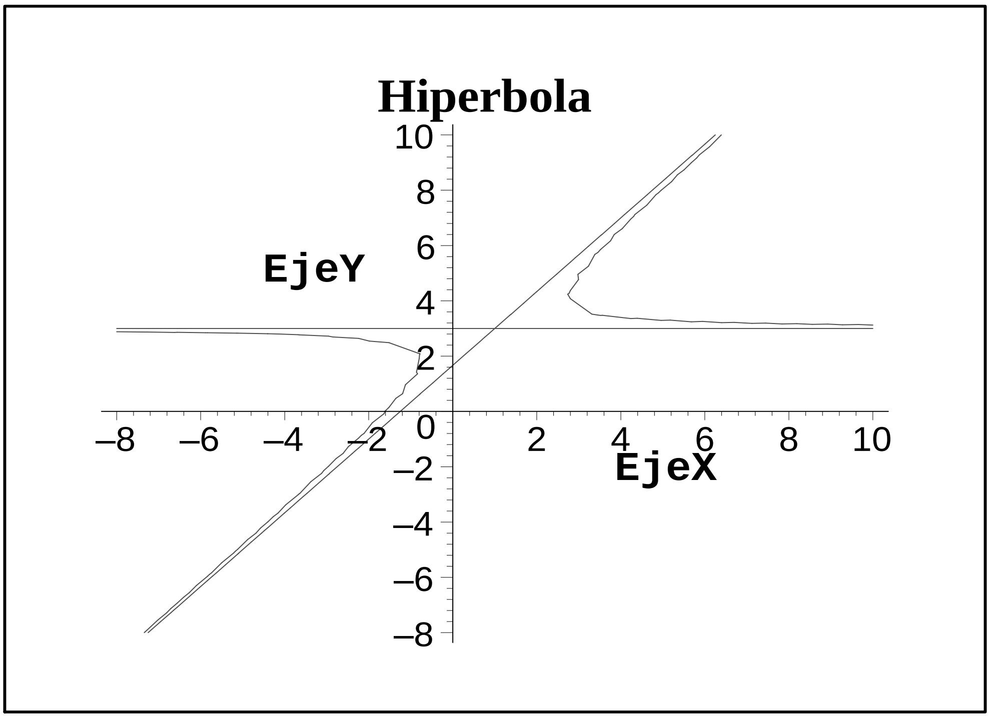


Problema 349 (Jun 97)

```
> conic(c5,3*y^2-4*x*y+12*x-14*y+19=0,[x,y]):
> detail(c5);
```

