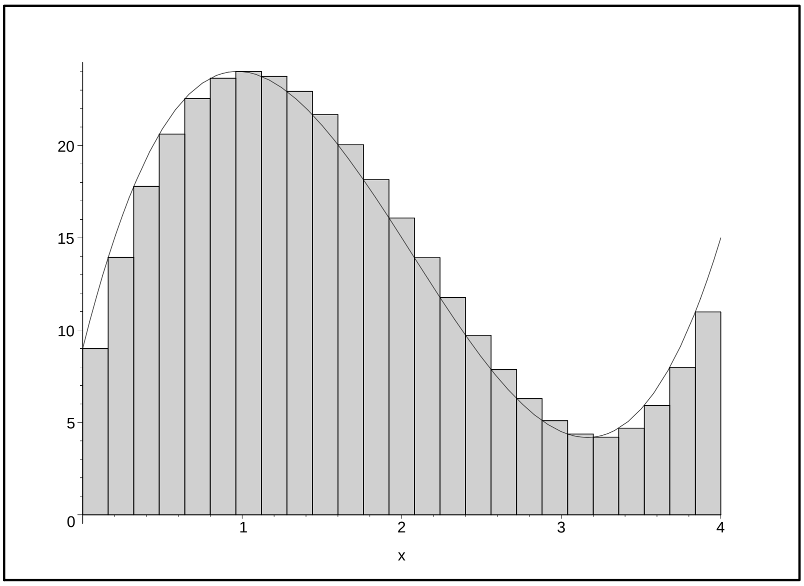
Prácticas de cálculo integral en la Ingeniería de Montes

por

Ana Luzón y Pilar Cristobal

.



Índice General

Capítulo 1

INTEGRACIÓN INDEFINIDA

En esta práctica vamos a empezar recordando algunas integrales inmediatas que se han visto en bachillerato y en la práctica 1. También algunos de los métodos de integración. Lamentablemente muy amenudo no se pueden encontrar expresiones analíticas para los valores de las integrales que buscamos y es por eso que tenemos que irnos a expresiones aproximadas para dar el valor de la integral, es a esto a lo que llamamos integración numérica y que veremos en próximas pr ácticas.

1.1 Integrales inmediatas

En Maple tenemos los comandos ***int*** e ***Int*** que de manera similar al del límite por un lado podemos calular el valor de una integral definida o indefinida o bien expresarla simbolicamente

```
> int(2*x,x);
```

$$x^2$$

```
> Int(2*x,x);
```

$$\int 2\,x\,dx$$

```
> Int(2*x,x)=int(2*x,x);
```

$$\int 2\,x\,dx = x^2$$

Observar que de las infinitas integrales nos da la que tiene la constante igual a cero. Atención que no siempre tiene porqué ser esta constante ya que la respuesta general sería:

```
> Int(2*x,x)=int(2*x,x)+C;
```

$$\int 2\,x\,dx = x^2 + C$$

Si queremos que calcule la integral definida entre dos valores el comando int se escribira:

```
> Int(2*x,x=1..2)=int(2*x,x=1..2);
```

$$\int_1^2 2\,x\,dx = 3$$

1.1.1 Ejercicio 1

Elabora una tabla con las primitivas inmediatas de las siguientes funciones:

Revisa la práctica 1 donde elaboraste una tabla de integrales inmediatas y completa las que no tengas ya hechas.

f1(x)=a

f2(x)=(x-a)^m

f3(x)=1/(x-a)

f4(x)=e^(ax)

f5(x)=a^(bx)

f6(x)=cos(ax)

f7(x)=sen(ax)

f8(x)=tan(ax)

f9(x)=1/(cos^2(ax))

f10(x)=1/(a^2-x^2)

f11(x)=1/(x^2-a^2)

f12(x)=1/(sqrt(x^2+a))

f13(x)=1/(sqrt(x^2-a))

f14(x)=1/(sqrt(a^2-x^2))

f15(x)=1/(a^2+x^2)

f16(x)=senh(ax)

f17(x)=cosh(ax)

1.2 Métodos de integración

Para calcular una expresión analítica para una integral que no sea del tipo inmediato muchas veces tendremos que aplicar diferentes métodos de integración. Los más usuales son:

(1) Método del cambio de variable

(2) Integración por partes

(3) Integración de funciones racionales. Método de Hermite.

Muchos de los comandos que vamos a utilizar en esta sección estan en la librería ***student***,así que siempre que vayamos a trabajar con esto nos tenemos que acordar de cargarla.

```
> with(student):
```

1.2.1 Cambio de variables

Empezamos resolviendo una integral mediante un cambio de variables. Supongamos que queremos resolver la siguiente integral:

```
> Int((cos(x)+1)^3*sin(x), x);
```

$$\int (\cos(x) + 1)^3 \sin(x)\, dx$$

Hacemos el cambio cos(x)+1=u con la orden ce cambio de variable ***changevar*** de la manera siguiente:

```
> changevar(cos(x)+1=u, Int((cos(x)+1)^3*sin(x), x), u);
```

$$\int -\, u^3\, du$$

que ya sabemos integrar perfectamente:

```
> Int(-u^3,u)=int(-u^3,u)+C;
```

$$\int -u^3\,du = -\frac{u^4}{4} + C$$

Saber cuál es el cambio de variable apropiado lo sabemos por la pr áctica, pero uno que habitualmente funciona bien cuando el integrando es función de sen x y cos x es el cambio tg(x/2).

1.2.2 Integración por partes

```
> Int(ln(x),x);
```

$$\int \ln(x)\,dx$$

El comando para integrar por partes es ***intparts***

```
> intparts(Int(ln(x), x), ln(x));
```

$$\ln(x)\,x - \int 1\,dx$$

y esto ya lo sabemos integrar:

```
> ln(x)*x-Int(1,x)=ln(x)*x-int(1,x)+C;
```

$$\ln(x)\,x - \int 1\,dx = \ln(x)\,x - x + C$$

1.2.3 Funciones racionales

El comando que nos convierte una función racional en fraciones más simples es ***parfrac*** . Supongamos que queremos integrar la siguiente función

```
> Int((x^5+4*x^3+2*x^2+2*x-6)/(x^3-1),x);
```

$$\int \frac{x^5 + 4\,x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 6}{x^3 - 1}\,dx$$

```
> convert((x^5+4*x^3+2*x^2+2*x-6)/(x^3-1),parfrac,x);
```

$$x^2 + 4 + \frac{3 + 2\,x}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x - 1}$$

Y esto ya podemos integrarlo

```
> Int(x^2+4+1/(x-1)+(3+2*x)/(x^2+x+1),x)=int(x^2+4+1/(x-1)+(3+2*x)/(x^2
> +x+1),x);
```

$$\int x^2 + 4 + \frac{3 + 2\,x}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x - 1}\,dx =$$
$$\frac{x^3}{3} + 4\,x + \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{(2\,x + 1)\sqrt{3}}{3}) + \ln(x - 1)$$

