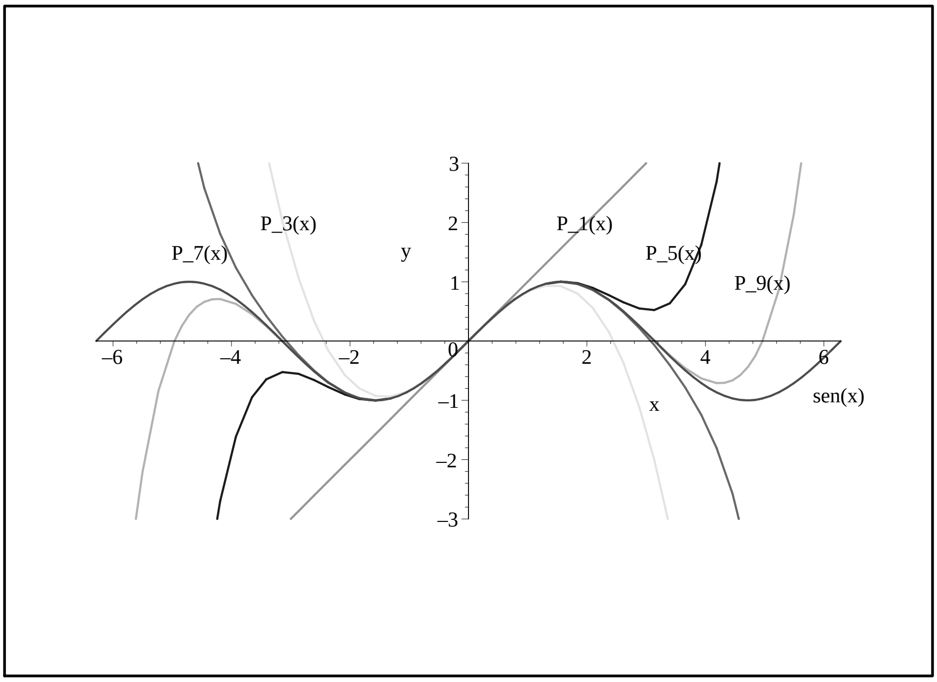
Cálculo diferencial en la Ingeniería de Montes

por

Ana Luzón y Pilar Cristobal

.



Prefacio

El objetivo de estos apuntes es servir de guía para los estudiantes que cursan el primer cuatrimestre de Cálculo Infinitesimal, cálculo diferencial, tanto en una como en varias variables, en la escuela de ingenieros de montes de la Universidad Politécnica de Madrid.

Este curso esta dividido en tres grandes temas: El primero pretende ser una introducción a la asignatura recordando lo que han visto en el bachillerato pero empezando a utilizar los métodos de nivel universitario. En el segundo tema nos concentramos en funciones de una variable, estudiando la continuidad y diferenciabilidad, los principales teoremas llegando a introducir las series de potencias. Es este segundo tema la parte fundamental de este cuatrimestre. En el tercer tema estudiamos la continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables, en este capítulo nos interesa sobre todo que los alumnos adquieran intuición geométrica y física de los resultados, así como una cierta destreza en el cálculo.

Utilizamos el Maple 8 como paquete de cálculo simbólico y numérico, ya que es el que tiene licencia de campus la Universidad Politécnica de Madrid.

Estos apuntes han tenido diversas fuentes: las primeras clases que recibimos las autoras, lo que fuimos aprendiendo de algunos de los compañeros del departamento, especialmente del profesor Manuel Alonso Morón, de nuestro propio trabajo de investigación, de la bibliografía que añadimos al final del libro incluyendo algunas páginas web.

Las autoras

Índice General

Capítulo 1

Números y Funciones

1.1 Números

1.1.1 Números enteros y racionales

Los números 1,2,3,... obtenidos por la adición repetida del 1 se llaman enteros positivos (también naturales, $\mathbb{N}$). Los opuestos de los enteros positivos se llaman enteros negativos. Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0, definen $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros.

Se verifica que la suma y el producto de dos enteros es un entero, pero el cociente de dos enteros no es necesariamente entero.

En $\mathbb{Z}$ se define un orden, a saber, si $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$ si $m - n > 0$.

Los cocientes de enteros $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$ se llaman números racionales.

Un número racional que denotaremos por $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$, es el conjunto

$$\frac{p}{q} = \left\{ \frac{n}{m} \ / \ nq = mp \right\}.$$

Por tanto,

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} \Longleftrightarrow (p, q) \text{ y } (p_1, q_1) \text{ son equivalentes.}$$

Si $\frac{p}{q}$ es un racional, llamamos numerador al entero p y denominador al entero $q \neq 0$. Numerador y denominador dependen del par ordenado que se utilice para representar el número racional. Es habitual elegir un par irreducible con denominador positivo.

$$\frac{-1}{2} = \{(-1, 2), (1, -2), (-2, 4), (2, -4), (-3, 6), ...\}$$

El conjunto de números racionales se denota por $\mathbb{Q}$, y contiene a $\mathbb{Z}$.

Las operaciones de suma y producto de enteros se extienden a los racionales:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Se demuestra que las operaciones definidas no dependen de la fracción (par ordenado) que se elija para representar los números racionales. Estas operaciones son cerradas en $\mathbb{Q}$ (si $r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r + s \in \mathbb{Q}$ y $r \cdot s \in \mathbb{Q}$) y se satisfacen todos los axiomas de cuerpo.

Podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$ a partir del orden en $\mathbb{Z}$, de la siguiente manera. Un racional $r = \frac{p}{q}$ es positivo ($r > 0$) si p, q son ambos positivos, o bien $-p, -q$ son ambos positivos.

Dados dos racionales r y s, se dice que $r < s$ si $s - r > 0$. Por otra parte, diremos que $r \leq s$ si $r < s$ o $r = s$. La relación $\leq$ *es una relación de orden*.

En el siglo VI a.c. discípulos de Pitágoras vieron que la longitud de la diagonal del cuadrado de lado unidad no puede expresarse como cociente de enteros,

$$\nexists r \in \mathbb{Q} \quad : \quad r^2 = 2.$$

En efecto. Supóngase que existen $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ -par irreducible- tales que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ $\Rightarrow p^2 = 2q^2, \;\; p^2$ es par. Luego p es un entero par y, por tanto, q ha de ser entero impar. Se puede escribir $p^2 = (2m)^2 = 2q^2$ donde $m \in \mathbb{Z}$, lo cual implica que q es par. Contradicción -ningún entero es par e impar a la vez.

A continuación introducimos otro conjunto de números llamados reales, que denotaremos con $\mathbb{R}$, y que contiene a los números racionales. Los números reales que no pertenecen a $\mathbb{Q}$ se llamarán irracionales.

Ejemplo 1.- Si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = a$, entonces $a = 0$ ó 1.

Ejemplo 2.- Si $a \neq 0, b \neq 0$, entonces $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

Ejemplo 3.- No existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $t^2 = 3$ (ni 6).

Observación 1 *La raíz cuadrada de un número natural es o bien un número natural o bien un número irracional.*

Ejemplo 4.- Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $r \neq 0$ racional, entonces $r + x$ y $r \cdot x$ son irracionales.

Ejemplo 5.- Poned ejemplos de irracionales cuya suma (producto) sea racional.

Cota superior de un conjunto, máximo y supremo

Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número α tal que $x \leq \alpha \quad \forall x \in S$. Entonces se dice que S está *acotado superiormente* por α. Este número se llama una cota superior para S.

Si una cota superior α pertenece también a S, entonces α se llama el elemento máximo de S.

$$\alpha = \max S \quad \text{si } \alpha \in S \text{ y } x \leq \alpha \ \forall x \in S.$$

Un conjunto sin cota superior se dice que es no acotado superiormente.

Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número β que es una cota superior de S y ningún número menor que β es cota superior de S. A este número β le llamamos supremo de S, $\sup S = \beta$

Ejemplo 6.- El conjunto de los número reales positivos ($\mathbb{R}^+$) es no acotado superiormente.

El intervalo cerrado $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x \leq 1\}$ está acotado superiormente por el 1, que es su elemento máximo.

El intervalo semiabierto $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x < 1\}$ está acotado superiormente por el 1, pero no tiene elemento máximo. En cambio, 1 es la menor de las cotas superiores, es el supremo.

Ejemplo 7.- Estudia el supremo en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ del siguiente conjunto. $\{x : x^2 < 2\}$

Observación 2 *Definimos de manera similar cota inferior, mínimo e ínfimo de un conjunto no vacio.*

1.1.2 Definición axiomática de los números reales

En adelante x,y,z representarán números reales cualesquiera. Los axiomas de $\mathbb{R}$ se agrupan de manera natural en tres grupos: cuerpo, orden y continuidad (completitud).

Observación 3 *Una operación binaria en $\mathbb{R}$ asocia un único elemento de $\mathbb{R}$ a cada par ordenado (x, y) de elementos de $\mathbb{R}$.*

Axioma 1 (Propiedad conmutativa)

$$x + y = y + x \qquad xy = yx$$

Axioma 2 (Propiedad asociativa)

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (xy)z = x(yz)$$

Axioma 3 (Propiedad distributiva)

$$x(y + z) = xy + xz$$

Axioma 4 (Existencia de elementos neutro para la suma y el producto) Existencia de dos números reales distintos, que se representan por 0 y 1 tales que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad x1 = 1x = x$$

Axioma 5 (Existencia de negativos) para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$. Se suele representar $y = -x$.

Axioma 6 (Existencia de recíprocos) para cada $x \in \mathbb{R}$ siempre que $x \neq 0$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = yx = 1$. Se suele representar $y = \frac{1}{x}$.

Axioma 7 Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre con $x + y$ y xy.

Axioma 8 Para todo real $x \neq 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$, o $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.

Axioma 9 $0 \notin \mathbb{R}^+$

Axioma 10 (Axioma del supremo) Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee supremo.

1.1.3 Propiedades de los números reales

Teorema 1 *(Ley de simplificación de la suma)*

$$\textit{Si } a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$$

Teorema 2 *(Posibilidad de sustracción) Dados a y b existe uno y sólo un x tal que $a + x = b$. Este x se designa por $b - a$.*

Teorema 3 $b - a = b + (-a)$

Teorema 4 *-(-a)=a*

Teorema 5 *a(b-c)=ab-ac*

Teorema 6 *0a=a0=0*

Teorema 7 *(Ley de simplificación para la multiplicación)*

$$\textit{Si } ab = ac \textit{ y } a \neq 0 \;\Rightarrow b = c$$

Teorema 8 *(Posibilidad de división) Dados a y b con $a \neq 0$ existe uno y solo un x tal que $ax = b$.*

Teorema 9

$$Si\ a \neq 0 \ \Rightarrow \ \frac{b}{a} = ba^{-1}$$

Teorema 10

$$Si\ a \neq 0 \ \Rightarrow \ (a^{-1})^{-1} = a$$

Teorema 11

$$Si\ ab = 0 \ \Rightarrow \ a = 0 \ or \ \ b = 0$$

Teorema 12 *(i)* $(-a)b = -(ab)$

(ii) $(-a)(-b) = ab$

Teorema 13

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad si\ b \neq 0,\ d \neq 0$$

Teorema 14

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad si\ b \neq 0,\ d \neq 0$$

Teorema 15

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad si\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$$

Teorema 16 *(Propiedad de tricomia) Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones*

$$a < b, \qquad b < a, \qquad a = b$$

Teorema 17 *(Propiedad transitiva)*

$$Si\ \ a < b\, y\ \ b < c \ \Rightarrow a < c$$

Teorema 18

$$Si\ \ a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c$$

Teorema 19

$$Si\ \ a < b\, y\ \ c > 0 \Rightarrow \ ac < bc$$

Teorema 20

$$Si\ \ a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

Teorema 21

$$1 > 0$$

Teorema 22

$$Si \;\; a < b \, y \;\; c < 0 \Rightarrow \;\; ac > bc$$

Teorema 23

$$Si \;\; a < b \;\Rightarrow\; -a > -b \;\Rightarrow\; a < 0 \;\Rightarrow\; -a > 0$$

Teorema 24 *Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.*

Teorema 25

$$Si \;\; a < c \, y \;\; b < d \Rightarrow \;\; a + b < c + d$$

Teorema 26 *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.*

Observación 4 *Recordamos la representación de los números reales como la recta real. Se elige un punto para representar el 0, y otro a la derecha del 0 para representar el 1 (queda determinada una escala). La interpretación geométrica de la relación de orden entre números reales: si $x < y$, el punto x está a la izquierda del y. Los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a su izquierda.*

Principio de inducción

Definicion 27 *Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las siguientes propiedades:*

- *El número 1 pertenece al conjunto*
- *para todo x en el conjunto, el número $x + 1$ también pertenece al conjunto*

Ejemplo 8.- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} = \bigcap I$, donde I es un conjunto inductivo cualquiera de números reales.

Observación 5 *Los números naturales no tienen supremo, no están acotado superiormente.*

Proposición 28 *Sea $P(n)$ una propiedad que se cumple para el número n. El principio de inducción afirma que $P(n)$ es verdad para todos los naturales $n \geq n_0$ siendo $n_0 \in \mathbb{N}$ siempre que:*

1. *$P(n_0)$ es verdad (habitualmente $n_0 = 1$)*
2. *si $P(k)$ es verdad , $k \geq n_0$, entonces $P(k + 1)$ también lo es.*

Ejemplo 9.- $n < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 10.- $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ejemplo 11.- $n! > 2^{n-1}$

Ejemplo 12.- $\sum_{k=0}^{n} a_0 r^k = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$

Ejemplo 13.- $\prod_{k=1}^{n} r^k = r^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Ejemplo 14.- $1^2 + 2^2 + \cdot + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdot + n^2$.

Ejemplo 15.- Si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, utilizad el principio de inducción para demostrar:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Teorema 29 *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$*

Teorema 30 *(Propiedad arquimediana) si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$*

Teorema 31 *Si tres números reales a, x e y satisfacen las desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $a = x$

Teorema 32 *(Propiedad de aproximación) Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales:*

(a) Si S tiene un extremo superior entonces para un cierto x de S se tiene

$$x > \sup S - h$$

(b) Si S tiene un extremo inferior entonces para un cierto x de S se tiene

$$x > \inf S + h$$

Teorema 33 *Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto definido por $C = \{a + b : \ a \in A \ b \in B\}$*

(a) *Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior y* $\sup C = \sup A + \sup B$.

