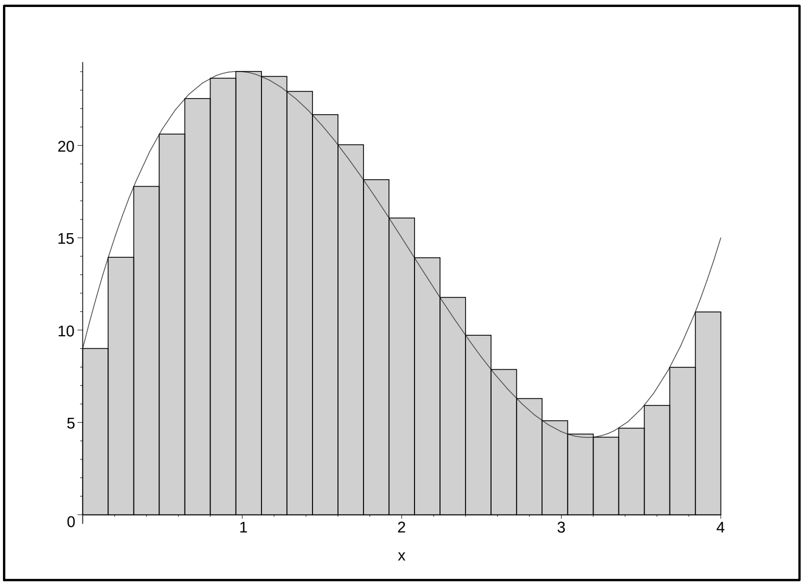
Cálculo integral
en la Ingeniería de Montes

por

Ana Luzón y Pilar Cristobal

.



Índice General

Capítulo 1

CÁLCULO INTEGRAL EN UNA VARIABLE

1.1 Introducción

Idea de área. Antiderivadas, primitivas. Buscaremos expresiones para las primitivas en términos de funciones más sencillas: polinomios, trigonométricas, exponenciales, logaritmos, etc. ¿Siempre podemos integrar?.

1.2 Integrales indefinidas. Métodos de integración

Primitivas. Integrales inmediatas.

ALGUNAS INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int adx = ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = log(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C$$

$$\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

Proposición 1 *(Propiedades de las integrales) Si f y g son funciones continuas tenemos que*

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (af)(x)dx = a\int f(x)dx$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1.2.1 Integración por descomposición

Ejemplo 1.- $\int \frac{2x^3-3x+5}{x}dx = \frac{2}{3}x^3 - 3x + 5L|x| + C$
Ejemplo 2.- $\int \sin^2(x)dx$, $\int \cos^2(x)dx$, $\int \tan^2(x)dx$ y $\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)}$

1.2.2 Integración por cambio de variable

Este método es consecuencia de la regla de la cadena.

Teorema 2 *Sea $x = g(t)$ un cambio de variable con f y g' continuas entonces*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Ejemplo 3.- $\int (u(x))^a u'(x)dx$, $\int \sin^3(x)\cos(x)dx$
Ejemplo 4.- $\int \sqrt{1-x^2}dx$

Observación 1 *Un cambio muy habitual y que suele resolver integrales trigonométricas es* $t = \tan\frac{x}{2}$.

Ejemplo 5.- $\int \frac{dx}{3+5\cos(x)}dx$

1.2.3 Integración por partes

Este método es una consecuencia directa de la fórmula de derivación de un producto.

Teorema 3 *Sean u,v funciones con derivadas continuas entonces tenemos que*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 6.- Determina las integrales $\int \log(x)dx$, $\int x\sin(x)dx$.

1.2.4 Integración por reducción o recurrencia

A veces después de aplicar algunos de los métodos anteriores volvemos a encontrarnos con la misma integral o una integral similar esta son las que llamamos de reducción o recurrencia.
Ejemplo 7.- Calcula la integral $\int x\sin(x)e^x dx$

1.2.5 Integración de funciones racionales

Suponemos que lo que tenemos que integrar es una del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ con el grado de $p(x)$ menor que el de $q(x)$ y sin raices comunes . (Si no, efectuamos la división y pensamos en el resto). Empezaremos encontrando los factores irreducibles del denominador y después expresamos la integral como integrales de fracciones simples, aquí pueden ocurrir varios casos:
Ejemplo 8.- $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx$

Ejemplo 9.- (Examen 10.2.1998. Problema 4) Calcula

$$\int \frac{5x^2 - 17}{x^4 - 3x^3 + x - 3} dx$$

Método de Hermite El método de Hermite puede utilizarse para simplificar las cuentas en el caso en que $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ el denominador tiene una o varias raíces de multiplicidad mayor que uno, en ese caso descompondremos la integral en un primer sumando compuesto en el numerador por el polinomio desconocido $s(x)$ de un grado menor que el denominador que construyamos y en el denominador un polinomio que se ha obtenido de $q(x)$ rebajando el grado de todos sus factores una unidad. Los sumando restantes son los necesarios para completar $q(x)$.

Ejemplo 10.- $\int \frac{dx}{x^5+4x^4+8x^3+8x^2+4x}$

1.3 Integral de Riemmnan

Definicion 4 *Para funciones acotadas en $[a, b]$ definición de partición, suma inferior, suma superior.*

Pregunta 1.-¿Hace falta que la función sea continua en el intervalo?.

Observación 2 *Relaciones entre las sumas superiores e inferiores. El supremo de las sumas inferiores. El ínfimo de las sumas superiores.*

Definicion 5 *Definición de función integrable en un intervalo. Definición de integral de una función sobre un intervalo.*

Ejemplo 11.- Utilizando particiones del intervalo y sumas superiores e inferiores calcula:

(a) $\int_0^2 f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

(b) $\int_0^1 xdx$, $\int_0^b xdx$, $\int_a^b xdx$

Observación 3 *Límites como sumas de Riemann.*

Teorema 6 *Sea f una función integrable sobre $[a,b]$ entonces dado $c \in (a,b)$ tenemos que f es función integrable sobre $[a,c]$ e integrable sobre $[c,b]$. Recíprocamente si f es función integrable sobre $[a,c]$ e integrable sobre $[c,b]$ entonces f es una función integrable sobre $[a,b]$.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema 7 *Sean f y g funciones integrables sobre $[a,b]$ entonces $f+g$ es integrable sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 8 *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces cf es integrable sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 9 *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b (f)(x)dx \leq M(b-a)$$

Definicion 10 *Dada una función integrable f sobre $[a,b]$ definimos una nueva función $F(x)$ sobre $[a,b]$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Observación 4 *F así definida es continua en $[a,b]$.*

Observación 5 *Si f es continua sobre $[a,b]$ entonces f es integrable sobre $[a,b]$.*

Teorema 11 Teorema Fundamental del Cálculo *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y definimos F sobre $[a,b]$ por $F(x) = \int_a^x f$. Si f es continua en $c \in [a,b]$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Corolario 12 *(***Regla de Barrow) Si f continua en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g entonces**

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Observación 6 *El corolario anterior se da también con f integrable.*

Ejemplo 12.- Sea $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$ con g, h derivables y f continua. F es derivable y calcula su derivada.

1.4 Integración numérica

Aproximación de sumas mediante rectángulos (extremo izquierdo, extremo derecho, punto medio), mediante trapecios (Regla del trapecio) y mediante parábolas (La Regla de Simpson). Errores en estos métodos. Comparaciones entre estos métodos. Implementación de los métodos en prácticas.

1.5 Integrales impropias

Definicion 13 *Decimos que una integral $\int_a^b f(x)dx$ es impropia si $f(x)$ no esta acotada en $[a, b]$. o También si el intervalo de integración es no acotado. Definiremos las integrales impropias como límite de integrales definidas. De manera que hablaremos de integrales convergentes, divergentes o que no convergen.*

Ejemplo 13.- $\int_b^\infty \frac{1}{x^a} dx$, $b > 0$.

Observación 7 *En general $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$, valor principal*

Ejemplo 14.- Calcula

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Proposición 14 *Criterio de Comparación. Criterio del Límite. Linealidad de las integrales impropias convergentes. Criterio de comparación en el límite. Convergencia absoluta.*

Ejemplo 15.- $\int_{-1}^{\infty} \frac{x^2}{(2+x^2)^2} dx$
Ejemplo 16.- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{(x^\alpha} dx$

Ejemplo 17.- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Ejemplo 18.- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Ejemplo 19.- $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$

Ejemplo 20.- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$

Ejemplo 21.- $\int_0^1 \frac{1}{t(2-t)} dt$

Observación 8 *En general* $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ *con* $gr(P) < gr(Q)$ *y* $Q(x) \neq 0$ *en* $[a, \infty)$ *tenemos que*

Si $gr(Q) - gr(P) \geq 2$ *converge*

Si $gr(Q) - gr(P) = 1$ *diverge*

Observación 9 *Relación entre integrales impropias y series.*

1.6 Aplicaciones de la integral

Cálculo de áreas de figuras planas, de áreas encerradas entre curvas, áreas y volumenes de superficies de revolución, áreas encerradas por curvas en paramétricas (coordenadas polares), cálculo de longitud de arco, aplicaciones a la física (trabajos, espacios recorridos, momentos, centro de masas), aplicaciones a la estadística (funciones Beta y Gamma de Euler, valores promedios, distribuciones normales), etc.