1.2.4 Ejercicio 2

Por el método que creas adecuado calcula las siguientes integrales:

g1(x)=x^3ln(x)

g2(x)=x^3/(a+bx^2)^3

g3(x)=sen^4(x)/cos^3(x)

g4(x)=1/sen(x)

g5(x)=x^2*exp^(2x)sen(2x)

g6(x)=(3x^2-2x+4)e^(3x)

Capítulo 2

Integración Numérica

2.1 Introducción

Lamentablemente muy amenudo no se pueden encontrar expresiones anal íticas para los valores de las integrales que buscamos y es por eso que tenemos que irnos a expresiones aproximadas para dar el valor de la integral, es a esto a lo que llamamos integración numérica y nuestro objetivo fundamental en esta práctica. Estudiaremos los métodos de los rectángulos, trapecios y Simpson, veremos qué error cometemos en cada uno de ellos y finalmente los compararemos.

Muchos de los comandos que vamos a utilizar en esta sección estan en la librería ***student***,así que siempre que vayamos a trabajar con esto nos tenemos que acordar de cargarla.

```
> with(student):
```

2.2 Aproximación por rectángulos. Sumas de Riemann.

Para poder definir lo que es una integral, de hecho lo que se llama la integral de Riemann (hay otras maneras de integrar, de medir, pero eso lo dejamos para otro momento). Pues lo que hizo Riemnn fue definir la sumas superiores e inferiores y así, si el ínfimo de las sumas superiores y el supremo de las sumas inferiores de una función esta tan cerca como queramos entonces diremos que la función es integrable y el valor que se obtiene en la igualdad es lo que llamamos integral de Riemann.

El problema habitual relacionado con las integrales consiste en el c álculo del área determinado por una curva (f>=0), el eje x y las abcisas x=a y x=b, $\int_a^b f\,dx$.

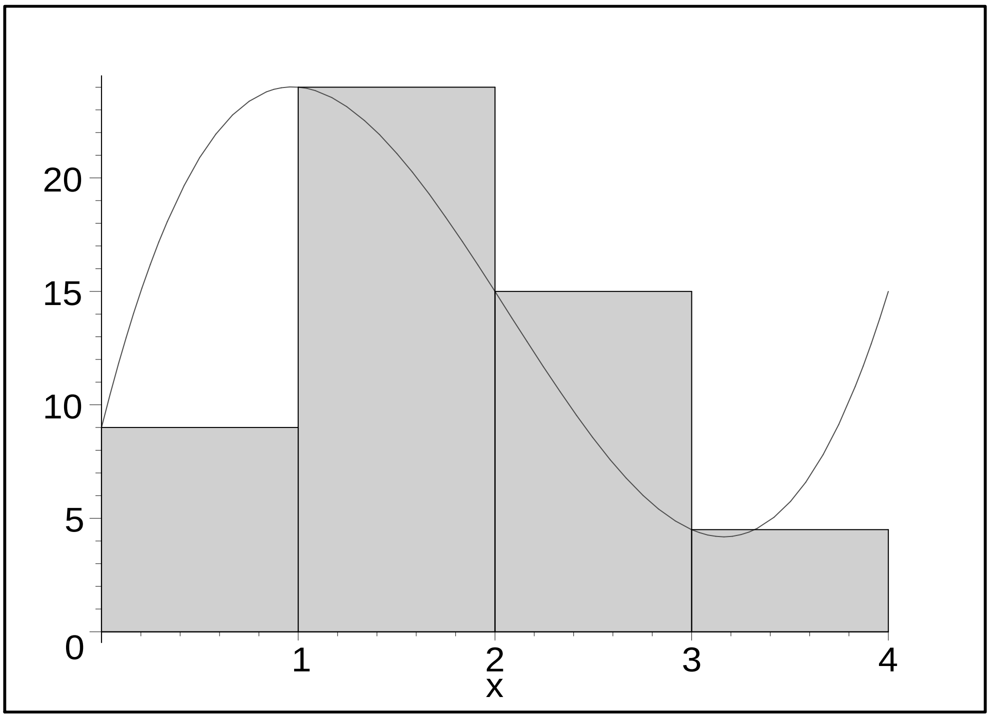
Hay multitud de integrales que no tienen una expresión analítica. ¿Qué hacemos entonces? Nos tenemos que contentar con dar un valor aproximado a la integral definida que necesitemos, eso si, con la exactitud que queramos teórica (y que podamos, según la máquina que utilicemos). Generalmente será así como se resolveran los problemas de cálculo integral con los que nos topemos en la vida real. Por ejemplo la función error viene dada por una integral y no tiene otra expresión analítica lo único que podemos hacer es calcularla numéricamente.

```
> Int(2/sqrt(Pi)*exp(-x^2),x)=int(2/sqrt(Pi)*exp(-x^2),x);
```

$$\int \frac{2\,e^{(-x^2)}}{\sqrt{\pi}}\,dx = \mathrm{erf}(x)$$

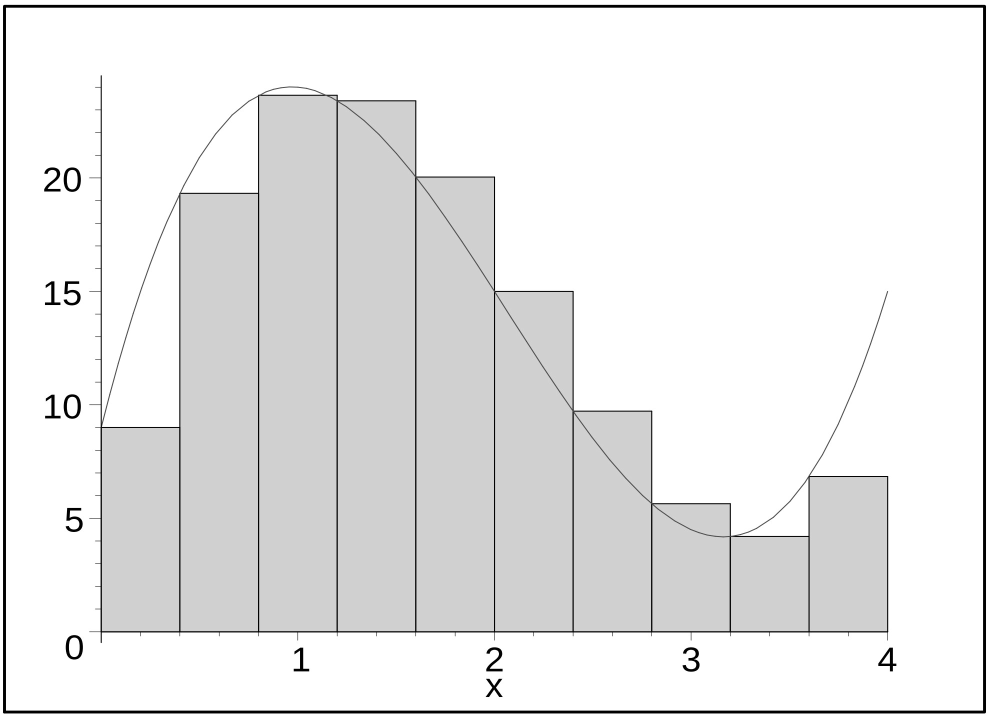
Para aproximarnos al valor de la integral por rectángulos utilizaremos como base (b-a)/n, siendo n el número de subintervalos en que dividiremos el intervalo [a,b]. Dentro de cada subintervalo la altura vendrá dada por el valor de la función en el extremo izquierdo del intervalo, en el derecho, en el punto medio, en el supremo en el infimo. Por ejemplo:

```
> leftbox(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4);
```