(b) *Si A y B poseen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior y* $\inf C = \inf A + \inf B$.

Teorema 34 *(Propiedad de comparación) Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbb{R}$ tales que $s \leq t$ para todo $s \in S$ y para todo $t \in T$. Entonces S tiene extremo superior, T extremo inferior y se verifica que*

$$\sup S \leq \inf T$$

Observación 6 *Números complejos*

- *Definición.*
- *Operaciones. Conjugado.*
- *Representación: binomial, polar.*
- *Raíces. Fórmula de Moivre.*

1.2 Funciones

1.2.1 Definición y ejemplos

Definicion 35 *Una correspondencia f, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que asigna a cada $x \in U$ un único vector $f(x) \in \mathbb{R}^m$ le llamamos función de n variables.*

Llamaremos dominio matemático de *f al conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ para los que $f(x)$ está bien definida. Llamaremos* dominio de *f al conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ sobre el que definimos la función f.*

Ejemplo 16.- $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^n$, $f_2(x) = \text{sen}(x)$, $f_3(x) = \cos(x)$, $f_4(x) = \tan(x)$, $f_5(x) = e^x$, $f_6(x) = \ln(x)$, $f_7(x) = \sinh(x)$, $f_8(x) = \cosh(x)$, $f_9(x) = |x|$ y $f_{10}(x) = \sqrt{x}$.

Observación 7 *Funciones simétricas y periódicas.*

Observación 8 *Una **función vectorial** de n variables y m coordenadas es una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Puede expresarse mediante sus componentes,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

donde cada $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar con igual dominio que f.

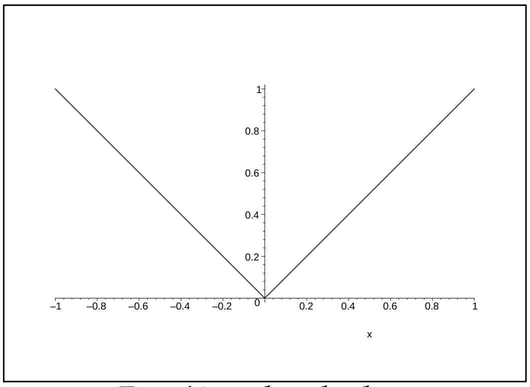
Ejemplo 17.- $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (t\cos(t), t\text{sen}(t), t)$

Ejemplo 18.- $f_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = \ln(x+y)$, $f_2(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2}$, $f_3(x,y) = \ln(\cos(xy)+2)$

Ejemplo 19.- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (\text{sen}(x^2-y)e^y, x^2y, 2xe^y)$

Ejemplo 20.- La función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si}, x \geq 0 \\ -x & \text{si}, x < 0 \end{cases}$$



Función valor absoluto

Propiedades

1. $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ($|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$)
2. $|x| < M,\ M > 0 \Leftrightarrow -M < x < M$ o bien $|x| \leq M,\ M > 0 \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$
4. $|xy| = |x||y|$
5. Si $y \neq 0$ entonces $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
6. $|-x| = |x|$
7. $|x-y| = |y-x|$
8. $|x|^2 = x^2$
9. $|x| = \sqrt{x^2}$
10. $|x-y| \leq |x| + |y|$

11. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

12. $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

Observación 9 *El intervalo centrado en x_0 y de longitud r vendrá dado por $|x - x_0| < r$. De manera similar podemos definir en $\mathbb{R}^n$ la bola de radio r y centro x_0: sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y r un número real positivo, definimos $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$.*

Decimos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si para cualquier $x_0 \in U$ existe algún $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset U$.

Ejemplo 21.- Si $n = 1,\ B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$, intervalo.

Ejemplo 22.- Si $n = 2,\ B_r(x_0, y_0) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, disco

Ejemplo 23.- Si $n = 3,\ B_r(x_0, y_0, z_0) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x - z_0)^2 < r^2$, esfera

Ejemplo 24.- Una bola es un conjunto abierto; también lo son $\{(x, y) \mid x > 0\}$ y $\{(x, y) \mid x > y^2\}$

Observación 10 *Definición de conjunto cerrado y punto frontera.*

Ejemplo 25.- Sea la función $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{[x]}$. Se considera el conjunto *imagen de f*. ¿Es abierto? ¿Es acotado? ¿Cuál es su frontera?

Se tiene que el conjunto imagen $f(-\infty, 0) = \{-1, -1/2, -1/3, \ldots, -1/n, \ldots\}$; es acotado, no es abierto (no tiene puntos interiores) y todos sus puntos son frontera además del 0.

Observación 11 *Recordamos las operaciones con funciones: suma, diferencia, producto, división*

Ejemplo 26.- Un **polinomio** es una función escalar definida por las siguientes operaciones entre las variables: sumas, productos. La función $p(x, y, z) = -x^5yz + y^3z^2 + 2x - 3y - 7$ es un polinomio; y no lo son $x^2y^{-3},\ x^4 - 3\sqrt{y},\ \frac{x+y}{x-y^2}$.

1.2.2 Gráficas, curvas y superficies

Definicion 36 *Sea f una función, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, llamaremos* imagen de f *al conjunto de valores que toma la función en $\mathbb{R}^m$.*

Definimos la gráfica de f *como el conjunto $\{(x, f(x)) : x \in U \subset \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$*

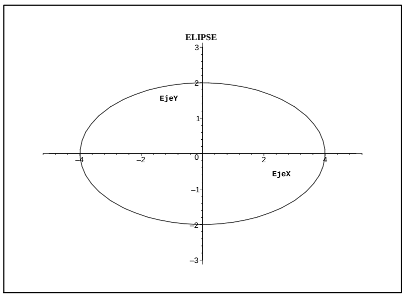
Ejemplo 27.- Estudia imagen y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$.

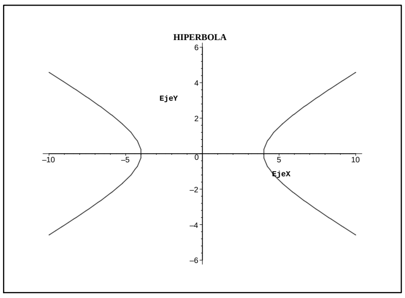
Ejemplo 28.- La siguiente función $c(c_0, r, t) = c_0(1+r)^t$ representa el crecimiento de una determinada población donde c_0 es la población inicial, r la tasa de crecimiento, y t es el tiempo. Estudia el dominio de ésta función y compáralo con el dominio matemático.

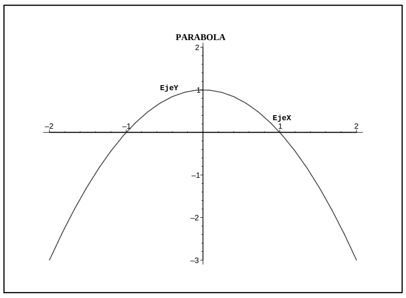
Ejemplo 29.- Estudia el dominio de las funciones de los ejemplos anteriores.

Observación 12 *Para $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su gráfica está definida por $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \in U\}$ curva en el plano.*

No todas las curvas del plano son la gráfica de una función. Son especialmente importante las **curvas de segundo grado***.*

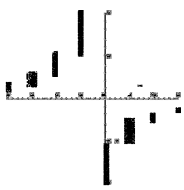


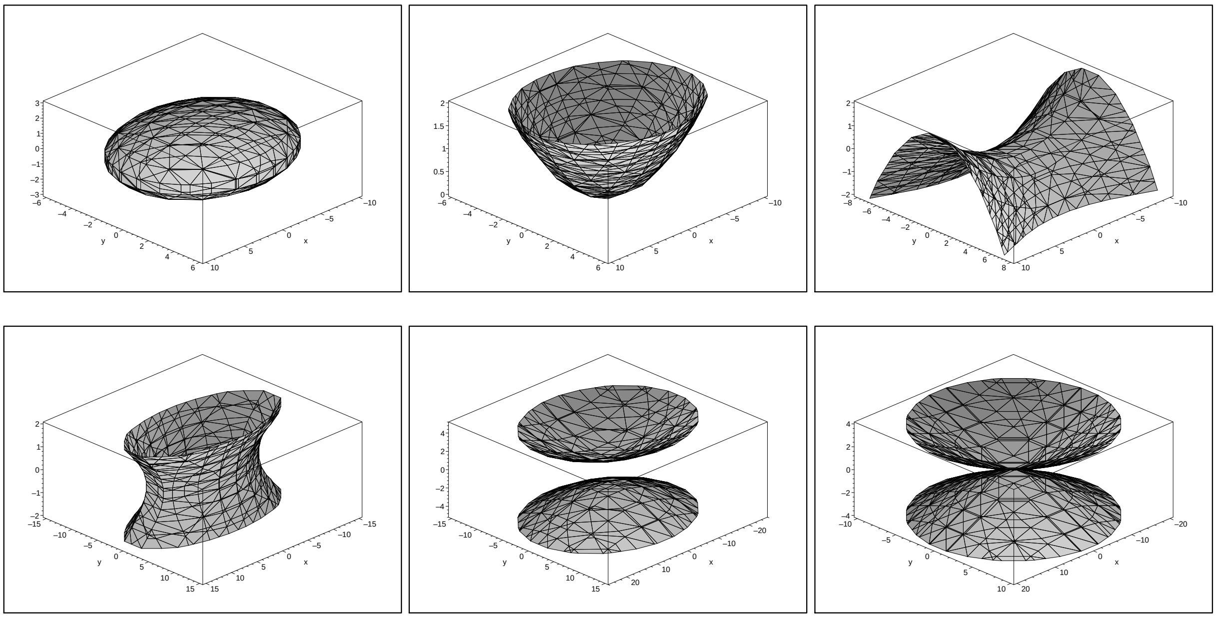




Observación 13 *Para $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ su gráfica está definida por $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x \in D\}$ superficie en el espacio tridimensional.*

No todas la s superficies en $\mathbb{R}^3$ son gráficas de funciones de dos variables como por ejemplo las **Superficies de segundo grado***. En la siguiente figura observamos un elipsoide, un paraboloide, paraboloide hiperbólico, un hiperboloide de 1 hoja, un hiperboloide de 2 hojas y un cono elíptico. Observar sus secciones y curvas de nivel.*





Observación 14 *Test de la línea vertical*

Definicion 37 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Se define el conjunto de nivel para f de valor c como*

$$L_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si $n = 2$ hablamos de curva de nivel, y si $n = 3$ de superficie de nivel.
Llamaremos sección de la gráfica de f a la intersección de la gráfica con un plano. Estudiaremos especialmente los cortes con los planos coordenados.

Ejemplo 30.- En meteorología, las líneas isobaras son los conjuntos de nivel de la función presión atmosférica. Otro ejemplo lo tenemos en los mapas topográficos, definidos por los conjuntos de nivel de la función altitud de una región dada.

Ejemplo 31.- Utiliza Maple para dibujar el gráfico de la función $f(x, y) = \text{sen}(x)\text{sen}(y^2 - x)$ donde $x, y \in (-2, 2)$, así como su representación mediante un mapa de curvas de nivel.

Ejemplo 32.- La función $f(x, y) = x + y + 2$ tiene como curva de nivel $c \in \mathbb{R}$ la recta $L_c = \{(x, y) \mid x + y = c - 2\} \subset \mathbb{R}^2$. La gráfica es el plano inclinado $z = x + y + 2$.

Ejemplo 33.- Para $f(x, y) = x^2 + y^2$, la curva de nivel $c \geq 0$, $L_c = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c\} \subset \mathbb{R}^2$, es una circunferencia de radio $\sqrt{c}$ con centro el origen si $c > 0$ y el origen si $c = 0$. La gráfica es el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ orientado hacia arriba desde el origen y alrededor del eje z.

Ejemplo 34.- Para $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, la superficie de nivel $c \geq 0$, $L_c \equiv x^2+y^2+z^2 = c \subset \mathbb{R}^3$ es una esfera de radio $\sqrt{c}$ con centro el origen si $c > 0$ y el origen si $c = 0$.

Ejemplo 35.- La sección de la gráfica de f, $f(x,y) = x^2 + y^2$ por el plano xz es el conjunto $\{(x,y,z) \mid y = 0, z = x^2\}$, que es una parábola en el plano xz.

Ejemplo 36.- Dibuja la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$. Se llama paraboloide hiperbólico con centro en el origen.

Ejercicio 1.- Plantea ecuaciones que definan las superficies de segundo grado en $\mathbb{R}^3$ estudiando sus secciones.

1.2.3 Composición e inversas

Definicion 38 *Composición de funciones. Inversa de una función.*

Ejemplo 37.- $x \longmapsto x^2 = y \longmapsto sen(x^2)$

Ejemplo 38.- Sean las funciones $P, E, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $P(x) = x^2, E(x) = 2^x$ y $S(x) = \text{sen}x$. Se pide

1. Determinar $(P \circ E)(y)$, $(P \circ S)(z)$, $P(u^3) - S(u^2)$, $(P \circ E \circ S)(t) + (S \circ E)(t)$.
2. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de P, E y S utilizando $\circ$: $f(x) = 2^{\text{sen}x}$, $g(x) = \text{sen}2^x$, $h(x) = \text{sen}x^2$, $l(x) = \text{sen}^2(2^{2^x})$.

Ejemplo 39.- Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$. Llamemos g a la inversa de f. Describe el dominio de g y expresa, mediante fórmulas, $g(y)$ para cada y de su dominio.

La función f es continua y creciente estrictamente, pues $1 \leq x < y \Rightarrow x^2 < y^2$, y si $0 \leq x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$. Dado que f no es acotada, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, y por tanto el dominio de su inversa $g = f^{-1}$ es $\mathbb{R}$. Se tiene $g(y) = \begin{cases} y & \text{si } y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 1 \leq y \leq 16 \\ (y/8)^2 & \text{si } y > 16. \end{cases}$

1.3 Sucesiones y series numéricas

1.3.1 Sucesiones: convergencia y propiedades

Definicion 39 *Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio son los* $\mathbb{N}$.

Ejemplo 40.- $\{1/n\}$, $\{n\}$, $\{n^2\}$, etc. Sucesión de los naturales pares $\{2n\}$, naturales impares $\{2n-1\}$, sucesión alternada $\{(-1)^n\}$. Represéntalas y comenta sus características.