1.7 Problemas propuestos

Problema 1.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\ \int \sin^5(x)\cos(x)dx, \quad (b)\ \int \tan(x)dx, \quad (c)\ \int \frac{1}{x\log(x)}dx,$$

$$(d)\ \int \frac{x}{1+x^2}dx, \quad (e)\ \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx, \quad (f)\ \int \sqrt{1-x^2}dx,$$

Problema 2.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\ \int xe^x dx, \quad (b)\ \int x\sin(x)dx, \quad (c)\ \int \log(x)dx,$$

$$(d)\ \int \frac{\log(x)}{x}dx, \quad (e)\ \int e^x\sin(x)dx, \quad (f)\ (\int \log(x))^2dx,$$

Problema 3.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\int (3x^2-2x^4)e^{3x}dx, \qquad (b)\int e^{kx}\sin ax dx, \qquad \int \frac{x^5+4x^3+2x^2+2x-6}{x^3-1}dx$$

Problema 4.- Calcula las siguientes integrales

$\int \frac{dx}{(\mathrm{sen} x)^2\cdot(\cos x)^2}$ $\quad \int \frac{3^x+1}{9^x-4}\,dx$ $\quad \int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$\int \frac{dx}{\sinh x+2\cosh x}$ $\quad \int \frac{2x-3}{(x-1)(x+7)}\,dx$ $\quad \int \frac{1}{x(\log x)^7}\,dx$

$\int e^x\,\mathrm{sen} e^x\,dx$ $\quad \int e^x\,\mathrm{sen} x\,dx$ $\quad \int \frac{x}{(3x^2+5)^2}\,dx$

$\int x\arccos x\,dx$ $\quad \int \mathrm{sen}^4 x\,dx$ $\quad \int \mathrm{sen}^2 x\cdot\cos^3 x\,dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ $\quad \int \sqrt{1+e^x}\,dx$ $\quad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

$\int \frac{2x^3-3x+5}{x}\,dx$ $\quad \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$ $\quad \int \frac{2x-3}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ $\quad \int \frac{x^2-2x+2}{x^3-1}\,dx$ $\quad \int xe^{x^2}\,dx$

Problema 5.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\int \sin^5(x)\cos(x)dx, \quad (b)\int \tan(x)dx, \quad (c)\int \frac{1}{x\log(x)}dx,$$

$$(d)\int \frac{x}{1+x^2}dx, \quad (e)\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx, \quad (f)\int \sqrt{1-x^2}dx,$$

Problema 6.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\int xe^x dx, \quad (b)\int x\sin(x)dx, \quad (c)\int \log(x)dx,$$

$$(d)\int \frac{\log(x)}{x}dx, \quad (e)\int e^x\sin(x)dx, \quad (f)\ (\int \log(x))^2dx,$$

Problema 7.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\int (3x^2-2x^4)e^{3x}dx, \qquad (b)\int e^{kx}\sin ax dx, \qquad \int \frac{x^5+4x^3+2x^2+2x-6}{x^3-1}dx$$

Problema 8.- Calcula las siguientes integrales

$\int \frac{dx}{(\text{sen}x)^2\cdot(\cos x)^2}$ $\qquad \int \frac{3^x+1}{9^x-4}\,dx$ $\qquad \int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$\int \frac{dx}{\sinh x+2\cosh x}$ $\qquad \int \frac{2x-3}{(x-1)(x+7)}\,dx$ $\qquad \int \frac{1}{x(\log x)^7}\,dx$

$\int e^x\,\text{sen}e^x\,dx$ $\qquad \int e^x\,\text{sen}x\,dx$ $\qquad \int \frac{x}{(3x^2+5)^2}\,dx$

$\int x\arccos x\,dx$ $\qquad \int \text{sen}^4x\,dx$ $\qquad \int \text{sen}^2x\cdot\cos^3x\,dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ $\qquad \int \sqrt{1+e^x}\,dx$ $\qquad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

$\int \frac{2x^3-3x+5}{x}\,dx$ $\qquad \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$ $\qquad \int \frac{2x-3}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ $\qquad \int \frac{x^2-2x+2}{x^3-1}\,dx$ $\qquad \int xe^{x^2}\,dx$

Problema 9.- Calcula las siguientes integrales

$$(a)\ \int \frac{1-3x}{((x+3)^2+1)^2}dx, \quad (b)\ \int \frac{x+52}{(x+2)(x^2-2x+2)^2}dx$$

Problema 10.- Decide cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre $[0,2]$ y calcula el valor de la integral cuando ésta exista:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x-2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = x + [x] \qquad l(x) = \begin{cases} x+[x] & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Problema 11.- Dar un ejemplo de función f definida en un intervalo $[a,b]$, no integrable y tal que f^2 sea integrable.

Problema 12.- a) Demuestra que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\ .$$

b) Demuestra que si $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

c) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, ¿es $f \equiv 0$?

d) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, ¿es $f \equiv 0$?

Problema 13.- Comprueba que

$$2 \leqslant \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx \leqslant \sqrt{20}$$

sin calcular la integral.

Problema 14.- Expresa como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)k}{n^3}$$

Problema 15.- Calcula:

$$i)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x^2+1)} \qquad\qquad ii)\ \int_2^\infty \frac{dx}{1-x^3}$$

Problema 16.- a) Demuestra que $\int_1^\infty a^{-x}\,dx$ converge cuando $a>1$.

b) Estudia la convergencia de $\int_2^\infty \frac{1}{(\log x)^x}\,dx$.

Problema 17.- Calcula la integral $I_x = \int_0^x e^{-2t}\cos^2 t\,dt$. Como consecuencia, $I = \int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 t\,dt$.

Problema 18.- Estudia la convergencia de $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{sen}(x^\alpha)}$ para $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Problema 19.- Estudia la convergencia de

$$i)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad ii)\ \int_1^\infty \frac{x+2}{x^3+x}\,dx \qquad iii)\ \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15}$$

$$iv)\ \int_1^2 \frac{x+1}{4-x^2}\,dx \qquad v)\ \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} \qquad vi)\ \int_0^\infty \frac{dx}{\log x\ -\ 1}$$

Problema 20.- a) Comprueba que para cada valor de $p>0$

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,dx \qquad \text{es convergente.}$$

b) Comprueba que si $\alpha \in (-2,0)$,

$$\int_0^\infty x^\alpha \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{es convergente.}$$

Problema 21.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t)e^{-t^2}\,dt\ .$$

Problema 22.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{\sqrt{x}} s\log(s^2+1)\,ds$,

a) calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) encuentra $f(1)$.

Capítulo 2

CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

2.1 Introducción

Aspectos geométricos de la integral doble. Principio de Cavalieri. Integrales iteradas.
Ejemplo 22.- $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$, $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$.

Observación 10 *Diferentes notaciones para las integrales en varias variables*

2.2 Primeras definiciones y propiedades. Teorema de Fubini

Definicion 15 *Definición de suma de Riemann en $\mathbb{R}^2$. Definición de una función integrable sobre un intervalo de $\mathbb{R}^2$ (rectángulo). Definición de suma de Riemann en $\mathbb{R}^3$. Definición de una función integrable sobre un intervalo de $\mathbb{R}^3$ (paralelepípedo rectangular). En general.*

Observación 11 *Sea $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua entonces es integrable.*

Definición de conjunto de medida (longitud, area, volumen, etc) cero.

Sea $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre I y tal que el conjunto donde es discontinua tiene medida cero, entonces f es integrable en I.

Proposición 16 *Sean f, g funciones integrables en el intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$ y sea $c \in \mathbb{R}$ entonces $f + g$ y cf son integrables y tenemos que*

(i) (Linealidad)

$$\int_I [f(x_1 \cdots x_n) + g(x_1 \cdots x_n)]dx = \int_I f(x_1 \cdots x_n)dx + \int_I g(x_1 \cdots x_n)dx$$

(ii) (Homogeneidad)

$$\int_I cf(x_1 \cdots x_n)dx = c\int_I f(x_1 \cdots x_n)dx$$

(iii) (Monotonía) Si $f(x_1 \cdots x_n) \geq g(x_1 \cdots x_n)$, entonces

$$\int_I f(x_1 \cdots x_n)dx \geq \int_I g(x_1 \cdots x_n)dx$$

(iv) (Aditividad) Si I_k $k = 1 \cdots m$, son intervalos disjuntos dos a dos y tales que f es integrable sobre cada I_k, si $I = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ es un intervalo entonces f es integrable sobre I y se tiene que

$$\int_I f(x_1 \cdots x_n)dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{I_k} f(x_1 \cdots x_n)dx$$

Observación 12

$$\Big| \int_I f \Big| \leq \int_I |f|$$

Observación 13 *Valor promedio de funciones. Teorema del valor medio para integrales.*

Teorema 17 *(Teorema de Fubini) Sea f una función continua cuyo dominio es un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \int_R f(x, y)dA$$

Observación 14 *Este teorema seguira siendo válido si la función es discontinua en un conjunto de mediada cero pero en ese caso hay que tener más cuidado en el enunciado. También va a ser cierto si estamos en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 23.- Integra la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Comprueba el teorema de Fubini.