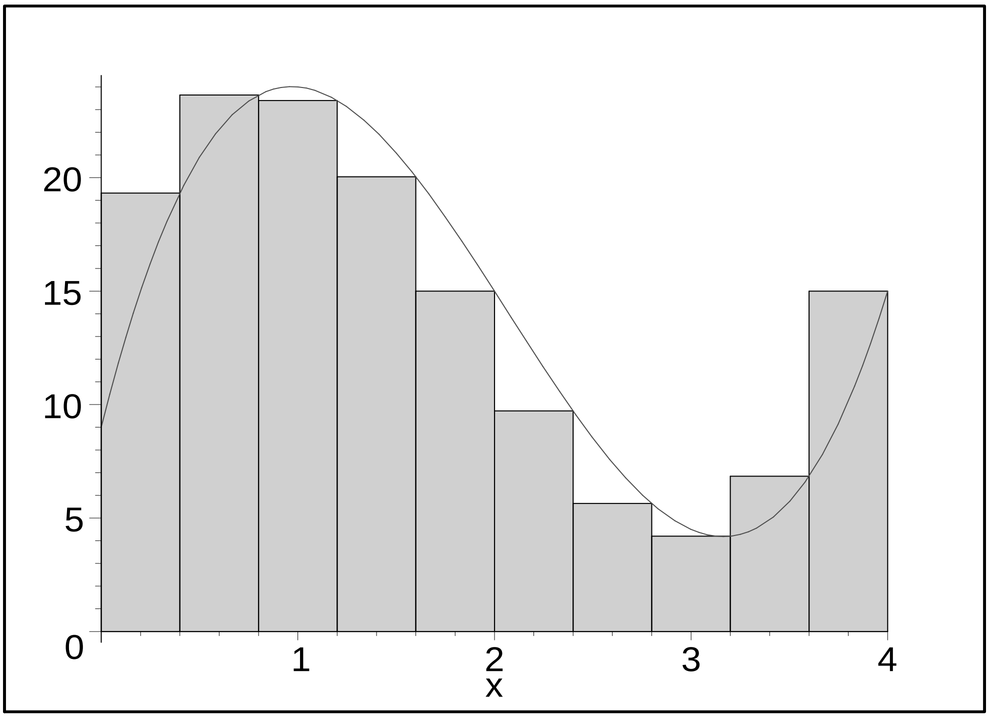
Si no le decimos nada divide el intervalo en 4 subintervalos, si queremos que divida en otro número se lo decimos:

```
>  leftbox(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4,10);
```



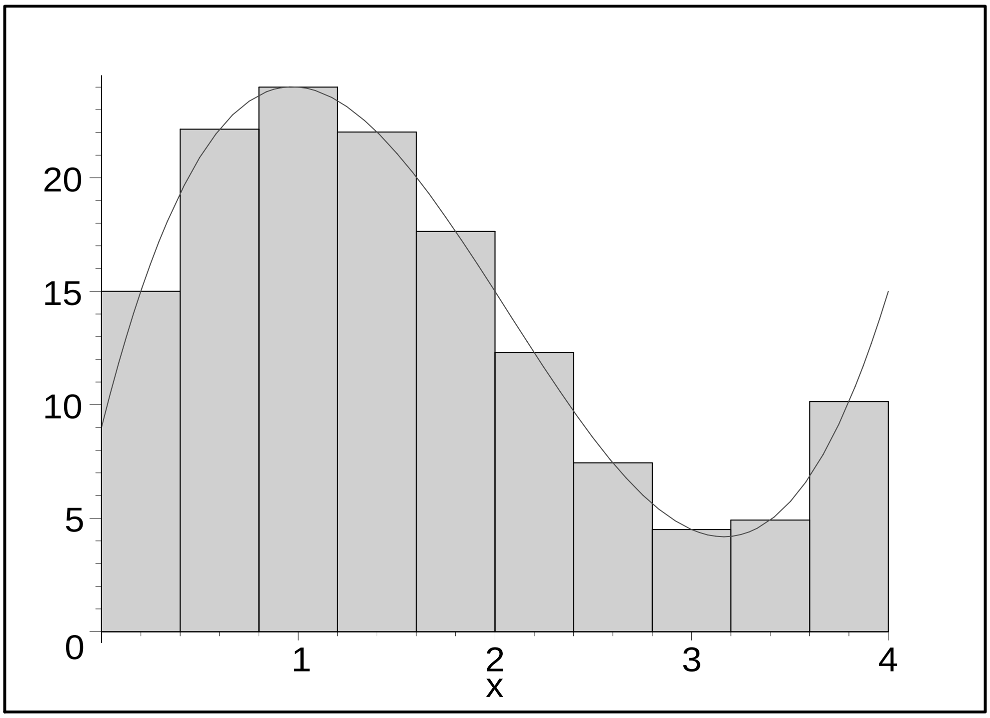
También por la derecha

```
> rightbox(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4,10);
```



O en el punto medio

```
> middlebox(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4,10);
```



También tenemos comandos que nos dan la suma de cada uno de estos rect ángulos

```
> leftsum(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4,10);
```

$$\frac{2}{5}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{6}{25}\,i^3-\frac{93}{25}\,i^2+\frac{69}{5}\,i+9\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$54.72000000$$

```
> rightsum(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4,10);
```

$$\frac{2}{5}\left(\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{6}{25}\,i^3-\frac{93}{25}\,i^2+\frac{69}{5}\,i+9\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$57.12000000$$

```
> middlesum(15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9,x=0..4,10);
```

$$\frac{2}{5}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{15\,(\frac{2\,i}{5}+\frac{1}{5})^3}{4}-\frac{93\,(\frac{2\,i}{5}+\frac{1}{5})^2}{4}+\frac{69\,i}{5}+\frac{159}{10}\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$56.04000000$$