Observación 15 *Algebra de sucesiones: suma, producto por un escalar, producto y cociente.*

Definicion 40 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que converge a* l

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a* $+\infty$ *si* $\forall k \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, x_n > k\ \forall n \geq N$.
Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a* $-\infty$ *si* $\forall k \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, x_n < k\ \forall n \geq N$.

Nota.- Todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ salvo a lo sumo un número finito de ellos.

Teorema 41 *(Una sucesión convergente tiene un único límite). Si* $\{a_n\}$ *converge a* l *y a* m*, entonces* $l = m$.

Supongamos que $l < m$. Tomamos $\epsilon = \frac{m-l}{2} > 0$ en la definición de $a_n \longrightarrow l$. Existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in \left(l - \frac{m-l}{2}, l + \frac{m-l}{2}\right)\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n > N$. Por tanto, en el intervalo $\left(m - \frac{m-l}{2}, m + \frac{m-l}{2}\right)$ existe a lo sumo un número finito de términos de la sucesión (intervalos disjuntos). Entonces $\{a_n\}$ no podrá converger a m. Contradicción. Análogamente si $l > m$.

Observación 16 *Sucesiones oscilantes.*

Ejemplo 41.- Comprobar que la sucesión $(-1)^n$ diverge (no converge a 1 –los términos impares no están lo suficientemente próximos– ni a -1, ni a cualquier otro número real). También es divergente $\{\log n\}$.

Ejemplo 42.- Dados varios valores para ϵ, calcular el N a partir del cual los términos de las siguientes sucesiones distan del límite menos que ϵ.
$\{1/n\}$, $\epsilon = 10^{-1}$, $N = 10$
$\{1/2^n\}$, $\epsilon = 10^{-2}$, $N = 6$; $\epsilon = 10^{-4}$, $N = 13$

Ejemplo 43.- Calcula el límite de las siguientes sucesiones, y dado un ϵ genérico calcula el n_0 asociado en la definición.

$$\{1/\sqrt{n}\}, \quad \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \quad \left\{\frac{1}{2^{3n}}\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

Teorema 42 *Toda sucesión convergente está acotada.*

La sucesión de los naturales es no convergente por no estar acotada. ¿El recíproco es cierto?

Sea $a_n \longrightarrow l$. Tenemos que probar que está acotada. Por definición, dado $\epsilon = 1 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (l-1, l+1) \quad \forall n > N$. Se tiene que $a = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, l-1\}$ es una cota inferior de la sucesión y $b = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, l+1\}$ es una cota superior.
Álgebra de límites. Si $a_n \to l$, $b_n \to m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $a_n + b_n \to l + m, \quad \lambda \cdot a_n \to \lambda l$, $a_n \cdot b_n \to lm$ y si $m \neq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{m}$.

Demostremos que $a_n + b_n \to l + m$. Sea $\epsilon > 0$. Tomando $\epsilon/2$ en la definición de convergencia de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, sabemos que existen $n_1(\epsilon/2), n_2(\epsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon/2 \quad \forall n > n_1$ y $|b_n - m| < \epsilon/2 \quad \forall n > n_2$. Definiendo $n_0(\epsilon) = \max\{n_1, n_2\}$, se verifica que $|(a_n + b_n) - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \epsilon \quad \forall n > n_0$.

Ejemplo 44.- La suma (producto) puede converger, y aún así alguna de ellas no converge.

Ejemplo 45.- Comprobar que $\{\text{sen}(n)\}$ no tiene límite y que $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$.

Sucesiones monótonas

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es creciente si $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si el menor es estricto, se llama *estrictamente creciente*.

Sucesiones acotadas

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada superiormente si $\exists \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se dice que está acotada si lo está superior e inferiormente.

$\{a_n\}$ está acotada $\Longleftrightarrow \exists M > 0$ tal que $|a_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ver con ejemplos que la gráfica de una sucesión acotada está contenida en la banda $(-M, M) \times \mathbb{R}$.

Teorema 43 *Toda sucesión $\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente es convergente. Además el límite es* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nota 1.- Una cota inferior es a_1. Por el axioma de completitud existe $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nota 2.- Extender teorema a sucesiones decrecientes y acotadas inferiormente.

Sea $b = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\epsilon > 0$ (dato) queremos encontrar $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - b| < \epsilon \, \forall n \geq n_0$. Por definición de supremo $b - \epsilon$ no es cota superior del conjunto de términos de la sucesión, y existirá a_{n_0} tal que $b - \epsilon < a_p$. Utilizando la monotonía se tiene $b - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq b < b + \epsilon \quad \forall n > n_0$.

Ejemplo 46.- El número e. La sucesión $a_n = lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada. Su límite representa el número irracional 2.7182... que representamos con la letra e.

Nota 3.- Toda sucesión creciente y no acotada superiormente tiende a $+\infty$. (Extender a sucesiones decrecientes)

Convergencia no implica monotonía (armónica alterna).

Teorema 44 (El teorema del Sandwich) *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ a partir de un cierto índice y $\lim a_n = limc_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $\lim b_n = l$.*

Si $\{a_n\}$ es convergente a 0 y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\lim a_n b_n = 0$.

Ejemplo 47.- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$.

Aplicamos el teorema de sandwich. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\underbrace{\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}}_{\frac{n^2}{n^2+n}} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \underbrace{\frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}}_{\frac{n^2}{n^2}}.$$

El límite pedido vale 1.

Ejemplo 48.- Utilizando la desigualdad $\log x < x$ demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ y comprobar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Se tiene que $\frac{\log n}{n} < 1$, acotación que no sirve. Utilizando propiedades del logaritmo escribimos

$$0 \leq \frac{\log n}{n} = \frac{\log \sqrt{n}^2}{n} = \frac{\log \sqrt{n}}{2n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Por el teorema de sandwich se tiene que el primer límite vale 0.

Para el segundo,

$$\frac{\log n}{n} = \log n^{1/n} = \log \sqrt[n]{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \longrightarrow e^0 = 1.$$

Este límite se puede demostrar utilizando la fórmula del *binomio de Newton*.

Ejemplo 49.- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ donde $a > 0$.

Utilizando que $a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b\log a}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} e^{\log \sqrt[n]{a}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\log a}{n}} = e^0 = 1.$$

Ejemplo 50.- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = 1$.

Dividiendo por $\sqrt{n}$ se tiene, $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1/n+\sqrt{1/n^3}}}} \longrightarrow 1$.

Ejemplo 51.- Si $a_n \to l \Rightarrow |a_n| \to |l|$. El recíproco es falso en general. ¿Qué ocurre si $l = 0$?

Ejemplo 52.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales no negativos que converge a l. Entonces $\{\sqrt{a_n}\}$ converge a $\sqrt{l}$.

Si $l = 0$, dado $\epsilon > 0$ tomando $n_0(\epsilon^2)$ en la definición de $a_n \longrightarrow l$ se tiene.
Si $l > 0$, escribimos $\sqrt{a_n} - \sqrt{l} = \frac{a_n - l}{\sqrt{a_n}+\sqrt{l}}$. Dado que $\sqrt{a_n} + \sqrt{l} \geq \sqrt{l} > 0$, se sigue $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}\right| \leq \frac{|a_n - l|}{\sqrt{l}}$.

Observación 17 *Indeterminaciones.*

Observación 18 *Algunos límites interesantes:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \ \alpha > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x^n = 0,\ |x| < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0\ \forall a > 0\ \forall b > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Observación 19 • *Definición de subsucesión.*

- *Toda subsucesión de una sucesión convergente, converge al mismo número.*
- *Definición de sucesiones de Cauchy.*
- *Convergente si y solo si de Cauchy. (Cauchy entonces acotada, si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge entonces la sucesión converge)*

1.3.2 Series. Series geométricas

Ejemplo 53.- Series geométricas Sea la progresión geométrica $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$. En general, hemos probado que la suma s_n de los n primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a \neq 0$ y razón r se puede escribir:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r)^n}{1-r}.$$

Si $|r| < 1$, entonces

$$\exists \lim s_n = a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}.$$

En el caso de la progresión geométrica de razón $1/2$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Se dice que la *serie numérica asociada a* $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ *es convergente y su suma es 2*, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$.

Ejemplo 54.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}}$. Dado que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/3\ \forall n$, la serie es geométrica de razón $1/3$ y primer término $1/27$. Su suma es $1/18$.

Ejemplo 55.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$ es una serie geométrica de razón $-1/5$ y primer término 1; su suma es $5/6$.

Ejemplo 56.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{7^n}$ es una serie geométrica de razón $8/7$ y, por tanto, divergente.

Ejemplo 57.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Probad que entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

En efecto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \underbrace{l + \frac{1-l}{2}}_{r<1} \quad \forall n \geq n_0.$$

Por tanto, $0 < a_{n+1} < r \cdot a_n < r^2 \cdot a_{n-1} < \cdots < r^{n-n_0+1} \cdot a_{n_0} = r^n \cdot r^{-n_0+1} a_{n_0} \longrightarrow 0$ porque $0 < r < 1$.

Por ejemplo, aplíquese a la sucesión $\{n/2^n\}$.

Definicion 45 *Dada a_n una sucesión de números reales, podemos definir otra sucesión $s_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ que se denomina sucesión de sumas parciales de la sucesión a_n.*
Si existe el límite $s \in \mathbb{R}$ de la sucesión de sumas parciales,

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

se dice que la serie numérica asociada a a_n, y que se denota por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, converge y su suma es s. En este caso se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. En otro caso se dice que la serie es divergente.

Observación 20 *Operaciones con series.*

Proposición 46 *Criterio de Cauchy de convergencia.*

Proposición 47 (Condición del resto de Cauchy.) *Una condición necesaria para la convergencia: Si una serie es convergente, entonces su término general $a_n \to 0$.*

Ejemplo 58.- La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.
Dado que la sucesión de las sumas parciales es creciente, es suficiente probar que alguna subsucesión no está acotada. Consideremos s_{2^n},

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + n\frac{1}{2} \end{aligned}$$

se tiene que tiende a $+\infty$.

Observación 21 *La serie p-armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p > 0)$ es convergente si $p > 1$, y divergente si $0 < p \leq 1$.*

Estas series permiten estudiar el carácter de otras muchas utilizando criterios de comparación.

Proposición 48 (Criterio de comparación) .

Ejemplo 59.- Dado que $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y que la serie geométrica de razón $1/2$ es convergente, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ también converge.

Ejemplo 60.- Se tiene que

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + 1/2 + 1/3! + 1/4! + \cdots .$$

Por tanto, una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{n!}$ donde p es un polinomio es n convergente.

Ejemplo 61.- Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas y calcular, si es posible, su suma.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$
   Comparamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{n-1}{n^2+2}\right)$ con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+2}$, que tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Por tanto diverge.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$
   El término general se puede escribir,
   $$\frac{3^n + n^2 + n}{3^{n+1}n(n+1)} = \frac{3^n}{3^{n+1}n(n+1)} + \frac{n(n+1)}{3^{n+1}n(n+1)} = \frac{1}{3n(n+1)} + \frac{1}{3^{n+1}}.$$
   Nuestra serie es suma de una serie telescópica y otra geométrica, ambas convergentes.
   $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} &= \frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}} = 1/6 \end{aligned}$$
   La suma pedida es $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
3. $1 - 1/2 + 1/3 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/2^3 + 1/3^3 + \cdots$
   Puede descomponerse en suma dos series geométricas convergentes,
   $$(1 + 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \cdots) - (1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots) = 3/2 - 1 = 1/2.$$

Ejemplo 62.- Series telescópicas Su término general se puede escribir como la diferencia de dos términos consecutivos de una sucesión dada, de manera que en las sumas parciales se simplifican los términos intermedios.

Sea $\{b_n\}$ una sucesión, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ se denomina telescópica y es convergente si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge (a l). En tal caso

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - l.$$

Ejemplo 63.- $\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} = -\sum_{n=2}^{\infty}(\log n - \log(n+1))$ es divergente.

Ejemplo 64.- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)}$.

Utilizamos la *descomposición de una función racional (cociente de polinomios) en fracciones simples*.

$$5 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = 5 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+4}\right) = 1$$

Observación 22 *Teorema del punto fijo.*

1.4 Modelos matemáticos

Un *modelo matemático* de una ley física o de un fenómeno es una descripción de esa ley o fenómeno en lenguaje matemático.

Uno de los primeros pasos para crear un modelo matemático consiste en decidir qué factores tenemos en cuenta y cuales ignoramos. Cuantos más factores tengamos en cuenta, más complicado de resolver. Hay que intentar que sea lo más simple posible pero a la vez tiene que estar en concordancia con lo que quiere modelizar, si no hay que descartarlo.

Vamos a pensar en modelos en los que tomemos pares de datos. También se pueden hacer en más dimensiones.

Podemos pensar en dos tipos de modelos: *deterministas* y *probabilísticos*.

Dentro de los modelos deterministas algunos tipos de modelos son lineales, cuadráticos, trigonométricos, polinómicos.

Recta de regresión.

Interpolación lineal.

Polinomios de Lagrange.

1.5 Problemas propuestos

Problema 2.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll}(x^2-y^2)\log(xy) & =0\\ (xy)^2-3xy+2 & =0\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll}(x^2-y^2)\log(xy) & =0\\ (xy)^{x^2-y^2} & =0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(x^2-y^2)\log(xy) & =0\\ (xy)^{x^2-y^2} & =1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll}3(x+y)^2-3x^2y^3 & =0\\ 3(x+y)^2-3x^3y^2 & =0\end{array}\right\}$$

Problema 3.- Hallar todos los valores reales de p para los cuales las raíces de la ecuación

$$(p-3)x^2-2px+6p=0$$

son reales y positivas.