Ejemplo 24.- Integra $f(x, y, z) = x^2$ sobre la caja $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Comprueba el teorema de Fubini.

2.3 La integral doble sobre regiones más generales

Definicion 18 *Regiones elementales del plano: regiones del tipo 1, 2 y 3. Frontera.*

Definicion 19 *Integral de una función continua sobre una región elemental.*

Ejemplo 25.- $\int_T (x^3 y + \cos x) dA$ donde T es el triángulo de todos los puntos que satisfacen $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq x$.

Ejemplo 26.- Encontrar el volumen del tetraedro acotado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ y el plano $y - x + z = 1$.

2.3.1 La integral triple sobre regiones más generales

Definicion 20 *Regiones elementales del espacio: regiones del tipo 1, 2, 3 y 4. Frontera.*

Definicion 21 *Integral de una función continua sobre una región elemental.*

Observación 15 *En general no sabemos interpretar geometricamente $I_W f dV$ pero si $f = 1$ entonces $I_W 1 dV = volumen(W)$.*

Ejemplo 27.- Verificar la fórmula del volumen de una esfera de centro el origen y radio 1.

Ejemplo 28.- Calcular $\int_W x dx dy dz$ donde W es la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

2.3.2 Cambio en el orden de integración

Observación 16 *Si una región es del tipo 3, podemos integrar sobre ella como del tipo 1 o del tipo 2. Ambas integrales han de ser iguales. Pasar de una a otra de estas integrales es lo que se llama cambiar el orden de integración.*

Ejemplo 29.- Evalúa cambiando el orden de integración $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}dydx$
Ejemplo 30.- Calcula $\int_1^2 \int_0^{\log x}(x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dydx$

2.4 Cambios de variables

2.4.1 Geometría de las funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$

Tenemos la idea de ver geométricamente como una cierta región D se transforma mediante una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Ejemplo 31.- Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$, $D^* = [0,1] \times [0,2\pi]$ Sea $T(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta))$, $>$ $T(D^*)$?.
Ejemplo 32.- Sea $T(x,y) = ((x+y)/2, (x-y)/2)$. Sea $D^* = [-1,1] \times [-1,1]$.

Observación 17 *Definición de función uno-uno en $\mathbb{R}^2$. Su significado geométrico. Ejemplos.*

2.4.2 Cambios de variable en $\mathbb{R}^2$. Coordenadas polares

Igual que hacemos el cambio de variable en integrales de una variable nos gustaría poder hacerlo en integrales de dos variables.

Observación 18 *Definiremos el jacobiano de T y lo denotaremos por $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|$al determinante*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Observamos que $A(D) = \int_D dxdy = \int_{D^*} |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$

Ejemplo 33.- La transformación anterior en polares.

Teorema 22 *(Cambio de variables para integrales dobles) Sean D y D^* regiones elementales en el plano, y sea $T : D^* \to D$ una transformación C^1 y uno-uno en D^*, si $D = T(D^*)$ entonces para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$ tenemos que*

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$$

Ejemplo 34.- Sea P el paralelogramos acotado por $y = 2x$, $y = 2x-2$, $y = x$ e $y = x+1$. Calcula $\int_P xydxdy$haciendo el cambio de variables $x = u - v$, $y = 2u - v$, esto es, T(u,v)=(u-v,2u-v).

Ejemplo 35.- Evalúa $\int_D log(x^2 + y^2)dxdy$ donde D es la región del primer cuadrante entre los arcos de los círculos $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $(0 < a < b)$.

Ejemplo 36.- Calcula $\int_R \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ $r = [0,1] \times [0,1]$.

2.4.3 Coordenadas cilíndricas y esféricas

Repaso de la definición de coordenadas cilíndricas y esféricas

Observación 19 *Versión del teorema de cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^3$. Calculo del jacobiano para las coordenadas cilíndricas y esféricas.*

Ejemplo 37.- Calcula $\int_D exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}dV$, donde D es la bola unitaria.

Ejemplo 38.- Calcula el volumen de la esfera utilizando coordenadas esféricas.

2.5 Aplicaciones

Areas, volúmenes, centro de gravedad, densidad media, momento de inercia, etc.

2.6 Problemas propuestos

Problema 23.- Calcula las siguientes integrales:

$$\int\int_Q (xye^{x+y}dxdy), \quad \int_Q |y|\cos(\frac{\pi x}{4})dxdy, \quad \int_D ye^{xy}dxdy, \quad \int\int_D (xy)^2\cos x^3 dxdy$$

donde $Q = [0,2]\times[-1,0]$ y $D = [0,1]\times[0,1]$.

Problema 24.- Calcúla la siguiente integral triple:

$\int_I \frac{z^2y-zx^2-zx^4}{1+x^2}\,dx\,dy\,dz$, con $I = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Problema 25.- Calcula las siguientes integrales después de dibujar las regiones sobre las que se integra:

$$\int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx \ , \quad \int_0^1\int_1^{e^x} (x+y)\,dy\,dx \ , \quad \int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\,dy\,dx \ , \quad \int_{-3}^2\int_0^y (x^2+y)\,dx\,dy$$

Problema 26.- a) Si Ω es la región acotada limitada por el eje Y y la parábola $x = -4y^2+3$, obten

$$\int_\Omega x^3y\,dx\,dy$$

b) Si $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y,\ 1\le x^2+y^2\le 2\}$, evaluad

$$\int\int_D (1+xy)\,dx\,dy$$

Problema 27.- Representad la región del plano, D, comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Obten

$$\iint_D (x^2-y)\,dx\,dy \ .$$

Problema 28.- Dibuja el recinto del plano, R, encerrado entre las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$. Calcula

$$\iint_R xy\,dx\,dy \ .$$

Problema 29.- Dada la integral iterada $\displaystyle\int_1^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{(x+y^2)^{\frac{1}{2}}} \Big) dx$, exprésala como una integral doble sobre cierta región de $\mathbb{R}^2$. Representad dicha región y, por último, obten el valor de la integral.

Problema 30.- Halla el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ y los planos $z = 0$ y $z = y + 3$.

Problema 31.- Si D es el círculo de radio 1 y centro $(0,0)$, mediante un cambio a coordenadas polares calcula:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \ , \qquad \int_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy \ , \qquad \iint_D (1+x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy$$

Problema 32.- Sea D la región del primer cuadrante dada por la intersección de los siguientes subconjuntos del plano: $x^2+y^2 \geq 4$, $x^2+y^2 \leq 9$, $x^2-y^2 \geq 1$ y $x^2-y^2 \leq 4$. Obten

$$\iint_D xy\,dx\,dy \ .$$

Problema 33.- Halla el área comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=2x$ y $x^2+y^2=4x$ y las rectas $y=x$ e $y=0$. (Indicación: exprésalo como una integral doble y cambiar a coordenadas polares.)

Problema 34.- Utiliza un conveniente cambio de variable (sugerencia: lineal) para evaluar la integral

$$\iint_P (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\,dx\,dy\,,$$

donde P es el paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$.

Problema 35.- Calcula

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy \ ,$$

donde D es el triángulo limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

Problema 36.- Determina el valor medio del producto de tres números que varían en el intervalo $[0,1]$.

Problema 37.- Sea la placa situada en el plano XY dada por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 4x-x^3\}$, cuya densidad (variable) es $\delta(x,y)=x+y$. Calcúla:

a) el área de la pieza.

b) su centro de gravedad.

c) su densidad media.

d) su momento de inercia respecto del origen de coordenadas.