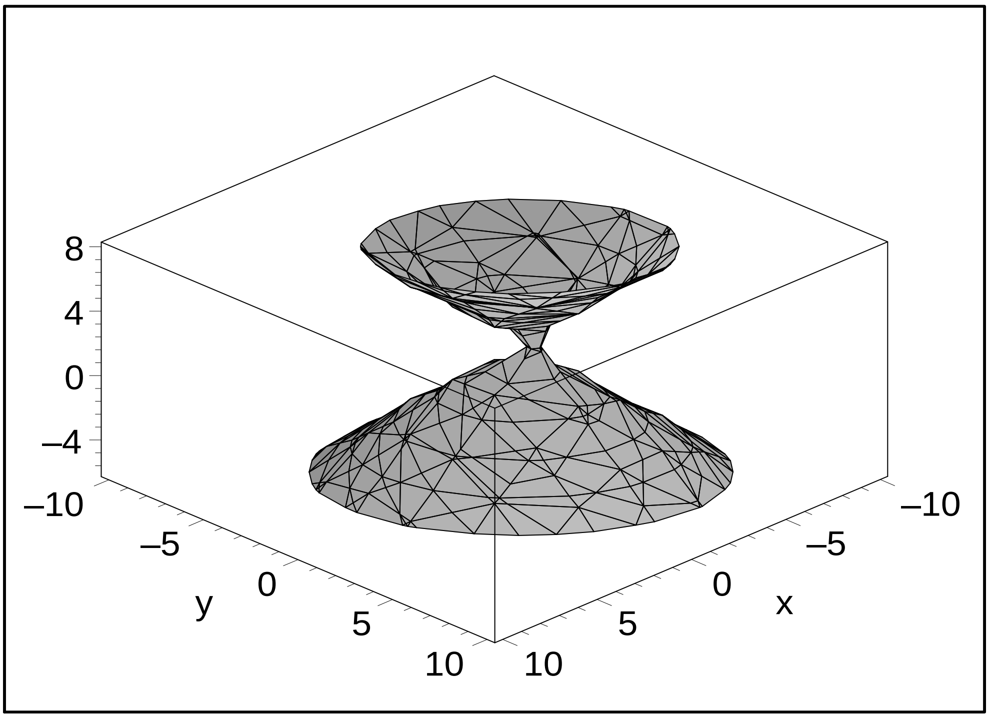
name of the object : $c5\backslash$
form of the object : $hyperbola2d\backslash$
center : $[1,\ 3]\backslash$
foci : $[[-1,\ 2],\ [3,\ 4]]\backslash$
vertices : $[[2/5*(5\hat{}(1/2)-2)*5\hat{}(1/2)-1,\ 1/5*(5\hat{}(1/2)-2)*5\hat{}(1/2)+2],\ [2/5*(\backslash$
$5\hat{}(1/2)+2)*5\hat{}(1/2)-1,\ 1/5*(5\hat{}(1/2)+2)*5\hat{}(1/2)+2]]\backslash$
the asymptotes : $[1/2*y*5\hat{}(1/2)-3/2*5\hat{}(1/2)\ =\ 0,\ -2/5*x*5\hat{}(1/2)+3/10*y*\backslash$
$5\hat{}(1/2)-1/2*5\hat{}(1/2)\ =\ 0]\backslash$
equation of the hyperbola : $3*y\hat{}2-4*x*y+12*x-14*y+19\ =\ 0$

```
>  implicitplot({3*y^2-4*x*y+12*x-14*y+19 = 0,1/2*5^(1/2)*y-3/2*5^(1/2
>  = 0, -2/5*5^(1/2)*x+3/10*5^(1/2)*y-1/2*5^(1/2) =
>  0
>  },x=-8..10,y=-8..10,title='Hiperbola',labels=['EjeX','EjeY'],titlef
>  t=[TIMES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```



Problema 350 (May 97)

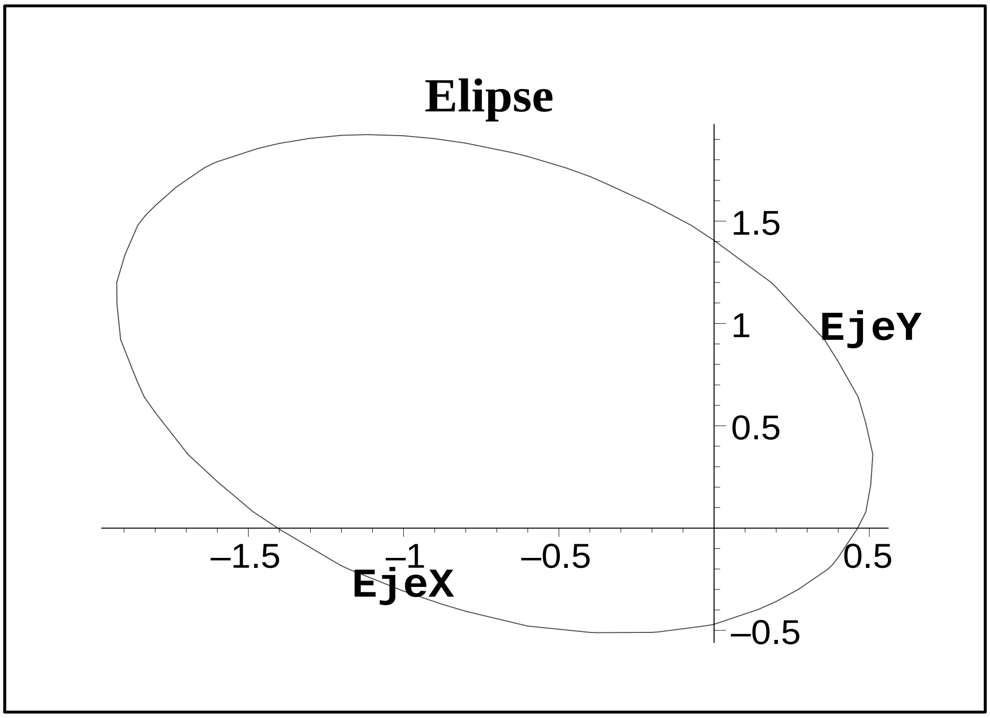
```
>  implicitplot3d(3*x^2+2*x*y+3*y^2-2*z^2+2*sqrt(2)*x-2*sqrt(2)*y+8*z-
8=
>  0,x=-10..10,y=-10..10,z=-6..8,axes=BOXED);
```