Problema 4.- Demuestra por inducción $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Problema 5.- Idem $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Problema 6.- Idem $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$

Problema 7.- Determinad los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(1) $\{x\in\mathbb{R}: 4-x<3-2x\}$ (2) $\{x\in\mathbb{R}: \frac{1}{x}<x\}$ (3) $\{x\in\mathbb{R}: 2x-x^2-2>0\}$
(4) $\{x\in\mathbb{R}: \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0\}$ (5) $\{x\in\mathbb{R}: \frac{x-1}{x+1}>0\}$ (6) $\{x\in\mathbb{R}: |x-1|\cdot|x+2|=3\}$
(7) $\{x\in\mathbb{R}: \frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x-2}\}$ (8) $\{x\in\mathbb{R}: |x-1|\cdot|x+1|=0\}$ (9)$\{x\in\mathbb{R}: |\frac{x+5}{2-x}|=6\}$

Problema 8.- Probad que si $x,y\in\mathbb{R}$ se satisface:

$$\max(x,y)=\frac{x+y+|y-x|}{2}; \qquad \min(x,y)=\frac{x+y-|y-x|}{2} \quad .$$

Problema 9.- Progresión geométrica. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas relativas a la suma y el producto de los términos de una progresión geométrica con razón $r\neq 1$:

$$(a)\sum_{i=1}^{n} r^i=\frac{r-r^{n+1}}{1-r}$$

$$(b)\prod_{i=1}^{n} r^i=r^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Problema 10.- Binomio de Newton. a) Sean $a,b\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$. Probar que

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

b) Encontrar una fórmula para $(a-b)^n$.

Problema 11.- Halla el dominio de las siguientes funciones: $f(x) = L|\sqrt{\frac{x^2-2}{x+1}}|$, y $g(x) = L[(x-3)(x-2)(x+2)]$

Problema 12.- Determinad a partir de qué término los elementos de las sucesiones

$$\left\{\frac{(-1)^n + n}{1+n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad \left\{\frac{2n + \cos(n\frac{\pi}{2})}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

difieren de su límite menos de $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0'1$ y $\epsilon = 0'01$.

Problema 13.- Comprobar que

$$(a) lim (2n)^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (b) lim \frac{n^2}{n!} = 0 \qquad (c) lim \frac{2^n}{n!} = 0$$

Indicación: si $n \geq 3 \Rightarrow 0 < \frac{2^n}{n!} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

Problema 14.- Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} \qquad (b) \lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(c) \lim_{n\to\infty} \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\sum_{k=1}^{n} k} \qquad (d) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2}} \qquad (e) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}$$

Problema 15.- Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$
3. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = a \neq 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = a$ ó $\lim_{n\to\infty} x_n = -a$

Problema 16.- Sea $\{a_n\}$ la sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, con $n \geq 1$. Demostrar que $\{a_n\}$ es convergente.

Problema 17.- Consideremos la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por la siguiente fórmula:

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 2\,, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrad que es convergente y calculad su límite.

Capítulo 2

Cálculo diferencial en una variable

2.1 Límites y continuidad de funciones reales de variable real

2.1.1 Límites

Observación 23 *Idea de límite. Posibilidades.*

Definicion 49 *El límite de f es l cuando x tiende a a si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \,/\, si\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

Ejemplo 65.- $\lim_{x\to x_0} x = x_0$
Ejemplo 66.- $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$
Ejemplo 67.- Demuestra utilizando la definición $\epsilon - \delta$ de límite la existencia o no de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, donde

$$(i)\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad (ii)\ f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 68.- Comprueba, utilizando la asignación $\epsilon \rightsquigarrow \delta$, que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\cos^2 x} = 0.$

En efecto, $\left|\frac{x}{1+\cos^2 x}\right| = \frac{|x|}{1+\cos^2 x} \leq |x|$ puesto que $1+\cos^2 x \geq 1.$ Tomando $\delta = \epsilon$ en la definición de límite se tiene.

Proposición 50 *El límite de una función si existe es único.*

Lema 51 *Sean $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$*

1. *Si* $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ *y* $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, *entonces* $|(x+y) - (x_0+y_0)| < \varepsilon$
2. *Si* $|x - x_0| < \min(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)})$ *y* $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)})$ *entonces* $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$
3. *Si* $|y - y_0| < \min(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2})$ *entonces* $y \neq 0$ *y* $|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}| < \varepsilon$

Proposición 52 *Sean f y g dos funciones tales que* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = m$, *entonces:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + m$
2. $\lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(fg)(x) = lm$
3. *Si* $m \neq 0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$

Observación 24

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \forall\{x_n\} \subset D(f),\ x_n \neq a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

Ejemplo 69.-

$$(i)\ \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h},\quad (ii)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1,\quad (iii)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x},\quad (iv)\ \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$$

Ejemplo 70.- Comprueba, utilizando la asignación $\epsilon \rightsquigarrow \delta$, los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|} = 0,\quad \lim_{x\to a} x^2 = a^2.$$

En efecto, $|x^2 - a^2| = |x-a|\,|x+a| \leq |x-a|\,(|x|+|a|) \leq |x-a|\,(1+2|a|)$ por las desigualdades triangular y $|x| - |a| \leq |x+a| < 1$ ($|x+a|$ está acotado dado que $x \to a$). Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta \leq \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ se tiene.

Ejemplo 71.- Utilizando que $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x} = 1$, calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}5x}{\text{sen}x}$.

Se puede escribir $\frac{\text{sen}5x}{\text{sen}x} = 5\frac{\text{sen}5x/5x}{\text{sen}x/x} \longrightarrow_{x\to 0} = 5.$

Ejemplo 72.- $\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{\gamma}2x}{\text{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\text{sen}x\cos x}{\cos 2x\,\text{sen}x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 2x} = 2.$

Proposición 53 1. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = l,\ \lim_{x\to a} g(x) = m$, *entonces* $l \leq m$

2. *Si* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$, *entonces* $\lim_{x\to a} h(x) = l$

3. *Si* $f(x)$ *esta acotada en* $0 < |x-a| < \delta$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*, entonces* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

Definicion 54 *Límite por la derecha*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0 \;/\; si\;\; 0 < x - a < \delta \;\Rightarrow\; f(x) - l < \varepsilon$$

Límite por la izquierda

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0 \;/\; si\;\; 0 < a - x < \delta \;\Rightarrow\; l - f(x) < \varepsilon$$

Observación 25

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \exists \lim_{x\to a^+} f(x),\; \exists \lim_{x\to a^-} f(x),\; \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

Definicion 55 *Límites en el infinito*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists k \in \mathbb{R} \;/\; |f(x) - l| < \varepsilon,\; \forall x > k$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists k \in \mathbb{R} \;/\; |f(x) - l| < \varepsilon,\; \forall x < k$$

Ejemplo 73.- $\lim\limits_{x\to\infty} x\text{sen}x$.

Para probar que no existe este límite, consideremos la sucesión $\{x_n\} = \{(2n-1)\pi/2\}$ que tiende a infinito y, sin embargo, la sucesión de las imágenes no tiene límite,

$$f(x_n) = (2n-1)\pi/2\text{sen}\,((2n-1)\pi/2) = (-1)^n(2n-1)\pi/2.$$

Ejemplo 74.- $\lim\limits_{x\to\infty} x\text{sen}\dfrac{1}{x}$.

Como $\frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $sen\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ cuando $x \to \infty$. Se tiene $x\text{sen}\frac{1}{x} = \frac{\text{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Haciendo el *cambio de variable* $y = 1/x$, el límite anterior vale $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\text{sen}y}{y} = 1$.

Ejemplo 75.- $\lim\limits_{x\to\infty} x\text{sen}\dfrac{1}{x^2}$.

Equivale al límite $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\text{sen}y^2}{y} = \lim\limits_{y\to 0} y\dfrac{\text{sen}y^2}{y^2} = 0\cdot 1 = 0$.

Definicion 56 *Límite infinito*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\; \exists\delta > 0 \;/\; si\;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > k$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\; \exists\delta > 0 \;/\; si\;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < k$$

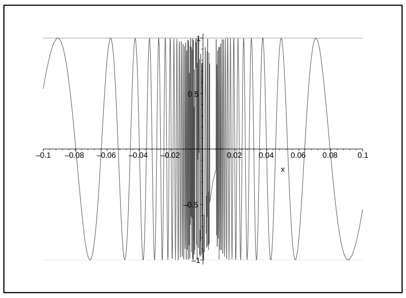
Observación 26 *Las propiedades para estos tipos de límites son similares a los que se vieron anteriormente.*

2.1.2 Funciones continuas

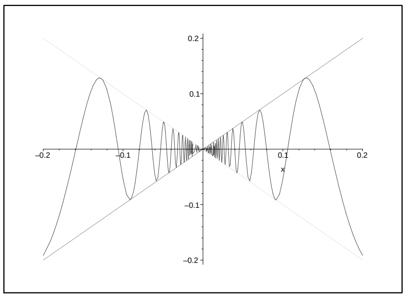
Definicion 57 *Decimos que una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua en el punto* a, $a \in D$ *si* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Observación 27 *Ahora en la definición de límite tendremos* $|x-a| < \delta$ *en vez de* $0 < |x-a| < \delta$.

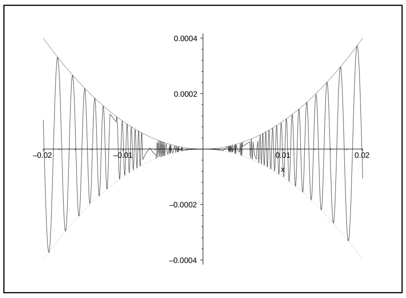
Ejemplo 76.- $f(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$



Ejemplo 77.- $f(x) = x\text{sen}\frac{1}{x}$



Ejemplo 78.- $f(x) = x^2\text{sen}\frac{1}{x}$



Observación 28 *Tipos de discontinuidades: Discontinuidad evitable, discontinuidad de salto y discontinuidad esencial. Ejemplos.*

Proposición 58 *Si f, g son funciones continuas en a, entonces $f+g$, es continua en a, fg es continua en a y si $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{1}{g}$ es continua en a.*

Proposición 59 *Sea f una función continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Ejemplo 79.- Estudiemos la continuidad de las siguientes funciones:

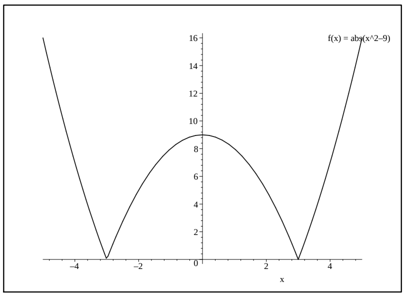
1. La función $f(x) = x\text{sen}(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser producto de funciones continuas.

   Nota: $-x \leq x\text{sen}(x) \leq x$.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 16 & \text{si } x = 3. \end{cases}$

   Se tiene $\lim\limits_{x->3} f(x) = \lim\limits_{x->3}(x+3) = 6 \neq f(3)$. Por tanto es una función continua salvo en $x = 3$, donde presenta una discontinuidad evitable.

3. $f(x) = \begin{cases} |x^2-9| & \text{si } x \leq 3 \\ x & \text{si } x > 3. \end{cases}$

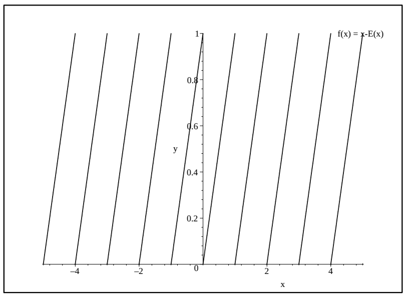
   Se trata de una función continua salvo en $x = 3$, donde tiene una discontinuidad de salto $\lim\limits_{x->3^+} f(x) - \lim\limits_{x->3^-} f(x) = 3 - 0 = 3$

4. $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

5. $f(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}\frac{1}{x^3} + \text{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   Se trata de una función continua salvo en $x = 0$ porque no existe el límite $\lim\limits_{x->0} f(x)$.

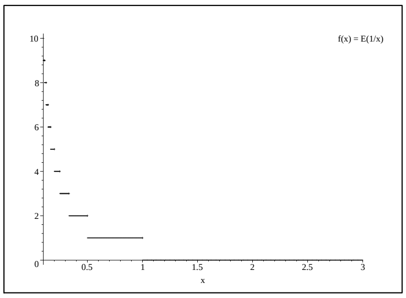
6. $f(x) = x - [x]$ si $x \in \mathbb{R}$.



Nota: Recordemos que la parte entera de un número x es el mayor entero $\leq$ a ese número. $[2'6] = 2$ y $[-8'1] = -9$.

Dado $n \in \mathbb{Z}$, si $x \in [n, n+1)$ se tiene $f(x) = x - n$ –recta con pendiente 1 que pasa por el punto $(n, 0)$. La función f es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ porque en cada intervalo $(n, n+1)$ es un polinomio y $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n} x - n = 0 \neq \lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n} x - (n-1) = 1$.

7. $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ si $x \neq 0$.



Si $x \geq 1 \Rightarrow 0 < 1/x \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

Si $x \leq -1 \Rightarrow -1 \leq 1/x < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$.

Si $x \in (0, 1) \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ para algún $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = n$.

Si $x \in (-1, 0) \Rightarrow x \in \left(\frac{-1}{n}, \frac{-1}{n+1}\right]$ para algún $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -(n+1)$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1/n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Nótese que en cada punto $x = 1/n$ para $n \in \mathbb{Z}$, la discontinuidad es de salto 1. Por otra parte, no es posible definir f en $x = 0$ de manera que la función sea continua –no existe límite en dicho punto.

8. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$

Es un ejemplo de función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no es continua en ningún punto, dada la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

9. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$

   Es una función continua en un único punto. Para probar la continuidad en $a = 0$ es suficiente tomar $\delta = \epsilon$ en la definición del límite $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

   Por otra parte, dado cualquier $a \neq 0$ podemos encontrar alguna sucesión $\{x_n\}$ que converja al punto a y en cambio la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converja a $f(a)$. Por ejemplo, si $a = 1$, la sucesión $\{x_n\} = \left\{1, \sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{3}, 1, \sqrt[4]{4}, \ldots\right\} \to 1$ y, en cambio, $\{f(x_n)\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \ldots\} \not\to$.

Ejemplo 80.- La función $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en cualquier $x \neq 0$ por ser composición de funciones continuas, $x \neq 0 \longrightarrow 1/x \longrightarrow \text{sen}\frac{1}{x}$. En cambio, $\nexists \lim_{x \to 0} \text{sen}\frac{1}{x}$.
En efecto, dado cualquier $\delta > 0$ siempre se pueden encontrar puntos x_1 y x_2 que disten de 0 menos que δ y tal que $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, con lo cual eligiendo un $\epsilon < 1$ no se verifica la definición de límite para $\lim_{x \to 0} \text{sen}\frac{1}{x} = 0$. Se tiene tomando $x_1 = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$ y $x_2 = \frac{1}{3\pi/2 + 2k\pi}$ para un natural k suficientemente grande de manera que $|x_1| < \delta$ y $|x_2| < \delta$.