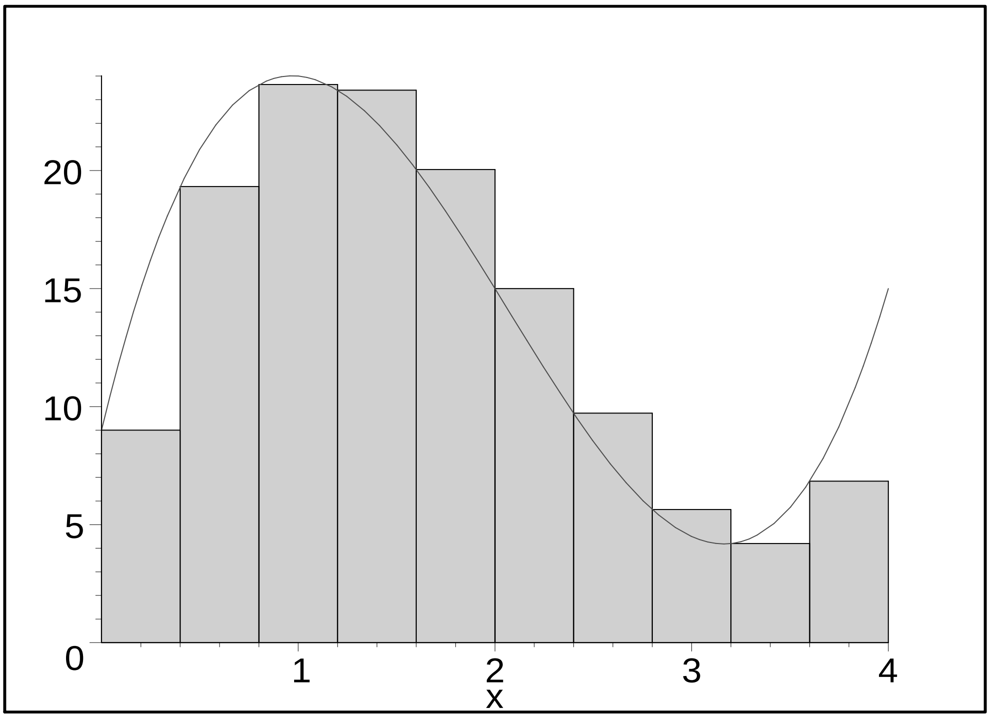
2.2.1 Ejercicio 1

Varía el número de puntos el que subdivides el intervalo del ejemplo anterior. ¿Qué observas?

Calcula la integral del ejmplo anterior con el comando **int** ¿Qué tipo de suma se aproxima mejor? ¿Cuál más rapidamente?

Vamos a hacer esto mismo mediante una animación con un procedimiento

```
> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined
> animasumletf:=proc(f,a,b,n)
> local j, gl:
> for j from 1 to n do
> gl[j]:=leftbox(f,x=a..b,10*j):
> end do:
> display([seq(gl[j],j=1..n)],insequence=true);
> end:

> f:=x->15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9:

> animasumletf(f,0,4,15);
```




```
> sumasizquierda:=proc(g,a,b,n)
> local j, sl:
> for j from 1 to n do
> sl:=evalf(leftsum(g(x),x=a..b,j)):
> print(sl)
> end do:
> end:
```

```
> g:=x->15/4*x^3-93/4*x^2+69/2*x+9:
```

```
> sumasizquierda(g,0,4,20);
```

$$36.$$

$$48.$$

$$51.11111109$$

$$52.50000000$$

$$53.28000000$$

$$53.77777778$$

$$54.12244897$$

54.37500000

54.56790124

54.72000000

54.84297519

54.94444443

55.02958579

55.10204083

55.16444446

55.21875000

55.26643597

55.30864197

55.34626038

55.38000000

2.2.2 Ejercicio 2

Repetir el ejercicio 1 pero ahora utilizando la animación anterior y el procedimiento sumasizquierda. Construir animaciones y procedimientos similares para las sumas por la derecha y en el punto medio.

2.3 Aproximación por trapecios. Regla de los trapecios.

Como hemos observado en el apartado anterior en general, cuanto más subdividimos el intervalo más nos vamos aproximando al valor de la integral. Otra manera de aproximarnos consistira en aproximarnos mediante trapecios. De nuevo dividimos el intervalo en n subintervalos de longitud (b-a)/n con x0=a, x1=a+(b-a)/n, x2=a+2*(b-a)/n,...., xn-1=a+(n-1)*(b-a)/n, xn=b. Pero ahora calcularemos el area del trapecio formado de base xi+1-xi y de alturas f(xi) y f(xi+1), de manera que ahora el área del trapecio k-esimo será:

Tk=1/2(f(xk)+f(xk+1))*(xk+1-xk)

quedandonos la aproximación a la integral por:

Tn=1/2(f(x1)+f(x2))*(x2-x1)+1/2(f(x2)+f(x3))*(x3-x2)+····+1/2(f(xn-1)+ f(xn))*(xn-xn-1)

En este algoritmo, si f'' es continua en [a,b] y K es el valor máximo de —f''(x)— en [a,b], entonces para n subintervalos tenemos que el error se puede acotar por

(I) —ET—=— $\int_a^b f\,dx$-Tn—<=((b-a)^3*K)/(12n^2)

en Maple tenemos el comando ***trapezoid*** que es similar a los anteriores que calculaban sumas con rectángulos pero ahora con trapecios. Ejemplo:

```
> evalf(trapezoid(f(x),x=0..4,10));
```

$$55.92000000$$

2.3.1 Ejercicio 3

Construye un procedimiento similar a los del ejercicio 2 utilizando ahora los trapecios. Aplicalo a alguna función. Comprueba que el error esta acotado por (I).

2.3.2 Ejercicio A (para los interesados en programación)

Construye un procedimiento que aproxime el valor de la integral por trapecios, que muestre las sumas en cada iteración y que compruebe el error en cada paso.

Cotéjalo con el comando trapezoid de Maple.

2.4 Aproximación por parábolas. Regla de Simpson.

Como en los apratados anteriores, vamos a aproximarnos al valor de la integral en cada subintervalo donde ahora la altura será un arco de parábola. A este método se llama el método de Simpson. Ahora el subintervalo lo dividiremos en 2n puntos ya que para cada arco de par ábola necesitaremos tres puntos.

Cada subintervalo tiene por área:

Sk=1/3*(f(x2k-2)+4f(x2k-1)+f(x2k))*(x2k-x2k-2)

Aquí también podemos acotar el error, la cota vendrá dada por

(II) —ES—=— $\int_a^b f\ dx$-S2n—<=((b-a)^5*M)/(180*(2n)^4)

donde M es el valor máximo de —f""(x)— en [a,b] en 2n subintervalos de [a,b], con f"" continua en [a,b] .

en Maple tenemos el comando ***simpson*** que es similar a los anteriores que calculaban sumas con rectángulos o trapecios pero ahora con arcos de parábola. Ejemplo:

```
> evalf(simpson(f(x),x=0..4,4));
```

$$55.99999999$$

2.4.1 Ejercicio 4

Construye un procedimiento similar a los de los ejercicio 2 y 3 ahora utilizando los arcos de parábola. Aplicalo a alguna función. Comprueba que el error esta acotado por (II).