Problema 38.- Si V es el sólido del octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$, halla

$$\iiint_V x\, y^2\, z^3\, dx\, dy\, dz$$

Problema 39.- Halla la integral triple

$$\iiint_\Omega z\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz\ ,$$

donde $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z \leq 0\,;\ 1 \leq z \leq 2\}$

Problema 40.- Si V es el sólido limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 4$, calcula

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

2.7 Algunos problemas resueltos

```
> restart:
> with(student):
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> T:=vector([sqrt((u+v)/2), sqrt((u-v)/2)]);
```

$$T := \left[\frac{1}{2}\sqrt{2\,u+2\,v},\ \frac{1}{2}\sqrt{2\,u-2\,v}\right]$$

```
> J1:=jacobian(T,[u,v]);
```

$$J1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,u+2\,v}} & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,u+2\,v}} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,u-2\,v}} & -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,u-2\,v}} \end{bmatrix}$$

```
> simplify(det(J1));
```

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,u+2\,v}\sqrt{2\,u-2\,v}}$$

```
> diff(sqrt(x/2),x);
```

$$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

```
> int(int(1,y=sqrt(2*x-x^2)..x),x=1..2);
```

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\pi$$

```
> int(int(1,y=0..sqrt(4*x-x^2)),x=2..4);
```

$$\pi$$

```
> 3/2-1/4*Pi+Pi;
```

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\pi$$

```
> Int(int(r,r=2*cos(t)..4*cos(t)),t=0..Pi/4);
```

$$\int_0^{1/4\,\pi} 6\cos(t)^2\,dt$$

```
> int(int((x-y)^2*sin(x+y)^2,y=Pi-x..Pi+x),x=0..Pi);
```

$$\frac{1}{6}\pi^4$$

```
> int(int((x-y)^2*(sin(x+y))^2,y=-Pi+x..3*Pi-x),x=Pi..2*Pi);
```

$$\frac{1}{6}\pi^4$$

```
> int(int(u^2*sin(v)^2/2,v=Pi..3*Pi),u=-Pi..Pi);
```

$$\frac{1}{3}\pi^4$$

```
> int(int(1/2*exp(u/v),u=-v..0),v=0..1);
```

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{(-1)}$$

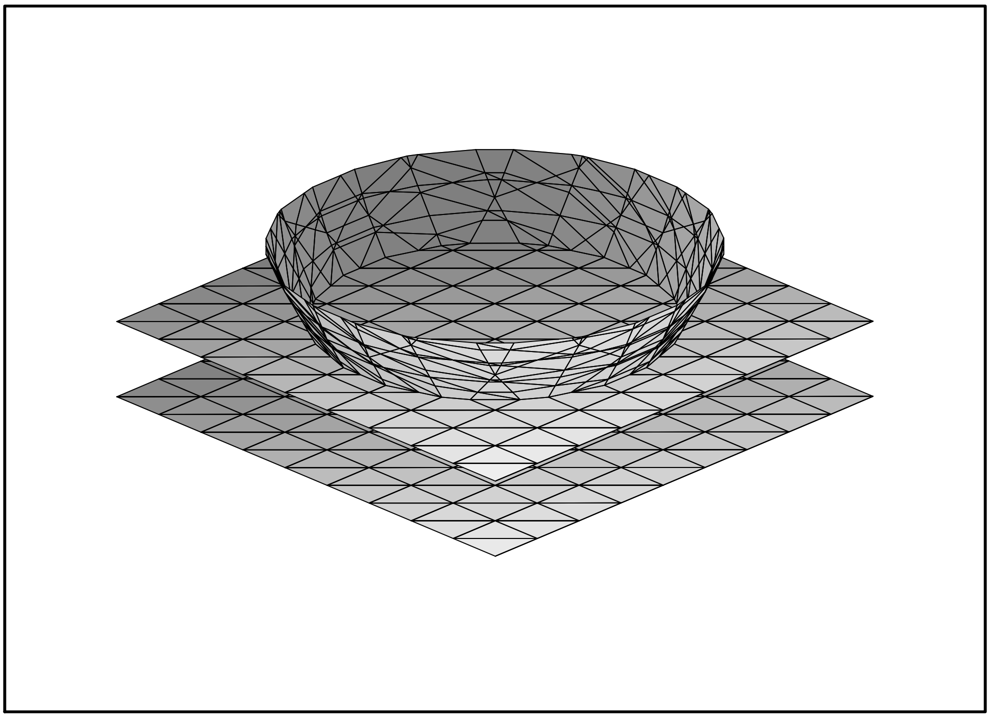
```
> int(int(1/2*exp(u/v),u=0..v),v=0..1);
```

$$\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}$$

```
> 1/4-1/4*exp(-1)+1/4*exp(1)-1/4;
```

$$-\frac{1}{4}e^{(-1)}+\frac{1}{4}e$$

```
> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> implicitplot3d({z=x^2+y^2,z=1,z=2},x=-2..2,y=-2..2,z=0..3);
```



```
> simplify(int(int(int(z*exp(x^2+y^2),x=1..sqrt(2)),y=0..sqrt(z-
x^2)),z
> =1..2.));
```

$$\begin{aligned}&-0.1000000000\,10^{-10}(0.2709138458\,10^{12}\,I\,\mathrm{erf}(1.\,I\,\sqrt{2.-1.\,x^2})\,e^{(-2.+x^2)}\\&+0.8335810641\,10^{11}\,I\,x^2\,\mathrm{erf}(1.\,I\,\sqrt{2.-1.\,x^2})\,e^{(-2.+x^2)}\\&-0.8335810641\,10^{11}\,I\,\mathrm{erf}(1.\,I\,\sqrt{2.-1.\,x^2})\,e^{(-2.+x^2)}\,x^4\\&+0.2351488769\,10^{11}\,\sqrt{2.-1.\,x^2}+0.4702977533\,10^{11}\,x^2\,\sqrt{2.-1.\,x^2}\\&-0.2083952659\,10^{11}\,I\,e^{(-2.+x^2)}\,\mathrm{erf}(1.\,I\,\sqrt{1.-1.\,x^2})\\&-0.8335810640\,10^{11}\,I\,e^{(-2.+x^2)}\,\mathrm{erf}(1.\,I\,\sqrt{1.-1.\,x^2})\,x^2\\&+0.8335810640\,10^{11}\,I\,e^{(-2.+x^2)}\,\mathrm{erf}(1.\,I\,\sqrt{1.-1.\,x^2})\,x^4\\&+0.8650643753\,10^{10}\,\sqrt{1.-1.\,x^2}-0.1730128748\,10^{11}\,x^2\,\sqrt{1.-1.\,x^2})e^{(2.-1.\,x^2)}\end{aligned}$$

```
> int(int(int(z*r*exp(r^2),r=0..sqrt(z)),z=1..2),t=0..2*Pi);
```

$$-\frac{3}{2}\,\pi+e^2\,\pi$$

```
> int(int(int(r^2*sin(s)*exp(r^3),r=0..1),s=0..Pi),t=0..2*Pi);
```

$$\frac{4}{3}\,e\,\pi-\frac{4}{3}\,\pi$$

```
> int(int(int(r^2*sin(s)/r^3,r=1..2),s=0..Pi),t=0..2*Pi);
```

$$4\,\pi\ln(2)$$

```
> 2*int(int(x+y,y=0..4*x-x^3),x=0..2);
```

$$\frac{128}{7}$$

```
> 2^7;
```

$$128$$

```
> int(int(x+y,y=4*x-x^3..0),x=-2..0);
```

$$\frac{-64}{7}$$

```
> int(int(x*(x+y),y=4*x-x^3..0),x=-2..0);
```

$$\frac{32}{3}$$

```
> int(int(x*(x+y),y=0..4*x-x^3),x=0..2);
```

$$\frac{32}{3}$$

```
> int(int(y*(x+y),y=4*x-x^3..0),x=-2..0);
```

$$\frac{208}{15}$$

```
> int(int(y*(x+y),y=0..4*x-x^3),x=0..2);
```

$$\frac{416}{15}$$

```
> 2*32/3;
```

$$\frac{64}{3}$$

```
> (64/3)/(128/7);
```

$$\frac{7}{6}$$

```
> (416/15)/(128/7);
```

$$\frac{91}{60}$$

```
> 128/56;
```

$$\frac{16}{7}$$

```
> int(int((x^2+y^2)*(x+y),y=4*x-x^3..0),x=-2..0);
```

$$\frac{-611584}{15015}$$

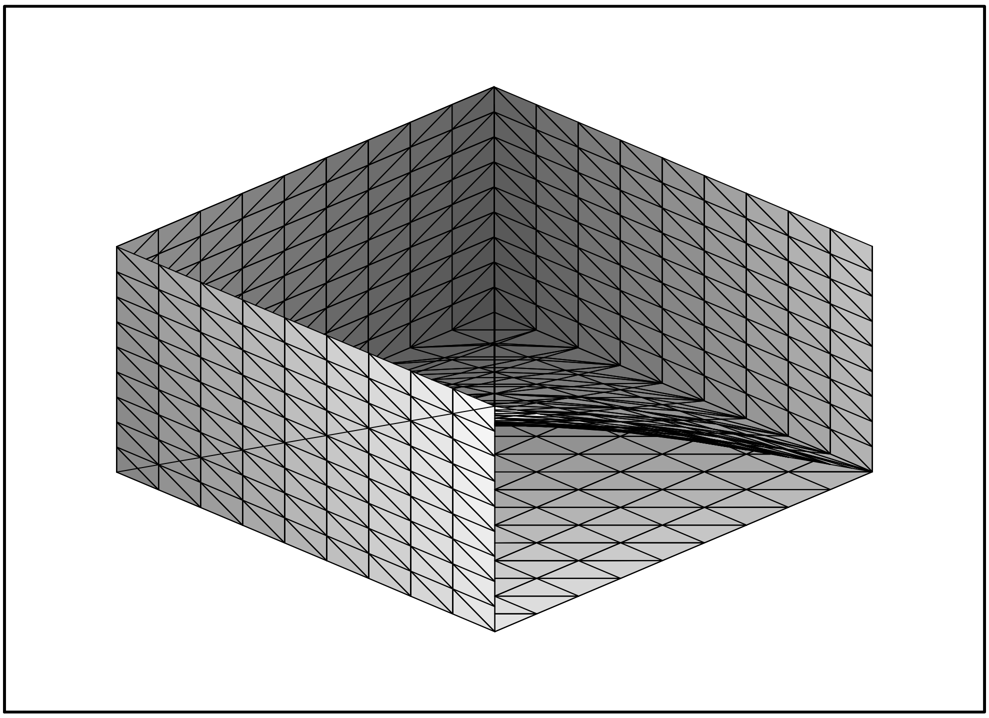
```
> int(int((x^2+y^2)*(x+y),y=0..4*x-x^3),x=0..2);
```