Definicion 60 *Continuidad en un intervalo abierto:*
Decimos que f es continua en (a, b) si f es continua $\forall x \in (a, b)$.
Continuidad en un intervalo cerrado:
Decimos que f es continua en $[a, b]$ si f es continua $\forall x \in (a, b)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Proposición 61 1. *Sea f continua en a y $f(a) > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todos los x en $|x - a| < \delta$*

2. *Sea f continua en a y $f(a) < 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todos los x en $|x - a| < \delta$*

Proposición 62 *El operador límite conmuta con funciones continuas:*
Sean f, g tales que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y g es continua en l, entonces:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(l)$$

Ejemplo 81.- $\lim_{x\to 1} \arcsin(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x})$

Teorema 63 Teorema de Bolzano *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún $x \in (a, b))$ tal que $f(x) = 0$*

Aplicación fundamental del Teorema de Bolzano
Búsqueda de solución de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$

Ejemplo 82.- Pruébese que la ecuación $3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$ posee tres raíces reales distintas. Calcularlas con un error menor que 0′01.

Aplicamos el teorema de Bolzano a la función continua $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + x + 3$ en los intervalos adecuados. Por ser $f(-1) < 0,\ f(0) > 0,\ f(1) < 0,\ f(3) > 0$ existirán $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (0, 1)$, $x_3 \in (1, 3)$ tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

Para estimar las raíces con un error dado, dividimos cada intervalo por la mitad, y de los dos subintervalos obtenidos nos quedamos con uno en el que f tenga signo distinto en sus extremos. Se repite el proceso hasta conseguir que la distancia entre los extremos sea menor que el error dado. Por ejemplo, se tiene $x_1 \in (-0'510978, -0'510976)$, $x_2 \in (0'83561, 0'83562)$ y $x_3 \in (2'341, 2'343)$.

Corolario 64 Teorema del valor intermedio *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún $x \in (a, b))$ tal que $f(x) = c$*

Corolario 65 Teorema del valor intermedio *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún $x \in (a, b))$ tal que $f(x) = c$*

Ejemplo 83.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \in \mathbb{Q}\ \forall x \in [a, b]$. ¿Qué puede decirse a cerca de f?

Por un teorema de continuidad se sabe que la imagen es otro intervalo cerrado, $f[a, b] = [c, d]$ ($c, d \in \mathbb{R}$). Por hipótesis $c, d \in \mathbb{Q}$. Si fuera $c < d$ como entre dos racionales existen infinitos irracionales llegaríamos a contradicción. Necesariamente $c = d$: f es una función constante.

Ejemplo 84.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(\mathbb{Q}) = \{0\}$. Pruébese que $f = 0$.

Sea $a \in \mathbb{R}$, sabemos que $\exists \{x_n\} \subset \mathbb{Q},\ x_n \neq a\, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to a$. Por ser f continua en a, entonces $f(x_n) \to f(a)$. Además $f(x_n) = 0\, \forall n \in \mathbb{N}$. Luego $f(a) = 0\, \forall a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 85.- Un monje tibetano sale a las 7:00 am y toma sus sendero usual hasta la cima de la montaña, a la que llega a la 7:00 pm. A la mañana siguiente, parte a las 7:00 am de la cima, toma el mismo sendero y llega al monasterio a las 7:00 pm. Demuestra que existe un punto en el sendero que el monje cruzará exactamente en el mismo momento del día, en ambos días.
Ejemplo 86.- Admitamos que el polinomio $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$ posee cuatro raíces reales diferentes. Encuentra cuatro intervalos disjuntos $[a, b]$ de manera que en cada uno de ellos haya una sola raíz.

Teorema 66 *Si f es continua en a, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f esta acotada superiormente en el $(a - \delta, a + \delta)$.*

Teorema 67 *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f esta acotada superiormente.*

Pregunta 1.-¿Qué pasaría si el intervalo fuese abierto?

Teorema 68 *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f esta acotada inferiormente.*

Observación 29 *Con estos dos teoremas tenemos que si una función es continua en $[a, b]$ entonces está acotada.*

Teorema 69 *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe algún $x \in [a, b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.*

Teorema 70 *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe algún $x \in [a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.*

Corolario 71 Teorema de Weierstrass *Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza máximo y mínimo.*

2.2 Derivabilidad

2.2.1 Definición y primeras propiedades

Observación 30 *Interpretación física y geométrica de la derivada de una función en un punto.*

Velocidad y pendientes. *Llamamos velocidad instantánea de una partícula en movimiento al límite de las velocidades promedio.*

Si una partícula se desplaza a lo largo de un eje (s) y su posición respecto el tiempo (t) viene dada por una curva $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio de la partícula entre *los períodos t_0 y t_1, $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$, se representa geométricamente por la pendiente de la recta secante a la curva posición que definen los puntos $(t_0, f(t_0))$ y $(t_1, f(t_1))$.*

La velocidad instantánea de la partícula en el tiempo t_0, $\lim_{t_1\to t_0} \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$, se representa geométricamente por la pendiente de la recta tangente a la curva posición en el punto $(t_0, f(t_0))$.

Pendiente de una curva. *En general, dada una función $y = f(x)$, una* **recta secante** *a la curva viene determinada por dos puntos sobre la curva. La pendiente de la recta secante PQ, donde $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_1, f(x_1))$, es $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.*

Cuando el punto $Q(x_1, f(x_1))$ se aproxima a $P(x_0, f(x_0))$, entonces $x_1 \to x_0$ y las pendientes de las secantes tienden a la **pendiente de la recta tangente a la curva** *$y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$.*

Tasas de cambio. *Velocidad y pendiente pueden considerarse tasas de cambio (de la posición con respecto al tiempo, o del valor de una función con respecto a su entrada). Algunos ejemplos: tasa con que el número de bacterias de cierta colonia cambia con el tiempo, tasa de cambio de la dilatación de un metal respecto a la temperatura, tasa de cambio del coste de producción respecto al volumen de un producto dado, tasa de cambio del radio de una arteria respecto a la concentración de alcohol en sangre, etc.*

En general, si x e y son dos magnitudes relacionadas por una ecuación $y = f(x)$, se trata de calcular la tasa de cambio de y respecto x. Distinguimos entre tasa de cambio promedio y tasa de cambio instantánea.

Ejemplo 87.- Sea $y = x^2 + 1$. (i) Determina la tasa promedio de cambio de y con respecto x en el intervalo $[3, 5]$. (ii) Determina la tasa instantánea de cambio de y con respecto x en el punto genérico $x = x_0$. Significado para $x_0 = -4$.

(i) $\frac{f(5)-f(3)}{5-3} = 8$. En media la y aumenta 8 unidades por cada unidad que se incremente x en el intervalo $[3, 5]$.
(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 2x_0$. En particular, en $x_0 = -4$ la tasa instantánea de cambio es -8; si x se incrementa en una unidad desde $x = -4$, el valor de y disminuirá en 8 unidades.

Definicion 72 *Decimos que la función f es derivable en el punto $x = a$ si existe el siguiente límite, y en ese caso lo denotamos por $f'(a)$ y la llamamos derivada de f en el punto $x = a$,*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es derivable en todos los puntos de su dominio decimos que f es derivable.

Ejemplo 88.- Vamos a calcular las derivadas de: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = c$, $f_3(x) = ax + b$, $f_4(x) = x^3$, $f_5(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_6(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f_7(x) = [x]$, $f_8(x) = \text{sen}(x)$.
Ejemplo 89.- Recta tangente a la gráfica de una función en un punto Si existe $f'(a)$, se define la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ (recta tangente a la gráfica de f en a) como la recta de ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Calcula la recta tangente a la gráfica de las funciones de los ejemplos anteriores en $x = 0$.

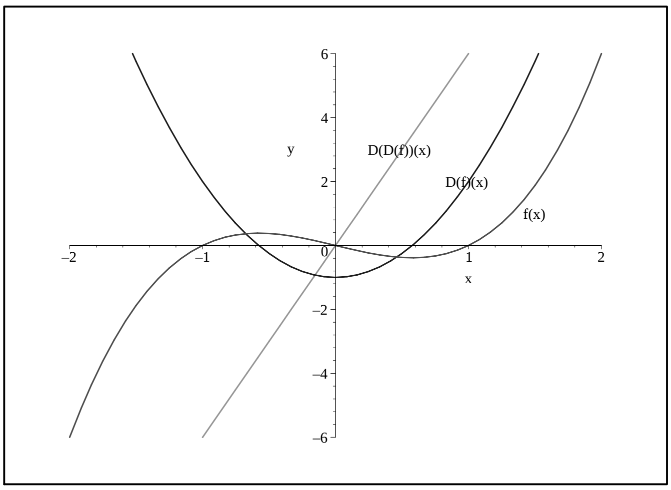
Definicion 73 (Función Derivada) *La función f' definida por $x \mapsto f'(x) = \lim_{w\to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ se denomina función derivada de f.*

Observación 31 *dominio(f') ⊆dominio(f). La derivada f' de una función f es una función cuyo valor en x es la pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en x. También puede interpretarse como una función cuyo valor en x es la tasa instantánea de cambio de y con respecto a x en x. En particular, cuando $y = f(t)$ describe la posición en el tiempo t de un objeto moviéndose a lo largo de una recta, entonces $f'(t)$ describe la velocidad (instantánea) del objeto en el tiempo t.*

Ejemplo 90.- Calcula la derivada de $f(x) = x^3 - x$. Dibuja las gráficas de f y f' y analiza la relación entre ellas.
Utilizamos la definición,

$$\lim_{w\to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} = \lim_{w\to x} \frac{(w^3 - x^3) - (w - x)}{w - x} = \lim_{w\to x}[(w^2 + wx + x) - 1] = 3x^2 - 1.$$

La derivada $f'(x)$ es positiva (respectivamente negativa) en los puntos x donde la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente positiva (resp. negativa) y es cero donde la recta tangente a la gráfica de f es horizontal.



Ejemplo 91.- (i) Calcular la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$. (ii) Determina la recta tangente a la curva en $x=9$. (iii) Calcula los límites de $f'(x)$ cuando $x\to 0^+$ y cuando $x\to\infty$ y explica lo que nos dicen estos límites a cerca de la gráfica de f.

$$\lim_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}=\lim_{w\to x}\frac{w-x}{(w-x)(\sqrt{w}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Observando las gráficas de f y f' vemos que $f'(x)>0$ si $x>0$, lo que significa que todas la rectas tangentes a la gráfica $y=\sqrt{x}$ tienen pendiente positiva en todos los puntos de ese intervalo. Como $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$, las tangentes a la gráfica se hacen más verticales a medida que $x\to 0^+$, y más horizontales cuando $x\to\infty$.

Definicion 74 *Derivadas laterales:*
Derivada por la derecha $f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Derivada por la izquierda $f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Observación 32 *Si existen* $f'_+(a)$ *y* $f'_(a)$ *y coinciden entonces* f *es derivable en* $x=a$ *y* $f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a)$

Ejemplo 92.- $f_1(x)=|x|$, $f_2(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$, $f_3(x)=\sqrt{|x|}$

Observación 33 *Notación de Leibnitz. Derivadas sucesivas. Cálculo de la derivada n-ésima.*

Ejemplo 93.- Encuentra $f^{(n)}(x)$ para $f(x)=1/x$.

Ejemplo 94.- Encuentra $f^{(n)}(0)$ para $f(x)=\text{sen}(x)$.

Teorema 75 *Si* f *es derivable en* a *entonces* f *es continua en* a.

$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)](x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=0\cdot f'(a)=0$.

Ejemplo 95.- $f_1(x)=\text{sen}(x)$, $f_2(x)=|x|$, $f_3(x)=x\text{sen}\frac{1}{x}$, $f_4(x)=x^2\text{sen}\frac{1}{x}$.

Teorema 76 *(1) Si* $f(x)=c$ *entonces* $f'(x)=0$.
(2) Si $f(x)=x$ *entonces* $f'(x)=1$.
(3) Si $f(x)$ *y* $g(x)$ *son derivables en* $x=a$ *entonces* $f+g$ *es derivable en* $x=a$ *y tenemos que* $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.
(4) Si $f(x)$ *y* $g(x)$ *son derivables en* $x=a$ *entonces* fg *es derivable en* $x=a$ *y tenemos que* $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
(5) Si $f(x)$ *y* $g(x)$ *son derivables en* $x=a$ *y* $g(a)\neq 0$ *entonces* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* $x=a$ *y tenemos que* $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Ejemplo 96.- $f_1(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$, $f_2(x)=x^5\sin(x)\cos(x)$.

Regla de la cadena. Derivación implícita

Teorema 77 Regla de la cadena *Si f es derivable en $x = a$ y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en $x = a$ y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Corolario 78 *Sea f una función y considero $f^m(x) = f(x) \cdots f(x)$ m veces, entonces $(f^m)'(a) = mf^{m-1}(a)f'(a)$.*

Observación 34 *Supongamos que tenemos una expresión de la forma $f(x, y) = 0$ que define de manera implícita una cierta función $y(x)$ entonces derivamos la expresión utilizando la regla de la cadena.*

Ejemplo 97.- $x^2 + y^2 = 1$, Suponemos y en función de x: $x^2 + y^2(x) = 1$, derivamos con respecto a x tenemos: $2x + 2y(x)y'(x) = 0$ de manera que de aquí podemos obtener la derivada de y, $y'(x) = -\frac{x}{y}$ y si despejamos y de la expresión inicial: $y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ejemplo 98.- $5y^2 + \text{sen}(y) = x^2$
Ejemplo 99.- Folium de Descartes: $x^3 + y^3 = 3xy$. Encuentra la recta tangente a esta curva en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. ¿En qué puntos del primer cuadrante la tangente es horizontal?.
Ejemplo 100.- Calcula la recta tangente a $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, en el punto $(-5, \frac{9}{4})$, $y = -\frac{5}{4}x - 4$.
Ejemplo 101.- Idem $y^2 = x^3(2 - x)$, en $(1, 1)$, $y = x$

Observación 35 *Derivación de funciones inversas. Las inversas trigonométricas.*

2.2.2 Teoremas Importantes. Máximos y mínimos. Aplicaciones

Definicion 79 *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que x_0 es un máximo local (relativo) si $\exists \delta > 0$ / $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. A $f(x_0)$ le llamamos valor máximo. (Similar con mínimo). Se dice que x_0 es un extremo local si es un máximo o un mínimo. Diremos que el máximo, mínimo, extremo es absoluto si se cumple la desigualdad correspondiente para todos los puntos del dominio de la función.*

Ejemplo 102.- $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$, $f_3(x) = \text{sen}(x)$.