2.4.2 Ejercicio B (para los interesados en programación)

Construye un procedimiento que aproxime el valor de la integral por arcos de parábola, que muestre las sumas en cada iteración y que compruebe el error en cada paso.

Cotejalo con el comando simpson de Maple.

2.5 Problema

En este problema vamos a trabajar con la función error erf(x), que tiene por expresión

$$\int \frac{2\, e^{(-x^2)}}{\pi^{(\frac{1}{2})}}\, dx = \operatorname{erf}(x)$$

(1) Aplica los procedimientos de los ejercicios anteriores que calculan las sumas por la derecha, por la izquierda, por el punto medio, por los trapecios y parábolas a la función error con 10 iteraciones en el intervalo [0,1]

(2) Compara los errores con cada uno de los métodos

(3) Calcula cuál sería el número de iteraciones adecuado en cada método para dar un error menor que 10ˆ(-6). Compruebalo analiticamente.

Capítulo 3

Integrales Impropias

3.1 Introducción

Las integrales pueden ser impropias de dos maneras: porque el intervalo de integración sea no acotado o bien porque la función en el intervalo de integración sea no acotada. En el primer caso simplemente calculamos el límite siguiente

$\int_a^{\infty} \mathrm{f}(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x \mathrm{f}(t)\,dt$

En caso de que sea la función no acotada calcularemos el límite tendiendo al punto de no acotación.

```
> Int(x^2/(2+x^2)^2,x=1..infinity)=int(x^2/(2+x^2)^2,x=1..infinity);
```

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{(2+x^2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{6}$$

```
> Int(1/sqrt(x),x=0..1)=int(1/sqrt(x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

```
> Int(1/x,x=0..1)=int(1/x,x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

Si obtenemos un valor se dice que la integral converge, si obtenemos infinito o que no tiene límite decimos que la integral diverge.

3.2 Aproximación al valor de una integral impropia

3.2.1 Ejemplo 1

De manera que para calcular una integral impropia tenemos que calcular

$\int_1^\infty \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx$

Vamos a calcular esta última integral para a cada vez más grandes

```
> Int((1+exp(-x))/x,x=1..2)=int((1+exp(-x))/x,x=1..2.);
```

$$\int_1^2 \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = 0.8636306042$$

```
> Int((1+exp(-x))/x,x=1..5)=int((1+exp(-x))/x,x=1..5.);
```

$$\int_1^5 \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = 1.827673551$$

```
> Int((1+exp(-x))/x,x=1..10)=int((1+exp(-x))/x,x=1..10.);
```

$$\int_1^{10} \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = 2.521964870$$

```
> Int((1+exp(-x))/x,x=1..100)=int((1+exp(-x))/x,x=1..100.);
```

$$\int_1^{100} \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = 4.824554120$$

```
> Int((1+exp(-x))/x,x=1..1000)=int((1+exp(-x))/x,x=1..1000.);
```

$$\int_1^{1000} \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = 7.127139213$$

```
> Int((1+exp(-x))/x,x=1..10000)=int((1+exp(-x))/x,x=1..10000.);
```

$$\int_1^{10000} \frac{1+e^{(-x)}}{x}\,dx = 9.429724306$$

Observamos que esto es un ejemplo de una integral que no converge hacia ningún número. Es lo que llamaremos una integral divergente.

3.2.2 Ejemplo 2

Calculamos ahora el valor de $\int_0^\infty e^{(-x)}\,dx$

```
> int(exp(-x),x=0..1.);
```

$$0.6321205588$$

```
> int(exp(-x),x=0..2.);
```

$$0.8646647168$$

```
> int(exp(-x),x=0..5.);
```

$$0.9932620530$$

```
> int(exp(-x),x=0..10.);
```

$$0.9999546001$$

```
> int(exp(-x),x=0..100.);
```

$$1.000000000$$

```
> int(exp(-x),x=0..1000.);
```

$$1.$$

Si tuvieramos que dar un valor para esta integral impropia dariamos el 1. Vamos a comprobarlo

```
> Int(exp(-x),x=0..infinity)=int(exp(-x),x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} e^{(-x)}\, dx = 1$$

3.2.3 Ejercicio 1

(a) Dibuja las funciones f(x)=1/x^(1.1) , g(x)=1/x^(0.9) y h(x)=1/x; pintalas de azul, rojo y verde respectivamente, con ejes x=0..10, y=0..1, y en otra con x=0..100, y=0..1.

(b) Encuentra el área debajo de las gráficas de f,g y h desde x=1 hasta x=t con t=10, 100, 1000, 10^4, 10^5, 10^6 y 10^7.

(c) Da una estimación para el área entre 1 e infinito para cada función anterior. Calcula dicha área y comprueba tu estimación.

3.2.4 Ejercicio 2

(a) Si g(x)=1/(sqrt(x)-1) elabora una tabla de valores aproximados de
$\int_2^t \mathrm{g}(x)\, dx$
para t=5, 10, 100, 1000, 10000 ¿Parece que $\int_2^\infty \mathrm{g}(x)\, dx$ es convergente o divergente?.

(b) Compara g(x) con f(x)=1/sqrt(x). Dibuja ambas gráficas en el intervalo x=2..20 y explica intuitivamente tu razonamiento sobre la convergencia.

3.2.5 Ejercicio 3

(a) Si g(x)=sin(x)ˆ2/xˆ2, elabora una tabla de valores aproximados de $\int_1^t \mathrm{g}(x)\, dx$ para t=2,5,10,100,1000,10000.¿Parece que $\int_1^\infty \mathrm{g}(x)\, dx$ es convergente?

(b) Compara g(x) con f(x)=1/xˆ2. Dibuja ambas gráficas y explica intuitivamente tu razonamiento sobre la convergencia o no de la integral de g.

(c) Estudia la integral del apartado (a) pero para g(x)=sin(x)/xˆk, con k>0, ¿Para que valores de k esta función es integrable en este intervalo? Puede ser conveniente estudiar valores de k=1/3, 1/2, 1, 2, 3. Asi como pintar las gráficas correspondientes y las funciones con las que las compares.

(d) La misma pregunta con g(x)=abs(sin(x)/xˆk).

3.3 Las funciones Gamma y Beta

La función Gamma es una función que aparece en numerosas ocasiones en distintos ámbitos: probabilidad, estadistica, combinatoria, teoria de números, etc. Podríamos pensar en ella como una generalización a cualquier número real positivo del factorial de los números naturales. Se define de la siguiente manera

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{(-t)}\, t^{(x-1)}\, dt$

En Maple la llamamos con el comando **Gamma**.

Ejercicio 4: Pinta la función gamma.

Vamos a ver alguna de sus propiedades:

3.3.1 Propiedad 1

3.3.2 Propiedad 1