$$\frac{611584}{15015}$$

```
> 2.*611584/15015;
```

$$81.46307026$$

```
> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> implicitplot3d({x=0,y=0,z=0,x=1,y=x,z=y*x},x=0..1,y=0..1,z=0..1);
```



```
> int(int(int(x*y^2*z^3,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1);
```

$$\frac{1}{364}$$

```
> Int(Int(Int(x*y^2*z^3,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1)=Int(Int(int(x*y^2*z^3
> ,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{y\,x} x\,y^2\,z^3\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{4}\,x^5\,y^6\,dy\,dx$$

```
> Int(Int(int(x*y^2*z^3,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1)=Int(int(int(x*y^2*z^3
> ,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{4}\,x^5\,y^6\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{28}\,x^{12}\,dx$$

```
> Int(int(int(x*y^2*z^3,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1)=int(int(int(x*y^2*z^3
> ,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{28}\,x^{12}\,dx = \frac{1}{364}$$

```
> int(int(int(1,z=0..x*y),y=0..x),x=0..1);
```

$$\frac{1}{8}$$

Capítulo 3

Integrales de línea. Teorema de Green

3.1 Introducción

Recordamos la definición de trayectoria: $\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ velocidad, rapidez y aceleración. Definimos la longitud de arco. Función longitud de arco.

Ejemplo 39.- Cálculo de la longitud de una circunferencia de radio r.

Ejemplo 40.- Cálculo de la longitud de arco de la hélice $\sigma(t) : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(t) = (\cos(2t), \text{sen}(2t), \sqrt{5}t)$.

Recordamos la definición de campo vectorial, campo gradiente o conservativo, y función potencial.

Ejemplo 41.- $f(x, y) = x^2 + y^2,\ F(x, y) = \nabla f(x, y) = (2x, 2y)$.

Ejemplo 42.- $F(x, y) = (y, x)$, $f(x, y) = xy$.

Ejemplo 43.- $F(x, y) = (2xy, x^2)$, $f(x, y) = x^2y$

Pregunta 1.-¿Se te ocurre alguna manera de distinguir si un determinado campo vectorial es un campo gradiente de alguna función potencial?

Pregunta 2.-¿Se te ocurre algún método para calcular dado un cierto campo vectorial gradiente de qué función potencial viene?

Integración de funciones escalares sobre trayectorias (temperatura de una varilla, masa de un alambre, etc.)

Integración de funciones vectoriales sobre trayectorias (trabajo realizado por un campo vectorial para mover una partícula a lo largo de una trayectoria, etc.)

Integrales de línea en campos conservativos, veremos su relación con los conceptos de trabajo en campos conservativos y conservación de la energía.

El teorema de Green nos va a relacionar una integral de línea a lo largo de una curva cerrada con una integral doble sobre la región encerrada por la curva.

3.2 Integrales de línea de funciones escalares (Integrales de trayectoria)

Definicion 23 *Sea $\sigma(t) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ C^1 y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $t \longmapsto f(x(t), y(t), z(t))$ es continua en I entonces definimos la integral de línea de la función escalar f sobre la trayectoria σ a la integral*

$$\int_\sigma f = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))||\sigma'(t)||dt$$

Observación 20 *Observar que si f es la función 1 la integral de línea nos da la longitud de arco.*

Ejemplo 44.- Calcula $\int_C 2 + x^2yds$ donde C es la mitad superior de la circunferencia unidad.

Ejemplo 45.- Sea $\sigma(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (\cos(t), \text{sen}(t), t)$ y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcula $\int_\sigma f$.

Ejemplo 46.- Evalúa $\int_C 2xds$ donde C consiste en el arco C_1 de la parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido por el segmento de recta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

Observación 21 *En el caso que la curva sea plana y $f(x, y) \geq 0$, interpretaremos la integral como el área de una valla de base la curva y altura la función f*

Ejemplo 47.- Sabiendo que con un litro de pintura pintamos un metro cuadrado de valla queremos saber cuánta pintura necesitaremos para pintar una valla de altura variable $f(x, y) = x + y$ y la base esta apoyada sobre la recta (t,t) con $t \in [0, 10]$.

Observación 22 *A veces querremos integrar la función f sobre la curva C con respecto a x e y (y z). A esto lo llamaremos integral de f sobre la curva C con respecto al x, a y (o a z). (Se distingue de la anterior porque o no decimos nada o bien decimos con respecto a la longitud de arco). En este caso tenemos:*

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt$$

$$\Big(\int_C f(x,y,z)dz = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\Big)$$

A menudo estas integrales se presentan al mismo tiempo y a veces se abrevia su expresión de la siguiente manera

$$\int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

o en $\mathbb{R}^3$:

$$\int_C P(x,y,z)dx+\int_C Q(x,y,z)dy+\int_C R(x,y,z)dz = \int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

Ejemplo 48.- Calcula $\int_C y^2dx + xdy$ para

(a) $C = C_1$ el segmento de la recta que une los puntos $(-5,-3)$ y $(0,2)$.

(b) $C = C_2$ el segmento de la recta que une los puntos $(0,2)$ y $(-5,-3)$.

(c) $C = C_3$ es el arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5,-3)$ y $(0,2)$.

Observación 23 *Observar que el valor de la integral de linea no sólo depende de los puntos finales de la curva sino también de la trayectoria seguida. Y de la orientación.*

Ejemplo 49.- Sea $\sigma(t) : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (\cos(t),\text{sen}(t),t)$. Calcula $\int_\sigma y\text{sen}zds$.

Ejemplo 50.- Calcula $\int_C ydx + zdy + xdz$ donde C consiste en el segmento de recta C_1 que va desde $(2,0,0)$ a $(3,4,5)$ seguido por el segmento de recta vertical C_2 que va desde $(3,4,5)$ a $(3,4,0)$.

Observación 24 *Una aplicación de la integral de linea es el valor promedio de la integral de la función f sobre la trayectoria σ como*

$$f_{prom} = \frac{1}{l(\sigma)} \int_\sigma f$$

Ejemplo 51.- Encontrar el promedio de las y-coordenadas de los puntos en el semicírculo parametrizado por $\sigma(t) : [0, pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (0, a\text{sen}(t), a\cos(t))$.

3.3 Integrales de línea de funciones vectoriales (Integrales de línea)

La motivación para la definición de integral de línea de un campo vectorial F a lo largo de σ es la idea de trabajo realizado por un campo vectorial al mover una partícula a lo largo de la trayectoria σ.

Definicion 24 *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$ *continuo en la trayectoria* C^1 $\sigma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. *Definimos la integral de línea de F a lo largo de σ por la fórmula*

$$\int_\sigma \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t))\sigma'(t)dt$$

Observación 25 *El trabajo es la integral con respecto a la longitud de arco de la componente tangencial de la fuerza.*

Ejemplo 52.- Calcula $\int_\sigma \mathbf{F}$ siendo $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$ y $\mathbf{F} = (xy, yz, zx)$, $t \in [0, 1]$.
Ejemplo 53.- Calcula $\int_\sigma \mathbf{F}$ siendo $\sigma(t) = (\text{sen}t, \cos t, t)$ y $\mathbf{F} = (x, y, z)$, $t \in [0, 2\pi]$

Observación 26 *Si escribimos la integral en componentes tendremos*

$$\int_\sigma \mathbf{F} = \int_a^b P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Ejemplo 54.- $\int_\sigma x^2dx + xydy + dz$ con $\sigma(t) = (t, t^2, 1)$ y $t \in [0, 1]$
Ejemplo 55.- $\int_\sigma \cos zdx + e^xdy + e^ydz$ con $\sigma(t) = (1, t, e^t)$ y $t \in [0, 2]$.
Ejemplo 56.- Sea $\sigma(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^3 t, t)$ con $t \in [0, 7\pi/2]$ calcula la integral $\int_\sigma \sin zdx + \cos zdy - (xy)^{1/3}dz$.

Observación 27 *Si la integral de linea se puede entender como el trabajo realizado por el campo ¿qué significa que el trabajo sea cero o negativo?*

Ejemplo 57.- $F(x, y, z) = (x^3, y, z)$ sobre el círculo plano $g(t) = (0, \cos t, \text{sen} t)$ y sobre $\sigma(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^3 t, t)$.

Ejemplo 58.- Encuentra el trabajo hecho por el campo de fuerza $F(x, y) = (x^2, -xy)$ al mover una partícula a lo largo de la cuarta parte del primer cuadrante del círculo unidad (con las dos orientaciones).

Observación 28 *Reparametrización. Curva simple. Extremos. Curva cerrada simple. Orientación positiva y negativa. Atención al número de veces que se recorre una curva según la parametrización.*

3.4 Integrales de línea en campos conservativos

Observación 29 *Recordamos campos conservativos (gradientes), función potencial, etc.*

Tenemos una cierta generalización del teorema fundamental del cálculo siempre que el campo sea conservativo y entendiendo el gradiente como una derivada.

Teorema 25 *Sea C una curva suave dada por $r(t)$, $a \le t \le b$, con f una función derivable de 2 o 3 variables tal que ∇f es continuo sobre C. Entonces:*

$$\int_C \nabla f dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Observación 30 *Si F es un campo conservativo la integral de línea no depende de la trayectoria que siga.*

Si F es un campo conservativo su integral de línea sobre una trayectoria cerrada es cero.

Se puede demostrar que los únicos campos vectoriales que son independientes de las trayectorias son los campos conservativos.

Un campo $F = (P, Q)$ es conservativo si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (Y similar en $\mathbb{R}^3$).

Conservación de la energía.

Ejemplo 59.- Determina si el campo $F(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$ es conservativo.

Ejemplo 60.- Idem $F(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$. Y en caso positivo encuentra f tal que $\nabla f = F$. Calcula la integral de F sobre la curva $r(t) = e^t \text{sen} t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}$.

Ejemplo 61.- Si $F(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$. Encontrar f tal que $\nabla f = F$.

Ejemplo 62.- Sea C la curva parametrizada por $r(t) = (t^4/4, \text{sen}^3(t\pi/4), 0)$, $t \in [0, 1]$ y $F(x, y, z) = (y, x, 0)$, calcula $\int_C F$.

3.5 Teorema de Green

Observación 31 *Recordar las definiciones de Divergencia y Rotacional de un campo vectorial.* rot$F = \nabla \times F$, div$F = \nabla \cdot F$, rot$\nabla f = 0$, div rot $F = 0$, etc.

Teorema 26 Teorema de Green *Sea D una región de tipo 3 y sea C su frontera. Sean $P,\ Q : D \to \mathbb{R}\ C^1$, entonces*

$$\int_{C+} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Ejemplo 63.- Verifica el teorema de Green con $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = xy$ y D el disco unidad.

Ejemplo 64.- Calcula $\int_C x^4dx + xydy$ donde C es la curva triangular que une los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, 0)$.

Teorema 27 *Sea C una curva cerrada simple que acota una región a la que se le puede aplicar el teorema de Green, entonces el área A de la región D acotada por C viene dada por la expresión*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

Ejemplo 65.- Calcula el área encerrada por el astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Teorema 28 *(Teorema de Green en forma vectorial) Sea D de tipo 3 y ∂D su frontera orientada positiva. Sea $F = (P, Q)$ C^1 en D, entonces*

$$\int_{\partial D} F = \int\int_D \mathrm{rotF} \cdot \mathbf{k}\mathrm{dA} = \int\int_{\mathrm{D}} \nabla \times \mathrm{FdA}$$

Observación 32 *También tenemos el teorema de la divergencia en el plano*

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int \int_D \mathrm{divF}$$

Observación 33 *El teorema de Green en regiones con agujeros.*

3.6 Problemas propuestos

Problema 41.- Obtén las longitudes de:

a) El astroide $\mathcal{A}$ dado por $\sigma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $\sigma(t) = (\cos^3 t,\ \text{sen}^3\, t)$.

b) La hélice $\mathcal{H}$ dada por $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = (r \cos t,\ r\, \text{sen}\, t,\ kt)$.

Problema 42.- Calcula las integrales:

$$1) \int_{\mathcal{C}} x\, ds \qquad 2) \int_{\mathcal{C}} y\, ds \qquad 3) \int_{\mathcal{C}} (x + y)\, ds \qquad 4) \int_{\mathcal{C}} xy\, ds$$

donde $\mathcal{C}$ es:

i) El astroide $\mathcal{A}$ del apartado a) del ejercicio anterior.

ii) La hélice $\mathcal{H}$ del apartado b) del ejercicio anterior.

iii) La circunferencia centrada en el origen y de radio 2.

Problema 43.- Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Evalua la integral de F a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) $\sigma(t) = (t^2,\ 3t,\ 2t^3),\ \ -1 \leq t \leq 2.$

b) γ , donde γ es la porción de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, del punto $(1, 1, 0)$ al punto $(2, 4, 0)$.

Problema 44.- Halla el trabajo realizado por el campo $F(x, y) = (xy^4, x^2y^3)$ sobre una partícula que se desplaza desde $O = (0, 0)$ hasta $A = (1, 1)$ a lo largo de los siguientes caminos:

a) poligonal de dos lados paralelos a los ejes,

a.1) con el primer lado sobre el eje X.

a.2) con el primer lado sobre el eje Y.

b) el segmento OA.

c) $y^3 = x$.

¿Existe una función potencial para el campo vectorial F?

Problema 45.- Resuelve la integral curvilínea $\oint xy\, dx + 2x\, dy$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2 recorrida en sentido horario.

Problema 46.- Halla una función potencial (si existe) de los siguientes campos vectoriales:

a) $F(x, y) = (ye^{xy},\ xe^{xy} + 3y)$.

b) $G(x, y, z) = (x + z,\ -(y + z),\ x - y)$.

c) $H(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}\big(2x^3 + 2xy^2 + y,\ -2x^2y - 2y^3 - x\big)$, definido en el primer cuadrante abierto (sin los ejes).

Problema 47.- Calcula la integral $\oint_{\mathcal{C}} x^2y\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es la frontera, recorrida en sentido positivo, de la región acotada $\mathcal{D}$ comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$,

a) como tal, la integral de línea de un campo vectorial.

b) convirtiéndola en una integral múltiple utilizando el Teorema de Green.

Problema 48.- Calcula el área comprendida entre los astroides

$$\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \mid x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t,\ t \in [0, 2\pi]\} \qquad \text{y}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(x, y) \mid x = 2\cos^3 t,\ y = 2\operatorname{sen}^3 t,\ t \in [0, 2\pi]\}$$

3.7 Algunos problemas resueltos