Teorema 80 *Sea f una función definida sobre (a, b), si x_0 es un extremo local para f sobre (a, b) y f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.*

Ejemplo 103.- f_1 y f_3 anteriores.

Observación 36 *Lo contrario no es cierto. Por ejemplo f_2 anterior.*

Definicion 81 *Decimos que x_0 es un punto singular de f si $f'(x_0) = 0$, a $f(x_0)$ se le llama valor singular.*

Ejemplo 104.- Problema típico Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función f en el intervalo $[a, b]$.

(1) Si la función es continua sabemos por el teorema de Weierstrass que alcanzará máximo y mínimo en el intervalo.

(2) Lo buscaremos dentro de los puntos singulares de f, en los extremos y en los puntos donde la función no sea derivable.

(3) Evaluaremos la función, si es posible , en cada punto de los anteriores y ya con esta evaluación podremos decidir.

Calcula máximo y mínimos absolutos de $f_1(x) = x^3 - x$ en $[-1, 2]$. Idem en $f_2(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en $(-1, 1)$.

Teorema 82 Teorema de Rolle *Si f es continua en $[a, b]$ y derivable (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ $/f'(x_0) = 0$.*

Observación 37 *Observar la necesidad de la condición de derivabilidad en la hipótesis.*

Teorema 83 Teorema del Valor Medio *Si f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolario 84 *Si se define f sobre (a, b) y $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ entonces $f = c$ en (a, b).*

Observación 38 *Atención si estamos en más de un intervalo.*

Corolario 85 *Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo entonces existe un c tal que $f - g = c$.*

Ejemplo 105.- Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado.
Ejemplo 106.- Demostrar que entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo hallar el de menor superficie (incluyendo las dos tapas).

Definicion 86 *Se dice que f es una función creciente sobre el intervalo (a, b) si $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$ siendo $x, y \in (a, b)$.Se dice que f es una función decreciente sobre el intervalo (a, b) si $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$ siendo $x, y \in (a, b)$.*

Corolario 87 *Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.*

Si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Ejemplo 107.- $f_1(x) = x^3 - x$, $f_2(x) = x^4 - 2x^2$, $f_3(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Teorema 88 *Sea $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$ entonces f tiene un máximo local en a.*

Teorema 89 *Supongamos que existe $f''(a)$. Si f tiene un mínimo local en a entonces $f''(a) \geq 0$. Similar con el máximo.*

Observación 39 *Observar la diferencia entre estos dos últimos teoremas.*

Definicion 90 *Se dice que f es convexa en I si para todo $a, b \in I$ el segmento rectilineo que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.*

También se puede definir de la siguiente manera: f es convexa en I si para todo $a, b, x \in I$ con $a < x < b$ se tiene:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación 40 *f convexa, si f derivable en x entonces la gráfica queda por encima de la tangente por $(a, f(a))$ excepto en $(a, f(a))$. Si $a < b$ y f es derivable en a y b entonces $f'(a) < f'(b)$. Es decir si f convexa entonces f' es creciente.*

Si f derivable y f' creciente, $a < b$ y $f(a) = f(b)$ entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para todo $x \in (a, b)$.

Si f derivable y f' creciente entonces f convexa.

Ejemplo 108.- (Junio 1990) $f(x) = \log \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$

Ejemplo 109.- (Febrero 1991) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

Teorema 91 Teorema del valor medio de Cauchy

Si f y g son continuas en $[a, b]$ entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

si $f(b) \neq f(a)$, $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x_0) \neq 0$ esta ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Teorema 92 Regla de L'Hôpital *Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, supongamos también que existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y se tiene que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 110.- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
Ejemplo 111.- $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{x-\operatorname{sen}(x)}$

Teorema 93 Otros casos de L'Hôpital

1. *Si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. *Entonces* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l$. *(Análogo para* a^-*).*
2. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. *Entonces* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
3. *Si* $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to \infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. *Entonces* $\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. *(Análogo para* $-\infty$*).*
4. *Si* $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. *Entonces* $\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Ejemplo 112.- Si $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\cot(x)}$

Observación 41 *Infinitesimos.*

2.2.3 Método de Newton

El método de Newton nos resuelve ecuaciones del tipo $f(x) = 0$ en un cierto intervalo $[a, b]$ utilizando un método de aproximación a la solución con derivadas. Vamos a obtener una sucesión de puntos que, si las condiciones son las adecuadas, convergerá a la solución del problema, la sucesión la damos de forma recurrente según la siguiente expresión, empezamos en un cierto $x_0 \in [a, b]$ y los siguientes los construimos con la siguiente fórmula:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Interpretación geométrica.

2.2.4 Polinomio de Taylor. Series de Taylor.

Observación 42 *Idea polinomio de Taylor. Identificación de coeficientes.*

Definicion 94 *Sea f una función tal que existen todos sus derivadas en el punto a desde 0 hasta n, definimos el polinomio de Taylor de orden n en el punto a para la función f como*

$$P_{n,a,f}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observación 43 *El caso especial de $a = 0$ que se da con mucha frecuencia recibe el nombre especial de polinomio de Maclaurin.*

Ejemplo 113.- Calcular el polinomio de Taylor de orden n de:
(1) sen(x) en $x = 0$,
(2) $\cos(x)$ en $x = 0$,
(3) e^x en $x = 0$,
(4) $(1 + x)^m$ en $x = 0$,
(5) $\log(x + 1)$ en $x = 0$.
(6) $-\log|1 - x|$ en $x = 0$.
(7) $\frac{1}{1-x}$ en $x = 0$.
(8) $\frac{1}{1+x}$ en $x = 0$.

Teorema 95 *Supongamos que f es una función para la cual existen todas sus derivadas desde 0 hasta n y consideramos su polinomio de $P_{n,a}$, entonces:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}}{(x-a)^n} = 0$$

Ejemplo 114.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{24}}{x^9}$$

Teorema 96 *Suponemos que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{n-2)}(a) = f^{n-1)}(a) = 0$, $f^{n)}(a) \neq 0$*

1. *Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo en $x = a$.*
2. *Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$ entonces f tiene un máximo en $x = a$.*
3. *Si n es impar entonces f no tiene ni máximo ni mínimo.*

Observación 44 *Hay funciones que todas sus derivadas en un punto son cero.* **Ejemplo 115.-** $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Definicion 97 *Decimos que dos funciones f y g son iguales hasta el orden n si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = 0, \quad \forall k \leq n$$

Teorema 98 *Sean P y Q dos polinomios en $(x - a)$ de grado n y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a entonces $P = Q$.*

Definicion 99 *Sea f una función para la que existe su polinomio de Taylor de grado n en el punto $x = a$, $P_{n,a}(x)$ entonces definimos el resto $R_{n,a}(x)$: como:*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Observación 45 *Tenemos varias expresiones para calcular el Resto de Taylor*

Forma integral del Resto

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

con $f^{n+1)}$ continua en $[a, x]$.

Forma de Cauchy del Resto

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a), \quad t \in (a, x)$$

Forma de Lagrange del Resto

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad t \in (a, x)$$

Teorema 100 Teorema de Taylor

Supongamos que $f', f'', \cdots, f^{n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$ y que $R_{n,a}(x)$ esta definido por

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,a}(x)$$

entonces

$$(1)\ R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a), \quad t \in (a, x)$$

$$(2)\ R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad t \in (a, x)$$

Y si $f^{n+1)}$ continua en $[a, x]$, entonces

$$(3)\ R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Observación 46 *Estamos suponiendo $a < x$, si tenemos $x > a$ tendríamos que modificar los resultados adecuadamente.*

Proposición 101 Desigualdad de Taylor *Si $|f^{n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| < R$, entonces el resto de Taylor $R_n(x)$ satisface la desigualdad*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \ \ \textit{para}\ \ |x-a| < R$$

Observación 47 *Si quisiéramos hacer un polinomio de Taylor de grado infinito de una cierta función f lo que obtendríamos sería la* **serie de Taylor de** *f. La serie de Taylor de una función en un caso particular y muy importante de un tipo de series más generales, las series de potencias, que estudiaremos en el siguiente apartado.*

2.2.5 Series de potencias, Series de Taylor.

Definicion 102 *Una serie de potencias es una serie de la forma* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *donde* $a, x, c_n \in \mathbb{R}$.

Observación 48 *Para el conjunto de* x *donde* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *converja podremos definir una cierta función* $f(x)$.

Teorema 103 *Para una serie de potencias dada,* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$*, solo hay una de tres posibilidades:*

i) La serie sólo converja en $x = a$.

ii) La serie converja para todo x.

iii) Hay un número positivo, R*, tal que la serie converge si* $|x-a| < R$ *y diverge si* $|x-a| > R$.

Observación 49 *Prueba de la razón y convergencia absoluta.*

Ejemplo 116.- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

Observación 50 *Operaciones con series de potencias. Ejemplos. Series de Taylor. Aplicaciones.*

Capítulo 3

Cálculo diferencial en varias variables

3.1 Límites y continuidad

Introducción

En este capitulo vamos a estudiar funciones de varias variables reales en $\mathbb{R}^m$, esto es, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ejemplos. Casos especiales: *funciones escalares* $m = 1$ y en particular con $n = 2$ donde estudiaremos gráficas, curvas de nivel y secciones. Ejemplos. (Práctica 8) También estudiaremos funciones vectoriales, $n = 1$, en particular el caso que representa trayectorias de partículas en el espacio con $m = 3$. Ejemplos.(Práctica 8).

Otra cuestión importante para este capítulo y los siguientes son las diferentes parametrizaciones de curvas y superficies. Estudiaremos en particular las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Ejemplos. (Práctica 9).

Coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\text{sen}(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Ejemplo 117.- El punto $(2, \pi/3)$ en coordenadas polares es el $(1, \sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas.
Ejemplo 118.- El punto $(-1, 1)$ en coordenadas cartesianas es el punto $(\sqrt{2}, -Pi/4)$ en coordenadas polares (Cuidado, hay varias posibilidades).
Ejemplo 119.- ¿Qué curva esta representada por la ecuación polar $r = 2$?.
Ejemplo 120.- Dibuja la curva $\theta = 1$.
Ejemplo 121.- Dibuja la curva con ecuación polar $r = 2\cos(\theta)$. Encuentra una ecuación cartesiana para esta curva.

También podemos calcular la recta tangente, teniendo en cuenta que la ecuación viene dada en coordenadas polares.

Observación 51 *Si tenemos que $r = f(\theta)$ escribimos*

$$x = f(\theta)\cos(\theta) \qquad y = f(\theta)sen(\theta)$$

de manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}sen(\theta) + r\cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - r sen(\theta)}$$

Coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\text{sen}(\theta) \qquad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Ejemplo 122.- El punto $(2, 2\pi/3, 1)$ en cilíndricas corresponde al $(-1, \sqrt{3, 1})$ en rectangulares.
Ejemplo 123.- El punto $(3, -3, -7)$ en coordenadas rectangulares corresponde al punto $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ en cilíndricas, (una de las posibles elecciones).
Ejemplo 124.- Describe la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$.
Ejemplo 125.- Calcula la ecuación en coordenadas cilíndricas del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

Coordenadas esféricas

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad z = \rho\cos(\phi) \quad r = \rho\text{sen}(\phi) \quad x = r\cos(\theta) \quad y = r\text{sen}(\theta)$$
$$x = \rho\text{sen}(\phi)\cos(\theta) \qquad y = \rho\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) \qquad z = \rho\cos(\phi)$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Ejemplo 126.- El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ en coordenadas esféricas corresponde al punto $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ en coordenadas rectangulares.
Ejemplo 127.- El punto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ en coordenadas rectangulares corresponde al punto $(4, \pi/2, 2\pi/3)$ en coordenadas esféricas.
Ejemplo 128.- Describe las superficies definidas por: $\rho = c$, $\theta = c$ y $\phi = c$.
Ejemplo 129.- Halla una ecuación en coordenadas esféricas para el hiperboloide de dos hojas de ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.
Ejemplo 130.- Encuentra una ecuación rectangular para la superficie cuya ecuación es $\rho = \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)$.

3.1.1 Límites

Definicion 104 (Límite de una función en un punto) *Sea una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde U es un conjunto abierto no vacío. Sea x_0 un elemento de A o un punto frontera de A. Se dice que la función f tiene límite en el punto x_0, si existe $l \in \mathbb{R}^m$ con la siguiente propiedad:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists(\epsilon) > 0 \quad / \, si \quad 0 < \|x - x_0\| <, \, x \in A, \;\; entonces \;\; \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

Observación 52 *El límite l, caso de existir, es único. Diremos que l es el límite de la función f en el punto x_0, y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.*

Ejemplo 131.- Demuestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. En general, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$ (proyecciones).

Ejemplo 132.- Demuestra que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} x = x_0$, donde $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ (función identidad).

Ejemplo 133.- $\lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2 = 0$

Ejemplo 134.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Teorema 105 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x_0 un elemento de A o un punto frontera de A, $l, l' \in \mathbb{R}^m$ y c un número real. Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$, entonces se tiene que:*

1. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} cf(x) = cl$
2. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'$
3. Si $m = 1$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = ll'$
4. Si $m = 1, \; l \neq 0$ y $f(x) \neq 0$ en una bola abierta de centro x_0, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{l}$
5. Si $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, donde $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, m$ son las funciones coordenadas de f, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, \ldots, l_m) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i \;\forall i = 1, \ldots, m$$

Ejemplo 135.- $\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2+y^2+2=3$ y $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=1/2.$

Ejemplo 136.- $\lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{y-x^3}=e^{-7}$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,1)} \ln(\cos(y+z)+x^2)=0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}=+\infty.$

Observación 53 *Cálculo de límites mediante coordenadas polares*

Ejemplo 137.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

Ejemplo 138.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Calculamos $\lim_{r\to 0} f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) = \lim_{r\to 0} r\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 0$, $\forall\alpha\in(-\pi,\pi]$. Luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

Ejemplo 139.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Calculamos $\lim_{r\to 0} f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) = \lim_{r\to 0} \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$. Como el resultado depende del argumento, se tiene que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

Observación 54 *Si una función escalar f tiene límite 0 en un punto x_0 y otra función escalar g está acotada, entonces el producto tiende a 0 en dicho punto,* $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0.$

Ejemplo 140.- Comprueba que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

Se puede escribir esta función como producto de una función acotada $\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2}{x^2}=1$, y de otra función $g(x,y)=y$ que en el origen tiende a 0. El límite pedido vale 0.