```
> restart:

> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> with(geometry):

> conic(c6,3*x^2+2*x*y+3*y^2+2*sqrt(2)*x-2*sqrt(2)*y-2=0,[x,y]):

> detail(c6);
```

name of the object : *c6*\
form of the object : *ellipse2d*\
center : $[-1/2*2\hat{}(1/2),\ 1/2*2\hat{}(1/2)]$\
foci : $[[0,\ 0],\ [-2\hat{}(1/2),\ 2\hat{}(1/2)]]$\
length of the major axis : $2*2\hat{}(1/2)$\
length of the minor axis : 2\
equation of the ellipse : $3*x\hat{}2+2*x*y+3*y\hat{}2+2*2\hat{}(1/2)*x-2*2\hat{}(1/2)*y-2$ \
$= 0$

```
>  implicitplot({3*x^2+2*x*y+3*y^2+2*2^(1/2)*x-2*2^(1/2)*y-2 =
>  0
>  },x=-2...3,y=-3..4,title='Elipse',labels=['EjeX','EjeY'],titlefont=
>  IMES,BOLD,14],labelfont=[COURIER, BOLD, 12]);
```



Bibliografía

[1] Apostol, T.M. Calculus 2a ed. Reverté. Barcelona, 1972

[2] Anton, H. Calculus: a new horizon. 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999

[3] Bartle, R. and Sherbert, D. Introducción al Análisis matemático de una variable. Ed. Limusa. Mejico D. F. 1991.

[4] García et al. Calculo I. ????

[5] Larson et al. Algebra Lineal. Ed Pirámide. Madrid 2004

[6] Cohen, M. et al. Proof wihtout words: Geometrics Series. Mathematics Magazine. Vol 74. nº4 page 320, October 2001

[7] Pérez, C. Métodos matemáticos y programación con Maple V. 1a ed. ra-ma. Madrid, 1998.

[8] Roanes, E. et al. Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[9] Murray R. Spiegel, et al. Fórmulas y tablas de matemática aplicada. 2ª ed. Madrid 2000.

[10] Spivak, M. Calculus : cálculo infinitesimal 2a ed. Reverté. Barcelona, 1988.

[11] Anton, H. Calculus: a new horizon. 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999.

[12] Del Castillo, F. Análisis matemático II. 1ª ed. Alhambra Universidad. Madrid, 1980.

[13] Marsden, J.E. y Tromba, A. Calculo vectorial. 4a ed. Addison-Wesley Longman de México. Naucalpán de Juárez, 1998

[14] Pérez, C. Métodos matemáticos y programación con Maple V. 1a ed. ra-ma. Madrid, 1998.

[15] Roanes, E. et al. Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[16] Stewart, J. Cálculo: conceptos y contextos. International Thomson Editores. Mexico D.F., 1999