```
> restart:
> with(student):
> Lineint(x,x=cos(t)^3,y=sin(t)^3,t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^3 \sqrt{(\frac{d}{dt}(\cos(t)^3))^2 + (\frac{d}{dt}(\sin(t)^3))^2}\,dt$$

```
> value(%);
```

$$0$$

```
> Lineint(y,x=cos(t)^3,y=sin(t)^3,t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)^3 \sqrt{(\frac{d}{dt}(\cos(t)^3))^2 + (\frac{d}{dt}(\sin(t)^3))^2}\,dt$$

```
> value(%);
```

$$0$$

```
> Lineint(x+y,x=cos(t)^3,y=sin(t)^3,t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t)^3 + \sin(t)^3) \sqrt{(\frac{d}{dt}(\cos(t)^3))^2 + (\frac{d}{dt}(\sin(t)^3))^2}\,dt$$

```
> value(%);
```

$$0$$

```
> Lineint(x*y,x=cos(t)^3,y=sin(t)^3,t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^3 \sin(t)^3 \sqrt{(\frac{d}{dt}(\cos(t)^3))^2 + (\frac{d}{dt}(\sin(t)^3))^2}\,dt$$

```
> value(%);
```

$$0$$

```
> int(sin(t)^4,t=0..2*Pi);
```

$$\frac{3}{4}\pi$$

```
> Lineint(x,x=r*cos(t),y=r*sin(t),z=k*t,t=a..b);
```

$$\int_a^b r\cos(t) \sqrt{(\frac{\partial}{\partial t}(r\sin(t)))^2 + (\frac{\partial}{\partial t}(k\,t))^2 + (\frac{\partial}{\partial t}(r\cos(t)))^2}\,dt$$

```
> value(%);
```

$$r\sqrt{k^2+r^2}\sin(b) - r\sqrt{k^2+r^2}\sin(a)$$

```
> Lineint(y,x=r*cos(t),y=r*sin(t),z=k*t,t=a..b);
```

$$\int_a^b r\sin(t)\sqrt{(\tfrac{\partial}{\partial t}(r\sin(t)))^2+(\tfrac{\partial}{\partial t}(k\,t))^2+(\tfrac{\partial}{\partial t}(r\cos(t)))^2}\,dt$$