Ejemplo 141.- Estudiar el límite en cualquier punto del plano (x_0,y_0) de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } y=x^2 \\ y & \text{si } y\neq x^2. \end{cases}$$

Definicion 106 *Definición de límites iterados. Límites por caminos.*

Ejemplo 142.- Estudiemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Utilizando el álgebra de límites, obtenemos una indeterminación del tipo $0/0$. Si nos aproximamos al origen a través del eje OX, entonces $y = 0$ y, por tanto, $f(x,y) = f(x,0) = 0$. Esto se escribe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),y=0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$. Se tiene que, de existir el límite en el origen, debe valer 0.
Análogamente, a través del eje OY, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),x=0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$.
Sin embargo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),y=x} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = 1/2$. Por tanto, no existe el límite pedido.

Ejemplo 143.- Estudiemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Si nos aproximamos al origen mediante una parábola de la familia $y = mx^2$, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=mx^2} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{(1+m^2)x^4} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Luego el límite no existe.

Ejemplo 144.- Estudiar si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^3+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Para cada $x \neq 0$, $\exists \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^3}{(x^3+y^2)^{3/2}} = x^{-3/2}$, pero $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^3}{(x^3+y^2)^{3/2}} \right)$. Por tanto, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ejemplo 145.- Estudiar si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Para cada $y \neq 0$, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^3} = -1/y$, pero $\nexists \lim\limits_{y\to 0} \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right)$. Por tanto, no existe el límite en el origen de la función dada.

Ejemplo 146.- Estudiar si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Para cada $x \neq 0$, $\exists \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$; para cada $y \neq 0$, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$; y existen los correspondientes límites iterados, $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = -1$ y $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1$, pero no coinciden. Luego $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ejemplo 147.- No existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$
Ejemplo 148.- Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$
Ejemplo 149.- Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
Ejemplo 150.- Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

3.1.2 Continuidad

Definicion 107 *Definición de función continua en un punto.*

Proposición 108 *Algebra de funciones continuas. Composición de funciones continuas.*

Proposición 109 *Cualquier función continua sobre un compacto alcanza máximo y mínimo.*

Ejemplo 151.- Estudia la continuidad de $f(x,y,z) = \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}$ en el origen.
Ejemplo 152.- Estudia la continuidad de $f(x,y,z) = \frac{x^2z+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ en el origen.
Ejemplo 153.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; y = \lambda x\}$. Demostrar

$$\lim_{\substack{(x,y)\in L_\lambda \\ ((x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = 0$$

Encuentra una curva que pase por el origen a lo largo de la cual, salvo en el (0,0), f tenga un valor constante. ¿Es continua f en el origen?

3.2 Diferenciabilidad

3.2.1 Derivadas parciales

Definicion 110 (Derivadas parciales) *Sean U un conjunto abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con valores reales. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, las derivadas parciales de f respecto a la primera, segunda,..., n-ésima variable son las funciones de n variables con valores reales que en el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ están definidas por*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}\end{aligned}$$

si existen los límites, donde e_j es el j-ésimo vector de la base canónica, $j = 1, \ldots, n$

Ejemplo 154.- Deriva respecto de x y de y la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$. Otro ejemplo se tiene en las tasas de cambio de la velocidad de una reacción dada al modificar la concentración de cada enzima que interviene.

Observación 55

- *La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es la derivada de f respecto a la variable x_j, manteniendo las otras variables fijas.*
- *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, entonces podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente de f, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.*

Observación 56

- *Diferenciación parcial implícita.*
- *Derivadas parciales de ordenes superiores. Igualdad de la parciales mixtas de segundo orden (lema de Schwarz).*

Ejemplo 155.- La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ es constante en los ejes x e y, luego tiene derivadas parciales en el origen y valen cero. Sin embargo, f no es continua en $(0, 0)$ porque $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Ejemplo 156.- La función $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Si restringimos f a la recta $y = x$, obtenemos la función $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$ que no es diferenciable en $x = 0$, y sin embargo cada componente de g es diferenciable, y f tiene derivadas parciales en (0,0).

Además no hay, en un sentido razonable, plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ en el origen. En este caso el plano xy es tangente a la gráfica a lo largo de los ejes x e y pues f tiene pendiente 0 en (0,0) a lo largo de estos ejes. Sin embargo, este plano no es tangente a la gráfica en otras direcciones. Véase la figura xxx (MAPLE).

Definicion 111 *Derivada direccional de una función f en un punto a según un vector unitario u:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}.$$

Ejemplo 157.- $f(x, y) = x^2 + y^2$ $v_1 = (1, 0),\ v_2 = (0, 1),\ v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Proposición 112 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene en a un extremo local, entonces dado $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unitario, si existe $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$.*

La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) := f(a + tu)$ tiene en $t = 0$ un extremo local, luego $0 = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(a)$.

Observación 57 *Relación entre la existencia de derivadas parciales y direccionales.*

Relación entre la existencia de derivadas direccionales y continuidad de la función

3.2.2 Diferencial en un punto. Aproximación lineal local de una función

Observación 58 *Motivación de la definición de diferenciabilidad.*

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en un punto (x_0, y_0). Calculemos cómo debería ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto dado, si éste existiese. En $\mathbb{R}^3$ un plano no vertical tiene una ecuación del tipo $z = ax + by + c$. Si el plano es tangente a la gráfica, las pendientes a lo largo de los ejes x e y deberían ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y \Rightarrow a = \partial f/\partial x(x_0, y_0)$ y $b = \partial f/\partial y(x_0, y_0)$. Determinamos la constante c imponiendo que $z = f(x_0, y_0)$. Se tiene,

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{3.1}$$

La definición de diferenciabilidad dirá que existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) y el plano (3.1) es una ***buena aproximación lineal*** *a la función f en algún disco de centro el* *punto dado.*

En cálculo de una variable, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{3.2}$$

La recta $l(x)$ que pasa por $x = x_0$ con pendiente $f'(x_0)$ es una buena aproximación a la función f en el sentido de que la diferencia entre $f(x)$ y $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ tiende a cero cuando $x \to x_0$, aún al dividirse entre $x - x_0$. Esta idea la extenderemos a funciones de varias variables reemplazando la recta tangente por el plano tangente (3.1).

Definicion 113 (Diferenciabilidad en dos variables) *Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ y*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0 \tag{3.3}$$

Definicion 114 (Plano tangente) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0). El plano en $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

se llama plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 158.- Probamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en $(0, 0)$ y calculamos el plano tangente en el origen.

Observación 59 *Si escribimos la matriz fila*

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

(el correspondiente vector se llama gradiente de f), la ecuación (3.3) nos da la ***aproximación lineal*** *a f cerca de (x_0, y_0) :*

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Nota: Es una buena aproximación a f en algún disco de centro (x_0, y_0) en el sentido de que $L(x, y)$ difiere de $f(x, y)$ en un número pequeño multiplicado por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Definicion 115 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite todas las derivadas parciales en un punto a, llamamos matriz jacobiana de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en a, $Df(a)$, a la matriz*

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j}. \tag{3.4}$$

Ejemplo 159.- $f(x,y) = (xy, x^2\text{sen}(x), \cos(y))$ en $(1,1)$ y en $(0,0)$.

Definicion 116 (Diferenciabilidad en un punto) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada, donde U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en $a \in U$ si $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\ \forall i,j$ y*

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0, \tag{3.5}$$

donde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es $Df(a)$.

Observación 60 *Unicidad de T. Se llama diferencial de f en a y se denota $df(a)$. Si $h \in \mathbb{R}^n$,*

$$df(a)(h) = Df(a)\cdot h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 160.- Diferencial de una función constante, de una aplicación lineal, de una aplicación afín.

Ejemplo 161.- Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2\cos(yz)$ es diferenciable. La matriz jacobiana de f en un punto (x,y,z) es

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\cos(yz) & -x^2z\text{sen}(yz) & -x^2y\text{sen}(yz) \end{pmatrix}.$$

Nos preguntamos por la diferencial en $(0,0,0)$ y en $(1,0,0)$. La diferencial en el origen es la aplicación lineal nula de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Y la diferencial en $(1,0,0)$ es $df(1,0,0)(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 2h_1$.

Veamos ahora que f es diferenciable en $(1,0,0)$.

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{f((1,0,0)+(h_1,h_2,h_3)) - f(1,0,0) - df(1,0,0)(h_1,h_2,h_3)}{\|(h_1,h_2,h_3)\|} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{(1+h_1)^2\cos(h_2h_3) - 1 - 2h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} = 0.$$

Ejemplo 162.- Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) := (x, 1, xy)$ es diferenciable. La matriz jacobiana de f en un punto (x,y) es $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ y la diferencial de f en $(0,1)$ es $df(0,1)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \\ h_1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 163.- Calcula las matrices jacobianas de: $f_1(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$, $f_2(x,y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$, $f_3(x,y,z) = (ze^x, -ye^z)$, $f_4(x,y,z) = xe^y$, $f_5(x,y) = e^{x+y} + \text{sen}(xy)$.

Proposición 117 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es diferenciable en a si y sólo si para cada $i = 1, \ldots, m$ f_i es diferenciable en a. En este caso, $df(a)(h) = (df_1(a)(h), \ldots, df_m(a)(h))$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.*

Observación 61 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en a, la diferencial de f en a es la aplicación lineal $df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ tal que $df(a)(t) = tf'(a)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Definicion 118 *Hiperplano tangente*

Ejemplo 164.- el plano tangente de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,2)$ es $z = 2x + 4y - 15$.

Ejemplo 165.- Determina el plano tangente a la superficie $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 4$ en el punto (1,3,-1).

Ejemplo 166.- Sea la curva plana de ecuación $y^3 + x^2 = 2$ donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,1)$. ¿Qué puntos de la curva, si los hay, admiten una tangente horizontal? ¿y tangente vertical? Estudia el crecimiento de la función $y(x)$.

Teorema 119 (Condición suficiente diferenciabilidad) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que existen todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ y son continuas en alguna bola abierta de centro $a \in U$. Entonces f es diferenciable en a.*

Ejemplo 167.- $f(x,y,z) = ze^{xy}$.

Observación 62 *Parciales continuas $\Rightarrow$ Diferenciable $\Rightarrow$ Existen Parciales*

Ejemplo 168.- Estudiamos la diferenciabilidad de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

La función f es continua en $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. La derivada parcial respecto de x en $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

no tiene límite en $(0,0)$ (cuando utilizamos diferentes trayectorias para acercarnos al origen se obtienen diferentes límites, por ejemplo, $x = my$). Por simetría concluimos que las dos derivadas parciales de f no son continuas en $(0,0)$.

Pero f no es diferenciable en $(0,0)$. Si existiera $df(0,0)$ debería ser la aplicación lineal constante 0. Por definición de diferenciabilidad, para cada $\epsilon > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que $0 < \|(h_1,h_2)\| < \delta$ implique $\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} < \epsilon$. Esto es, $|f(h_1,h_2)| < \epsilon \|(h_1,h_2)\| \Rightarrow |h_1 h_2| < \epsilon(h_1^2 + h_2^2)$. Si escogemos $h_1 = h_2$, se tiene $1/2 < \epsilon$, lo cual no sería cierto si tomáramos $\epsilon \leq 1/2$.

Ejemplo 169.- Calcula la continuidad diferenciabilidad y derivadas parciales de

$$f(x,y) = \begin{cases} x\text{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejemplo 170.- Calcula la continuidad diferenciabilidad y derivadas parciales de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Proposición 120 *Si f diferenciable en a, entonces f es continua en a.*

$$lim_{x\to a} \|f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\| = lim_{x\to a} \|x-a\| \frac{\|f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

por ser f diferenciable en a. Además, como las aplicaciones lineales son funciones continuas, $lim_{x\to a} df(a)(x-a) = 0$. Por tanto, $lim_{x\to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$.

Proposición 121 *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f+g$ y λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) son diferenciables en a,*

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a) \quad y \quad d(\lambda f)(a) = \lambda df(a).$$

Si además, f y g son funciones con valores reales, $f \cdot g$ es diferenciable en a y f/g es diferenciable en a (siempre que $g(a) \neq 0$),

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a) \quad y \quad d(f/g)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}.$$

Ejemplo 171.- Las proyecciones son lineales y, por tanto, diferenciables. Entonces los polinomios son diferenciables.

Proposición 122 (Regla de la cadena) *Sean las funciones $g : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g(V) \subset U$. Si g es diferenciable en $a \in V$ y f es diferenciable en $g(a) \in U$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y $d(f \circ g)(a) = df(g(a)) \circ dg(a)$.*

Proposición 123 (Relación entre la diferencial y la derivada direccional) *Si f es diferenciable en a y u es un vector unitario, entonces existe $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ y $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)(u)$.*

$$lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - df(a)(u) \right\| = \lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(a+tu) - f(a) - df(a)(tu)}{t} \right\| = \|u\| \lim_{t\to 0} \frac{\|f(a+tu) - f(a) - df(a)(tu)\|}{\|tu\|} = 0$$

porque f es diferenciable en a.

Ejemplo 172.- Calcula la derivada direccional de $f(x,y) = (e^{x+y}, \cos(xy), e^{\operatorname{sen}(x)})$ en la dirección (1,0) en el punto (0,0).

Ejemplo 173.- La función $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$ sólo admite derivadas direccionales en el origen según los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$. Según otros vectores no existe derivada direccional en $(0,0)$, luego f no es diferenciable.

Nota: Si componemos la función diferenciable $g(x) = (x,x)$ con f (que tiene derivadas parciales en el origen), se tiene $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$ que no es derivable en $x = 0$. Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 174.- Gradientes.