```
>  Gamma(1) = Int(exp(-t),t = 0 .. infinity);
```

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{(-t)}\, dt$$

Simplemente integrando $\int_0^\infty e^{(-t)}\, dt$ obtenemos

```
>  Int(exp(-t),t = 0 .. infinity)= int(exp(-t),t = 0 .. in-
finity);
```

$$\int_0^\infty e^{(-t)}\, dt = 1$$

De donde $\Gamma(1)$**=1**

Ejercicio 5: Demuestra las siguientes propiedades:

3.3.3 Propiedad 2

$\Gamma(n)$

=(n-1)!

3.3.4 Propiedad 3

$\Gamma(1+x) = x\,\Gamma(x)$

La función Beta esta relacionada con la función Gamma y suele aparecer en los mismos contextos.

Se define de la siguiente manera

$B(x,\,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Dejaremos el estudio de esta función para más adelante

Capítulo 4

Aplicaciones de la Integral

4.1 Cálculos con velocidades.

Sabemos que la velocidad, v, tiene la expresión v=s/t, siendo s el espacio y t el tiempo; de manera que en el caso de v=cte, para calcular el espacio recorrido s basta con calcular s=v*t. Si la función velocidad fuera constante a trozos, calcular la distancia no sería más que calcular el espacio recorrido en cada trozo y sumarlos todos.

Ejemplo 1: La velocidad de una corredora aumentó de manera paulatina durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su velocidad a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante esos tres segundos:

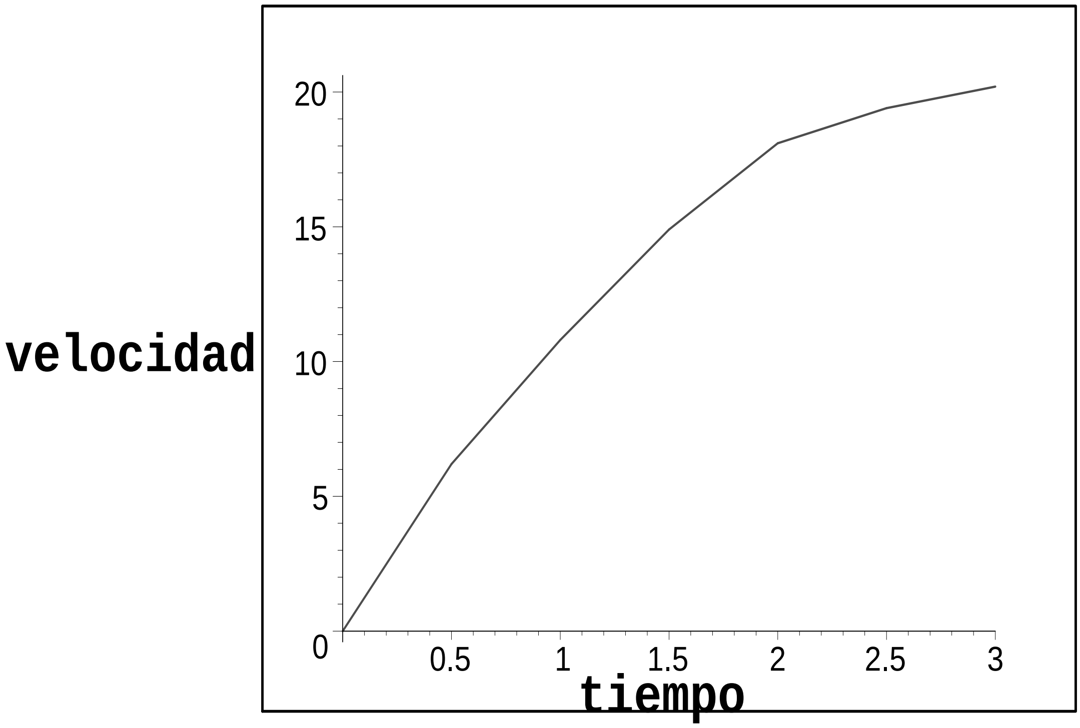
t(s) 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0

v(ft/s) 0 6.2 10.8 14.9 18.1 19.4 20.2

*Recordamos que un pie mide 30.5 cm.

```
> restart:
> with(student):
```

```
> plot([[0,0],[0.5,6.2],[1.,10.8],[1.5,14.9],[2,18.1],[2.5,19.4],[3,20.
> 2]],t=0..3,thickness=3,labels=['tiempo','velocidad'],labelfont=[COURIE
> R,BOLD,16]);
```



Para hacer una estimación inferior de la distancia (en pies) hacemos las sumas con el mínimo dentro del intervalo:

como todos miden 0.5 tendremos

```
> distancia_inferior:=(0+6.2+10.8+14.9+18.1+19.4)*0.5;
```

$$distancia\_inferior := 34.70$$

```
> metros=distancia_inferior*0.305;
```

$$metros = 10.58350$$

De manera similar para hacer una estimación superior de la distancia tendremos ya directamente en metros:

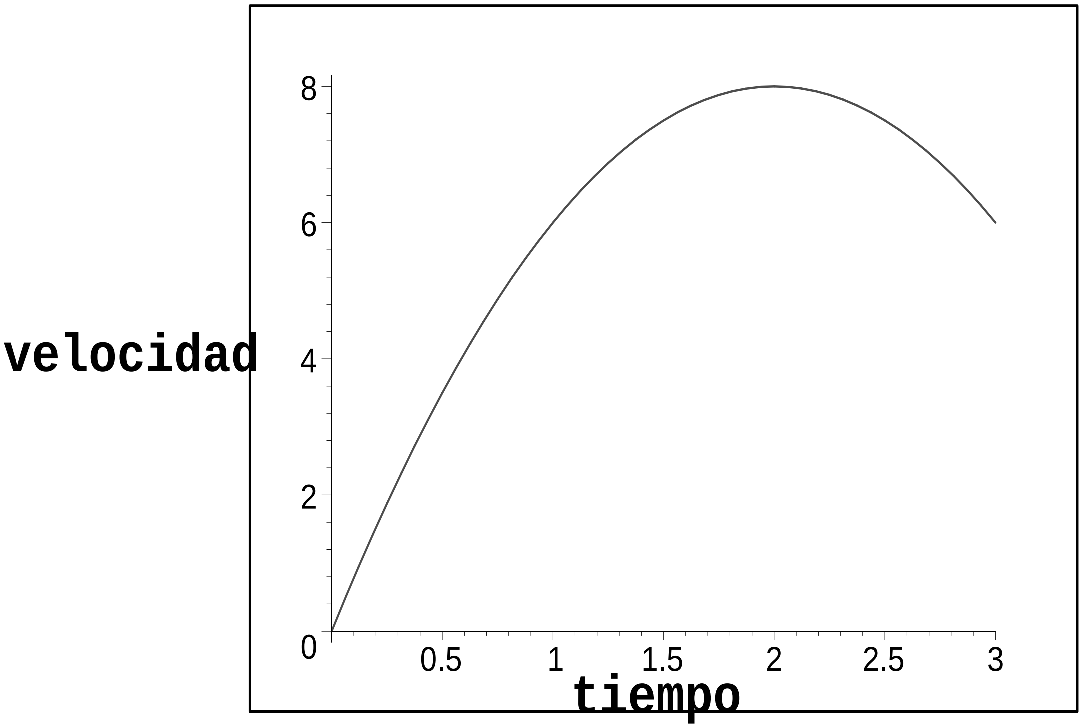
```
> distancia_superior:=(6.2+10.8+14.9+18.1+19.4+20.2)*0.5*0.305;
```

$$distancia\_superior := 13.66400$$

Si la función velocidad viene dada por una función continua, simplemente calculamos el área por debajo de la función.

Ejemplo 2:

```
> plot(-2*(t-2)^2+8,t=0..3,thickness=3,labels=['tiempo','velocidad'],
> belfont=[COURIER,BOLD,16]);
```




```
> distancia:=int(-2*(t-2)^2+8,t=0..3);
```

$$distancia := 18$$

4.1.1 Ejercicio 1

En una piscina de 25 m de largo una nadadora lleva una velocidad de 1 largo por minuto durante los 5 primeros minutos, después aumenta la velocidad a 1.5 largos por minuto durante los siguientes cinco, después nada a una velocidad de 2 largos por minuto durante los siguientes veinte minutos, para volver a 1.5 largos por minuto para los últimos 5 minutos. Representa gráficamente la velocidad de la nadadora. Da una cota superior e inferior para los metros que ha nadado. Representa gráficamente tu respuesta.

4.1.2 Ejercicio 2

El consejo de ministros del dia 27 de febrero de 2004 autorizó en España la próxima instalación del segundo supercomputador más rápido del mundo (el primero es el japones Earth Simulator) a un coste de 70 millones de en cuatro años. El Gobierno dijo que su supercomputador, que utilizará software de Linux, tendría capacidad para procesar 40 teraflops (40 billones de operaciones por segundo) y tendría 9.0 terabytes de memoria principal (como 18.000 PC). (noticia sacada de Reuters). ¿Cúantas operaciones podrá realizar en un día de trabajo?

En la lista de los top500, (los 500 superordenadores mas potentes del mundo) se suele descender cada seis meses a una media de 4 puestos si estas entre los diez primeros, a 10 puestos si estas entre los 10 y 50, 15 si estas por debajo del 50. ¿en que posición estará el supercomputador español cuando este totalmente operativo dentro de cuatro años?

Si la capacidad de hacer operaciones de los ordenadores suele aumentar cada seis meses a una proporción aproximada de log(5), ¿Cúal será la capacidad del ordenador que esté en la segunda posición dentro de cuatro años?

Define cada una de las funciones implicadas en el problema. Represéntalas gráficamente. Interpreta tus respuestas gráficamente.

4.1.3 Ejercicio 3

Una población de bacterias se inicia con 400 ejemplares y crece a razón de r(t)=450.268*exp(1.12567*t) bacterias por hora. ¿Cúantos especímenes habrá después de tres horas?

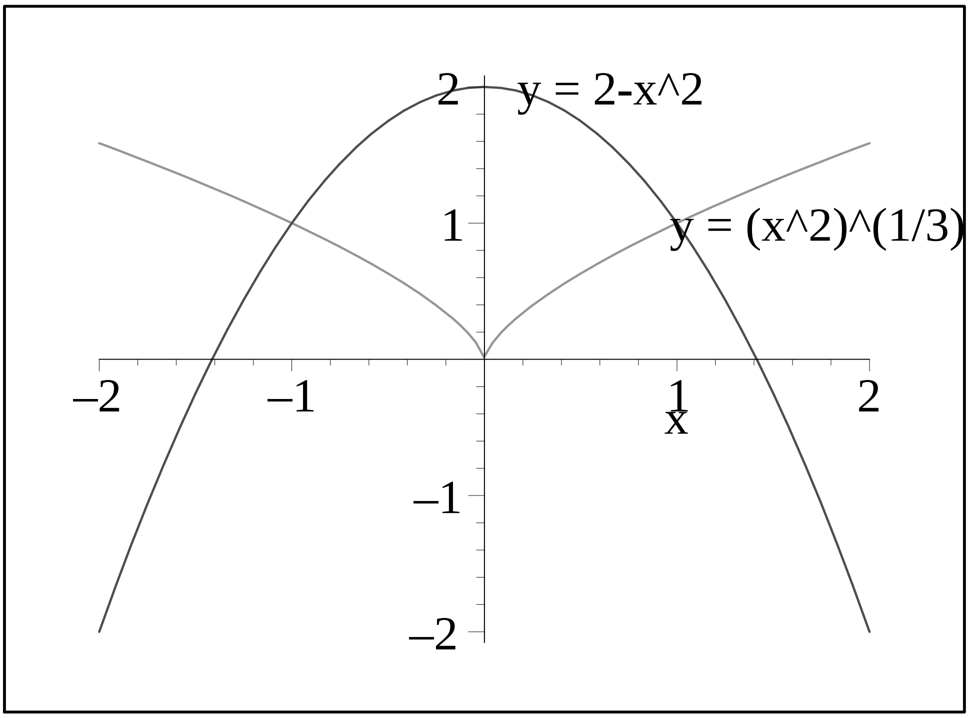
4.2 Cálculo de áreas encerras entre curvas

La aplicaión básica de la integral es el cálculo de áreas. En particular vamos a calcular el área limitada por funciones de la forma y=f(x), x=f(y), en coordenadas paramétricas o bien en coordenadas polares.

4.2.1 Ejemplo 3

Calcular el área encerrada por las funciones f(x)=2-x^2, g(x)=x^(2/3)

```
> restart:

> with(student):

> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> G:=plot([2-x^2,(x^2)^(1/3)],x=-2..2,thickness=3):

> t1:=textplot([0.7,2,'y=2-x^2']):

> t2:=textplot([1.8,1.,'y=(x^2)^(1/3)']):

> display([G,t1,t2],font=[TIMES,ROMAN, 14]);
```




```
> intercept(2-x^2=y,y=(x^2)^(1/3),{x,y});
```

$$\{y = 1,\ x = -1\},\ \{y = 1,\ x = 1\}$$

Observamos que la función f(x)=2-x^2 esta por encima de g(x)=(x^2)^(1/3), así que para calcular el área entre x=-1 y x=1, calcularemos. Por simetría calculamos lo que ocurre entre 0 y 1, y el resultado lo multiplicamos por dos para obtener el área total.