```
> simplify(value(%));
```

$$-r\sqrt{k^2+r^2}\,(\cos(b)-\cos(a))$$

```
> Lineint(x+y,x=r*cos(t),y=r*sin(t),z=k*t,t=a..b);
```

$$\int_a^b (r\cos(t)+r\sin(t))\sqrt{(\tfrac{\partial}{\partial t}(r\sin(t)))^2+(\tfrac{\partial}{\partial t}(k\,t))^2+(\tfrac{\partial}{\partial t}(r\cos(t)))^2}\,dt$$

```
> simplify(value(%));
```

$$-r\sqrt{k^2+r^2}\,(-\sin(b)+\cos(b)+\sin(a)-\cos(a))$$

```
> Lineint(x*y,x=r*cos(t),y=r*sin(t),z=k*t,t=a..b);
```

$$\int_a^b r^2\cos(t)\sin(t)\sqrt{(\tfrac{\partial}{\partial t}(r\sin(t)))^2+(\tfrac{\partial}{\partial t}(k\,t))^2+(\tfrac{\partial}{\partial t}(r\cos(t)))^2}\,dt$$

```
> simplify(value(%));
```

$$-\frac{1}{2}\,r^2\sqrt{k^2+r^2}\,(\cos(b)^2-\cos(a)^2)$$

```
> Lineint(x,x=2*cos(t),y=2*sin(t),t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} 2\cos(t)\sqrt{(\tfrac{d}{dt}(2\cos(t)))^2+(\tfrac{d}{dt}(2\sin(t)))^2}\,dt$$

```
> simplify(value(%));
```

$$0$$

```
> Lineint(x*y,x=2*cos(t),y=2*sin(t),t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} 4\cos(t)\sin(t)\sqrt{(\tfrac{d}{dt}(2\cos(t)))^2+(\tfrac{d}{dt}(2\sin(t)))^2}\,dt$$

```
> simplify(value(%));
```

$$0$$

```
> Fg:=vector([sin(t),cos(t),t]);

> dg:=diff([sin(t),cos(t),t],t);

> with(linalg):

> multiply(Fg,dg);

> int(12*t^5+2*t^3+9*t,t=-1..2);
```

$$147$$

```
> int(t+2*t^3,t=1..2);
```

$$9$$

```
> int(t^4+t^3,t=0..1);
```

$$\frac{9}{20}$$

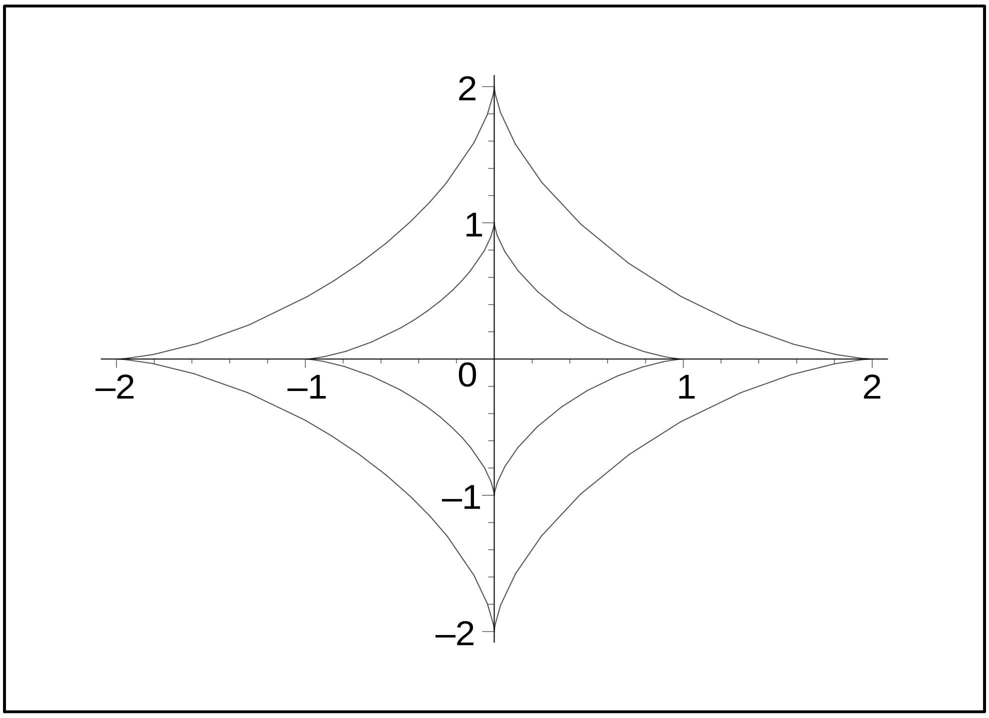
```
> int(2*t^5,t=0..1);
```

$$\frac{1}{3}$$

```
> int(4*t^(13),t=0..1);
```

$$\frac{2}{7}$$

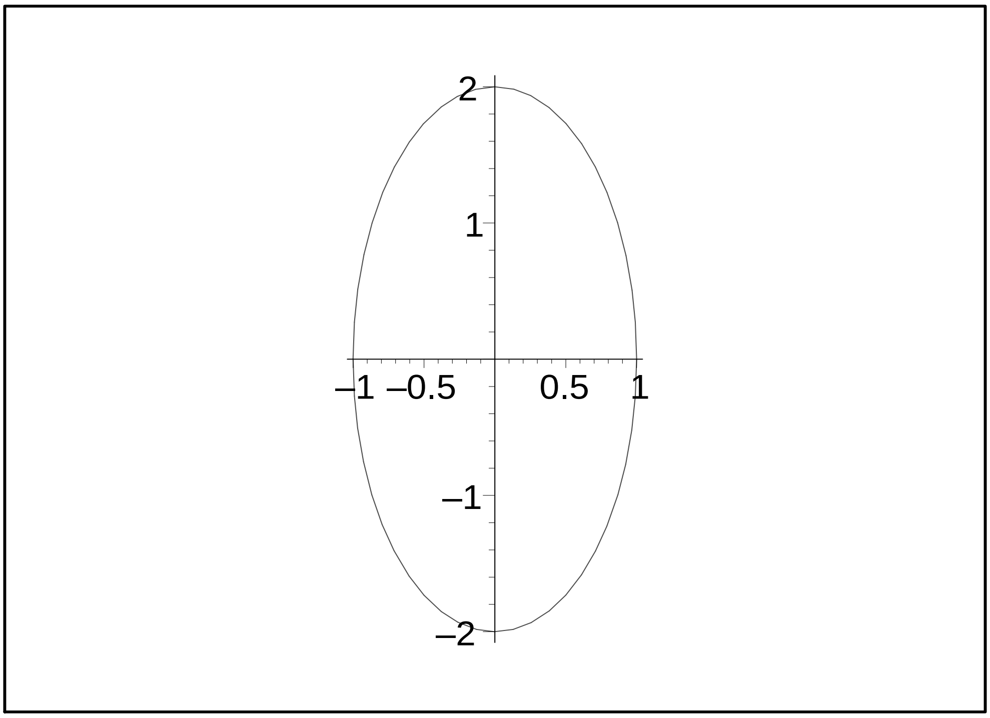
```
> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> d1:=plot([cos(t)^3,sin(t)^3,t=0..2*Pi]):

> d2:=plot([2*cos(t)^3,2*sin(t)^3,t=0..2*Pi]):

> display(d1,d2);
```



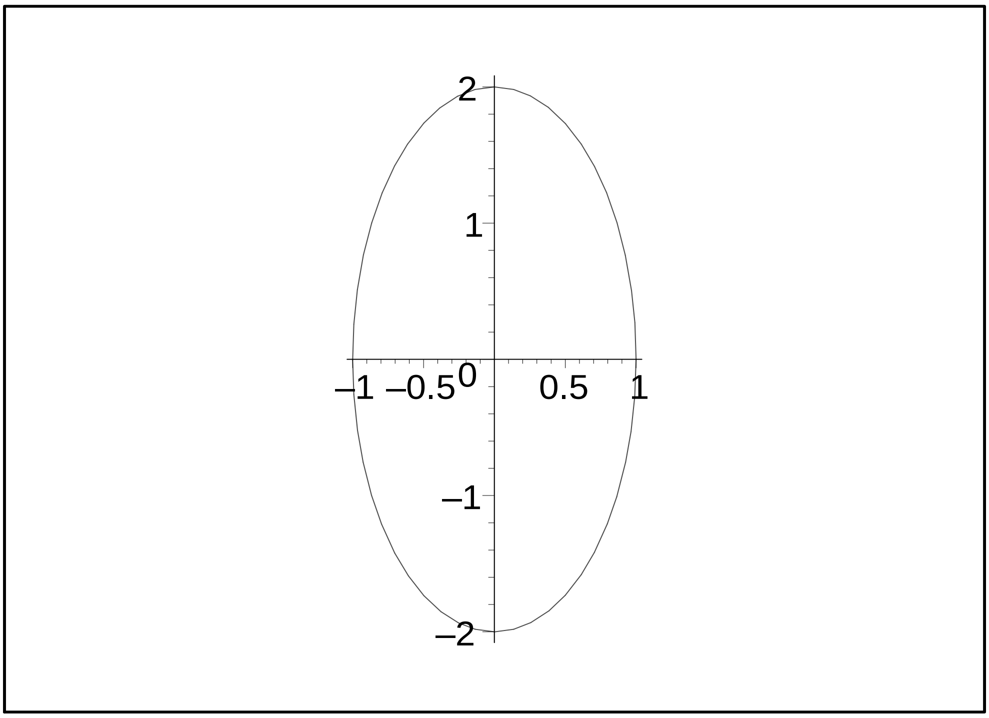
```
> 3/2-3/8;
```

$$\frac{9}{8}$$