Observación 63 *Fórmulas de Taylor*

3.2.3 Máximos y mínimos

Definicion 124 *Definiciones: minimo local, maximo local, extremos locales o relativos, punto critico y punto silla.*

Observación 64 *Relación entre extremos locales y puntos críticos. Utilidad de esta proposición.*

Ejemplo 175.- $f(x,y) = x^2 + y^2$
Ejemplo 176.- $f(x,y) = x^2 - y^2$
Ejemplo 177.- $f(x,y) = x^2y + y^2x$
Ejemplo 178.- $f(x,y) = 4y^2 - x^2y^2 - y^3$

Definicion 125 *definición de hessiano de f en x_0, forma cuadratica definida positiva, definida negativa.*

Observación 65 *Recordar cosas de algebra: un lema y el teorema de Silvester.*
Relación entre la hessiana de una función y los extremos locales. Clasificación de puntos críticos para una función de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 179.- los anteriores
Ejemplo 180.- $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$
Ejemplo 181.- $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$

3.2.4 Máximos y mínimos condicionados

Observación 66 *Objetivo: buscar máximos y mínimos de una función sujeta a una o varias restricciones. Ej: la temperatura en una habitación, a diferentes distancias, etc.*

Observación 67 *Algunos métodos para resover estos problemas:*
(1) Geométricos: estudio de las curvas de nivel.
(2) Analíticos:
(a) pasando a un problema de una variable cuando podamos .
(b) estudiando el crecimiento de la función.
(3)Multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 182.- Calcular máximos y minimos sobre las restricciones siguientes: $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre $S = (x,y)\ :\ y - x - 1 = 0$
Ejemplo 183.- Idem $f(x,y) = \frac{y}{x}$ sobre $x^2 + (y-2)^2 = 1$
Ejemplo 184.- Idem $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ sobre $xy = 1$
Ejemplo 185.- Idem $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ sobre $x^2 + y^2 = 1$
Ejemplo 186.- Idem $f(x,y) = \frac{1}{y-x}$ sobre $x^2 + y^2 = 1$

Teorema 126 *Teorema de los multiplicadores de Lagrange y generalización.*

Ejemplo 187.- $f(x,y) = xy$ sobre $x^2 + y^2 = 1$
Ejemplo 188.- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las condiciones: $y + x = 1$ y $x + z = 1$

Ejemplo 189.- (enero 2004) Dada la superficie $2x^2 - y^2 + 3z^2 + 4 = 0$. Determina el plano tangente a dicha superficie en el punto $(1,3,-1)$. Encuentra el punto de dicho plano tangente que está más próximo al origen de coordenadas.

Solución.- Sea $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 + 4 = 0$. Determinamos el plano tangente:

$$\nabla f(x,y,z) = (4x, -2y, 6z) \qquad \nabla f((1,3,-1)) = (4,-6,-6),$$

de manera que el plano tangente cumplirá la ecuación:

$$(4,-6,-6)\cdot(x-1, y-3, z+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 6y - 6z + 8 = 0$$

Para calcular la distancia mínima al origen utilizamos multiplicadores de Lagrange. Consideramos la función:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(4x - 6y - 6z + 8)$$

Han de cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$2x - 4\lambda = 0, \quad 2y + 6\lambda = 0, \quad 2z + 6\lambda = 0, \quad 4x - 6y - 6z + 8 = 0$$

Quedando el punto donde se alcanza el mínimo

$$(-\frac{4}{11}, \frac{6}{11}, \frac{6}{11})$$

Ejemplo 190.- (setp 2005) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 3y$$

Calcula el máximo y mínimo absoluto de esta función en el compacto C definido por

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2 + y^2 \leq 2 \ , \ y \leq -x\}$$

Solución.- Dibujamos el compacto C
Calculamos el gradiente de f, $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6, 3y^2 - 3)$ y buscamos los puntos críticos $\nabla f(x,y) = 0$, esto es, $(1,1), (-1,1), (-1,-1)$ y $(1,-1)$. Descartamos el $(1,1)$ por no pertenecer al compacto. Observamos que todos están en el borde.

Buscamos más posibles puntos de máximo o de mínimo en los bordes. En la parte recta $y = -x$, tenemos la función $g(x) = f(x, -x) = x^3 - 3x$ cuyos puntos críticos $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ son $x = \pm 1$ dando de nuevo los puntos $(-1, 1), (1, -1)$, que además son los puntos donde la frontera no es derivable. Buscamos algún punto más en la parte circular utilizando multiplicadores de Lagrange, quedando el sistema a resolver:

$$\begin{cases} 6x^2 - 6 + 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 - 3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por dos, la sumamos a la primera y utilizamos la tercera igualdad obtenemos, para el caso $\lambda \neq 0$, $x = -2y$. Si metemos este resultado en la restricción obtenemos $x^2 + 4x^2 = 2$, esto es, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. El resto de soluciones del sistema ya las tenemos del estudio anterior. De manera que de estos dos nuevos puntos $(\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}})$ y $(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}})$, nos quedamos con el primero ya que el segundo no esta en el compacto. Para saber cuál de todos estos candidatos es el máximo y el mínimo absoluto, que seguro que se alcanzan ya que la función continua sobre el compacto, basta con que calculemos el valor de la función en dichos puntos.

$$f(-1,1) = 2, \qquad f(-1,-1) = 6,, \qquad f(1,-1) = -2, \qquad f(\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}) = -\frac{12}{25}\sqrt{\frac{2}{5}} > -2$$

De manera que el mínimo se alcanza en $(1, -1)$ y el máximo en $(-1, -1)$.

3.2.5 Máximos y mínimos absolutos

Ejemplo 191.- $f(x, y) = xy$ sobre el círculo unidad.
Ejemplo 192.- Determinar los puntos donde la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto compacto: $T = (x, y) \, : \, x \leq 0 \; y \leq 0 \; x + y \geq -3$

Bibliografía

[1] Alonso, M. y Finn E.J. *Física (vol 1) Mecánica.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. Méjico. 1976.

[2] Alonso, M. y Finn E.J. *Física (vol 2) Campos y ondas.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. Méjico. 1976.

[3] Alonso, M. y Finn E.J. *Física (vol 3) Fundamentos cuánticos y estadísticos.* Addison-Wesley Iberoamericana. U.SA. 1986.

[4] Amillo J. et. al. *Cálculo. Conceptos, Ejercicios y Sistemas de Computación Matemática.* McGraw-Hill. Madrid. 1996.

[5] Anton, H. *Calculus: a new horizon.* 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999.

[6] Anton, H. *Cálculo y Geometría analítica (vol 2).* Limusa. México. 1994.

[7] Apostol, T.M. *Calculus (2 vols.)* Reverté. Barcelona. 1982.

[8] Apostol, T.M. *Análisis Matemático.* Reverté. Barcelona. 1982.

[9] Arnol'd, V.I. *Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag. Nueva York. 1992.

[10] Atkinson K. *Elementary Numerical Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1993.

[11] Atkinson K. *An Introduction to Numerical Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1989.

[12] Bartle, R.G. *Introducción al análisis matemático.* Limusa.

[13] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. y Shetty, C.M. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1993.

[14] Bombal, F., Rodríguez, L y Vera, G. *Problemas de análisis matemático (3 vol.)* AC. Madrid, 1987

[15] Boyer, C.B. *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1991.

[16] Bradley, G.L. y Smith, K.J. *Cálculo de una variable.* Prentice Hall. Madrid. 1998.

[17] Bradley, G.L. y Smith, K.J. *Cálculo de varias variable.* Prentice Hall. Madrid. 1998.

[18] Bronson R. *Matrix Methods. An introduction.* Academic Press, inc. Londres. 1991.

[19] Burgos, J. *Curso de álgebra y geometría.* Ed Alhambra. Madrid, 1980.

[20] Burgos, J. *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw-Hill. Madrid 1994.

[21] Burgos, J. *Cálculo infinitesimal de varias variables.* McGraw-Hill.

[22] Carrillo de Albornoz, A. y Llamas I. *Maple V, aplicaciones matemáticas para PC.* Rama. Madrid. 1995.

[23] Castillo, F. *Análisis Matemático II.* Alhambra. Madrid. 1980.

[24] Cembranos, P. y Mendoza, J. *Límites y derivadas.* Anaya. Madrid. 2004.

[25] Conway, J.B. *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlag. Nueva York, 1978.

[26] Cuadras, C.M., *Problemas de Probabilidades y Estadística (vol. 1.* 6ª edición. PPU 1985.

[27] De la Villa, A.*Problemas de Álgebra.* CLAGSA. Madrid. 1994.

[28] Demidovich, B.P. *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Paraninfo. Madrid. 1991.

[29] Demidovich, B.P. y Maron I.A. *Cálculo numérico fundamental.* Paraninfo. Madrid. 1985.

[30] Dodson, C.T.J. y Gonzalez E.A. *Experiments in Mathematics Using.* Springer-Verlag. Alemania. 1995.

[31] Dorronsoro, J. y Hernández E. *Números, grupos y anillos.* Addison-Wesley, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. 1996.

[32] Fernández Viña, J.A. *Lecciones de análisis matemático I.* Tecnos. Madrid. 1976.

[33] Fernández Viña, J.A. y Sánchez Mañes E. *Ejercicios y complementos de análisis matemático I.* Tecnos. Madrid. 1979.

[34] Fisher, E. *Intermediate real analysis.* U.T.M. Springer Verlag. Berlin, 1980.

[35] Fuertes García, J. y Martínez Hernández, J. *Problemas de Cálculo Infinitesimal.* McGraw-Hill, Interamericana de España, S.A.U. Madrid. 1997.

[36] Fraleigh, J. B. y Beauregard, R. A. *Algebra lineal.* Ed Addison-Wesley Iberoamericana. Mexico, 1989.

[37] Gamboa, J.M. y Rodriguez, M.B. *Álgebra matricial.* Anaya. Madrid. 2003.

[38] Gantmacher F.R. *Théorie des matrices (tome I).* Dunod.

[39] García, A. y otros. *Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático de una variable.* Clagsa. Madrid. 1993.

[40] García, A. y otros. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables.* Clagsa. Madrid. 1996.

[41] Grossman, S.I. *Álgebra Lineal.* McGraw-Hill. Méjico. 1996.

[42] Guzman M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Alhambra. Madrid. 1975.

[43] Guzman M. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* Pirámide. Madrid. 2001.

[44] Godunov, S.K. *Ecuaciones de la Física Matemática.* Mir. Moscú. 1978.

[45] Golovina, L.I. *Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones.* Ed. Mir. Moscú, 1983.

[46] Hirsch, M. y Smale, S. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal.* Ed. Alianza Universidad. Madrid, 1983.

[47] Infante J.A. et al. *Métodos numéricos.* 1a ed. Pirámide. 1999.

[48] John, F *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag. Nueva York. 1980.

[49] Kiseliov A., Krasnov M. y Makarenko G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Mir. Moscú. 1984.

[50] Katz, V.J. *A History of Mathematics.* Addison-Wesley. U.S.A. 1998.

[51] Lang, S. *Algebra lineal.* Fondo educativo Interamericano. Bogotá, 1976.

[52] Lang, S. *Cálculo (2 vols.)* Fondo Educativo Interamericano. Bogotá. 1976.

[53] Lipschutz. *Algebra Lineal.* Ed Schaum- Mc Graw-Hill. Madrid.

[54] Marsden, J.E. y Tromba, A.J. *Calculo Vectorial.* 4a ed. Addison-Wesley Longman de México. Naucalpán de Juárez, 1998.

[55] Marsden, J.E. y Tromba, A.J. *Calculo Vectorial. Problemas resueltos.* Addison-Wesley Iberoamericana. 1993.

[56] Mathews J.H. y Fink K.D *Métodos Numéricos con MATLAB.* Prentice Hall. Madrid. 1999.

[57] Merino, L. y Santos, E. *Álgebra lineal con métodos elementales.* Universidad de Granada. 1997.

[58] Munkres, J.R. *Topología.* Prentice Hall. Madrid. 2002.

[59] Spiegel M.R., Liu J. y Abellanas, L. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada.* McGraw-Hill. Madrid. 2000.

[60] Pérez, C. *Métodos matemáticos y programación con Maple V.* 1a Ra-ma. Madrid, 1998.

[61] Polya G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos S.A. Madrid. 1966.

[62] Proskuryakov, I.V. *Problemas de álgebra lineal.* Ed Reverté.

[63] Ribenboim P. *My Numbers, My Friends.* Springer-Verlag. Nueva York. 2000.

[64] Roanes, E. et al. *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5.* 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[65] Rorres, C. y Anton, H. *Aplicaciones del álgebra lineal.* Limusa. Mexico, 1979.

[66] Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático.* McGraw-Hill. 1966.

[67] Sanz-Serna J.M. *Diez lecciones de cálculo numérico.* Universidad de Valladolid. 1998.

[68] Spivak, M. *Calculus : cálculo infinitesimal.* Reverté. Barcelona, 1990.

[69] Simmons G.F. y Robertson J.S *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* McGraw-Hill, Interamericana de España, S.A.U. Madrid. 1993.

[70] Stein S.K. y Barcellos, A. *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw-Hill. Santafé de Bogotá. 1995.

[71] Stewart I. *De aquí al infinito.* Grijalbo Mondadori. Barcelona. 1998.

[72] Stewart, J. *Cálculo: conceptos y contextos.* International Thomson Editores. Mexico D.F., 1999.

[73] Strang, G. *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Ed Adisson- Wesley Latinoamericana.

[74] Taha, H.A. *Investigación de Operaciones.* Alfaomega. Méjico. 1995.

[75] Vivaldi F. *Experimental Mathematics with Maple.* Chapman and Hall, CRC Mathematics. U.S.A. 2001.

[76] Weinberger H.F. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales.* Reverté. Barcelona. 1988.

[77] Wilson W. *Simulating Ecological and Evolutionary Systems in C.* Cambridge University Press. Cambridge. 2000.

[78] http://www.bne.es/

[79] http://www.cervantesvirtual.com/index.shtml

[80] http://www.cut-the-knot.org/index.shtml

[81] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/

[82] http://www.indexnet.santillana.es/home.htm

[83] http://www.maa.org/pubs/mathmag.html

[84] http://www.maplesoft.com/

[85] http://matematicas.montes.upm.es/

[86] http://mathworld.wolfram.com/

[87] http://www.maths.tcd.ie/

[88] http://web.mit.edu/

[89] http://planetmath.org/

[90] http://platea.pntic.mec.es/ csanchez/olimmain.htm

[91] http://portal.isiknowledge.com/

[92] http://www.rae.es/

[93] http://www.research.att.com/ñjas/

[94] http://www.uam.es/

[95] http://www.ucm.es/info/ucmp/index.php

[96] http://www.uc3m.es/

[97] http://www.upm.es/

[98] http://www.urjc.es/

[99] http://www.ugr.es/

[100] http://www.uv.es/ jaguilar/