```
> plot([cos(t),2*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained);
```




```
> plot([sin(t),2*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained);
```




```
> int(2*sin(t)*cos(t)-4*sin(t)^2,t=0..2*Pi);
```

$$-4\,\pi$$

```
> f1:=2*x+y/(x^2+y^2);
```

$$f1 := 2\,x + \frac{y}{x^2 + y^2}$$

```
> simplify(diff(f1,y));
```

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

```
> f2:=-2*y-x/(x^2+y^2);
```

$$f2 := -2\,y - \frac{x}{x^2 + y^2}$$

```
> simplify(diff(f2,x));
```

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

```
> int(y/(x^2+y^2),x);
```

$$\arctan(\frac{x}{y})$$

```
> simplify(diff(arctan(x/y),y));
```

$$-\frac{x}{x^2+y^2}$$

```
> int(2*t^5+t^4+2*t^3,t=0..1);
```

$$\frac{31}{30}$$

```
> int(-(1-t)^2,t=0..1);
```

$$\frac{-1}{3}$$

```
> 31/30-2/3;
```

$$\frac{11}{30}$$

```
> int(int(2*x-x^2,y=x^2..1),x=0..1);
```

$$\frac{11}{30}$$

Capítulo 4

Integrales de superficie. Teoremas de Stokes y Gauss

4.1 Introducción

Definicion 29 *Superficies parametrizadas. Plano tangente. Gráficas de funciones. Area de una superficie.*

4.2 Integrales de superficie de funciones escalares

Definicion 30 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *continua en* $\mathbf{S}$ *entonces definimos la integral de* f *sobre* $\mathbf{S}$ *a la integral*

$$\int_{\mathbf{S}} f dS = \int_D f(\Phi(u,v))||T_u \times T_v||dudv$$

Observación 34 *Una aplicación esta integral también es el valor promedio de la integral de la función* f *sobre* $\mathbf{S}$ *como*

$$f_{prom} = \frac{1}{A(S)} \int_S f$$

4.3 Integrales de superficie de campos vectoriales

Definicion 31 *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$ *definido en* $\mathbf{S}$*, la imagen de una superficie parametrizada* Φ*. La integral de superficie de* $\mathbf{F}$ *sobre* Φ *es*

$$\int_{\Phi} \mathbf{F} = \int_{D} \mathbf{F}(T_u \times T_v) du dv$$

Observación 35 *Orientación de superficies. Reparametrización de superficies. Relación de sus integrales de superficie.*

4.4 Teorema de Stokes

Teorema 32 Teorema de Stokes para gráficas *Sea* S *una superficie orientada definida por una función* C^2*,* $z = f(x, y)$*,* $(x, y) \in D$*. Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial* C^1 *en* S*. Entonces si* ∂S *denota la frontera orientada de* S *tenemos*

$$\int_{S} \text{rot}\mathbf{F} = \int_{\text{S}} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\partial \text{S}} \mathbf{F}$$

Teorema 33 Teorema de Stokes para superficies parametrizadas *Sea* S *una superficie orientada definida por una parametrización uno-uno* $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$*. Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial* C^1 *en* S*. Entonces si* ∂S *denota la frontera orientada de* S *tenemos*

$$\int_{S} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\partial S} \mathbf{F}$$

Observación 36 *Integrales de superficie en campos conservativos.*

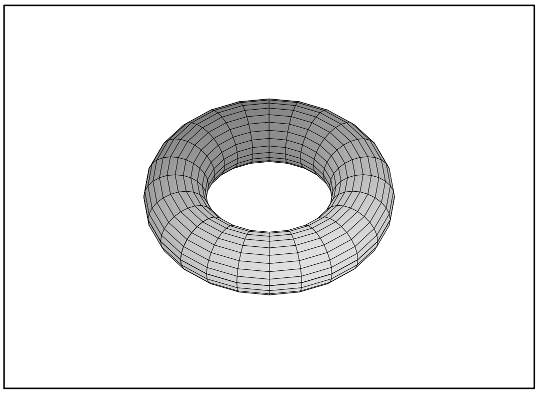
4.5 Teorema de Gauss

Teorema 34 Teorema de la divergencia de Gauss *Sea* Ω *una región del tipo 4 en el espacio. Denotemos por* $\partial\Omega$ *la superficie cerrada orientada que acota* Ω*. Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial suave definido sobre* Ω*. Entonces*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}$$

$$\int_{\Omega} \text{div}\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$$

Problema 49.- La superficie $\mathcal{T}$ representada en la figura adjunta recibe el nombre de toro.



Obtén su área sabiendo que una parametrización viene dada por: $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$,

$$\Phi(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\,\text{sen}\,u,\ r\,\text{sen}\,v\big)\,, \qquad 0 < r < R$$

Problema 50.- Calcula $\iint_S x^2 y\, dS$, donde S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ entre los planos $y = 0$ e $y = 1$ situada por encima del plano XY.

Problema 51.- Hallad el área de la porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$, con $z \geq 0$, interior al cilindro $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Problema 52.- ¿Cuál es el promedio del producto de tres números no negativos si su suma es siempre igual a uno? ¿Y cuando la suma de sus cuadrados es constantemente igual a uno?

Problema 53.- En los siguientes apartados calculad $\iint_S F\, dS$ tanto a partir de su definición (tómese la "normal exterior"para orientar S) como aplicando algún teorema:

i) $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$, para S la superficie cerrada limitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

ii) $F(x, y, z) = (2xyz, -2zx^2, -yz^2)$, donde S es la superficie cerrada limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x = 0$; $y = 0$ y $z = 0$ dentro del primer octante.

iii) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, si S es la superficie cerrada limitada por $x^2 + y^2 = z^2$ y $x^2 + y^2 + z = 6$ con $z \geq 0$.

Problema 54.- Sea S una superficie cerrada contorno del sólido $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ en las condiciones del teorema de Gauss. Consideremos los campos vectoriales:

$$F_1(x, y, z) = (x, 0, 0)\,, \qquad F_2(x, y, z) = (0, y, 0)\,, \qquad F_3(x, y, z) = (0, 0, z)\,, \qquad F_4(x, y, z) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})$$

Comprobad que, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, el flujo de F_i a través de S satisface

$$\iint_S F_i \, dS = \text{ Volumen } (\mathcal{V})\;.$$

Utilizad el campo F_1 para determinar el volumen que encierra el toro del problema **139**.

Bibliografía

[1] Apostol, T.M. Calculus 2a ed. Reverté. Barcelona, 1972

[2] Anton, H. Calculus: a new horizon. 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999

[3] Bartle, R. and Sherbert, D. Introducción al Análisis matemático de una variable. Ed. Limusa. Mejico D. F. 1991.

[4] García et al. Calculo I. ????

[5] Larson et al. Algebra Lineal. Ed Pirámide. Madrid 2004

[6] Cohen, M. et al. Proof wihtout words: Geometrics Series. Mathematics Magazine. Vol 74. nº4 page 320, October 2001

[7] Pérez, C. Métodos matemáticos y programación con Maple V. 1a ed. ra-ma. Madrid, 1998.

[8] Roanes, E. et al. Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[9] Murray R. Spiegel, et al. Fórmulas y tablas de matemática aplicada. 2ª ed. Madrid 2000.

[10] Spivak, M. Calculus : cálculo infinitesimal 2a ed. Reverté. Barcelona, 1988.

[11] Anton, H. Calculus: a new horizon. 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999.

[12] Del Castillo, F. Análisis matemático II. 1ª ed. Alhambra Universidad. Madrid, 1980.

[13] Marsden, J.E. y Tromba, A. Calculo vectorial. 4a ed. Addison-Wesley Longman de México. Naucalpán de Juárez, 1998

[14] Pérez, C. Métodos matemáticos y programación con Maple V. 1a ed. ra-ma. Madrid, 1998.

[15] Roanes, E. et al. Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[16] Stewart, J. Cálculo: conceptos y contextos. International Thomson Editores. Mexico D.F., 1999