```
> Int(2-x^2-x^(2/3),x=0..1)=evalf(int(2-x^2-x^(2/3),x=0..1));
```

$$\int_0^1 2 - x^2 - x^{(2/3)}\,dx = 1.066666667$$

Demanera que el área encerra por estas dos curvas es:

```
> 1.066666667*2;
```

$$2.133333334$$

4.2.2 Ejercicios del 4 al 14

Calcular el área encerrada por las siguientes curvas y dibujar la zona, en los siguientes casos:

(4) f(x)=x^2/3, g(x)=4-2/3*x^2

(5) y^2=2*p*x, x^2=2*p*y

(6) f(x)=x^2+2, 2*x+5, x=0, x=6

(7) ¿Para qué valores de m encierran una región la recta y=mx y la curva y=x/(x^2+1)? . Encontrar su área. PISTA: Puede ser interesante pintar varias rectas para hacerse una idea del problema: m=1/4, m=1, m=-1,etc...

(8) y=x^2, y^2=x

(9) x=1-y^2, x=y^2-1

(10) x=t^2, y=t^3-3t

(11) x=t-1/t, y=t+1/t, y=2.5

(12) r=1/theta, Pi/6<=theta<=5*Pi/6

(13) r^2=4*cos(2*theta)

(14) r=sin(3*theta)

4.3 Cálculo de volúmenes

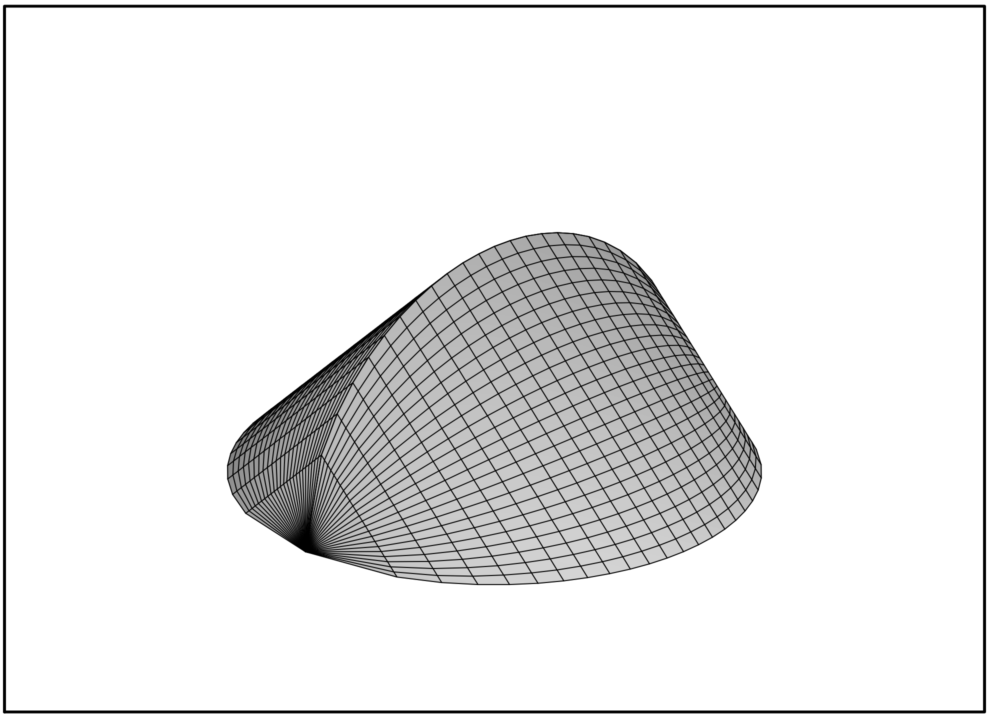
4.3.1 Ejemplo 4

Voy a pintar uno de los ejemplos que hicimos en clase:

```
> restart:
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> d1:=plot3d(sqrt(3)*(sqrt(1-x^2)-y), x=-1..1, y=0..sqrt(1-x^2)):
> d2:=plot3d(sqrt(3)*(sqrt(1-x^2)+y), x=-1..1, y=-sqrt(1-x^2)..0):
> display(d1,d2);
```



Aqui veiamos que las rebanadas eran triángulos equilateros y teniamos que el área de la seción era A(x)=b*h/2=sqrt(3)*y^2, como la base era la circunferencia unidad teniamos A(x)=sqrt(3)*(1-x^2), de manera que el volumen es la integral de la sección entre los valores de x=-1 y x=1 asi que

```
> V1:=int(sqrt(3)*(1-x^2),x=-1..1);
```

$$V1 := \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Como habiamos calculado en clase.

4.3.2 Ejercicios del 15 al 19

Calcula ahora los siguientes volúmenes. En las ocasiones que puedas intenta dibujar la gráfica de la función o al menos, la, base, la sección o lo máximos que puedas.

(15) y=x^2, x=1, y=0 alrededor del eje x

(16) y=x^2, y=4, x=0, x=2 alrededor del eje y

(17) Un cono circular recto con altura h y radio r

(18) Un casquete de una esfera con radio r y altura h

(19) El sólido tiene de base la región triangular con vértices (0,0), (2,0) y (0,1).Y sus secciones transversales perpendiculares al eje x son semicírculos.

4.4 Nociones de Probabilidad

Podemos definir de manera informal una *variable aleatoria* X como una cantidad cuyo valor depende del azar. Habitualmente lo que nos interesa conocer por tanto es la posibilidad de que esa variable tome unos valores u otros. Esa posibilidad es lo que llamaremos *probabilidad de que X tome los valores entre a y b* y la representaremos por p(a<=X<=b). La probabilidad se da normalizada, eso quiere decir que la probabilidad de que ocurra un cierto suceso estará entre 0 y 1. Hay muchas variables aleatrorias que son continuas y para ellas muchas veces conoceremos la *función de densidad* que es la que nos da el valor de la probabilidad de un cierto suceso de la siguiente manera

$$\text{p(a<=X<=b)}= \int_a^b \text{f}(x)\, dx$$

También calcularemos el **valor esperado** en cierto intervalo

$$\text{E(X)}= \int_a^b x\, \text{f}(x)\, dx$$

Ejemplo 5: Cierto satélite de comunicaciones incorpora dentro de su equipamiento un componente electrónico cuyo funcionamiento es esencial para el correcto desarrollo de las tareas de transmisión. Se sabe que el tiempo de fallo de este componente, expresado en años, viene descrito por una variable aleatoria continua X, con función de densidad dada por f(x)= 0x ¡ $0\frac{1\,x\,e^{(-\frac{1\,x}{10})}}{100}$otherwise

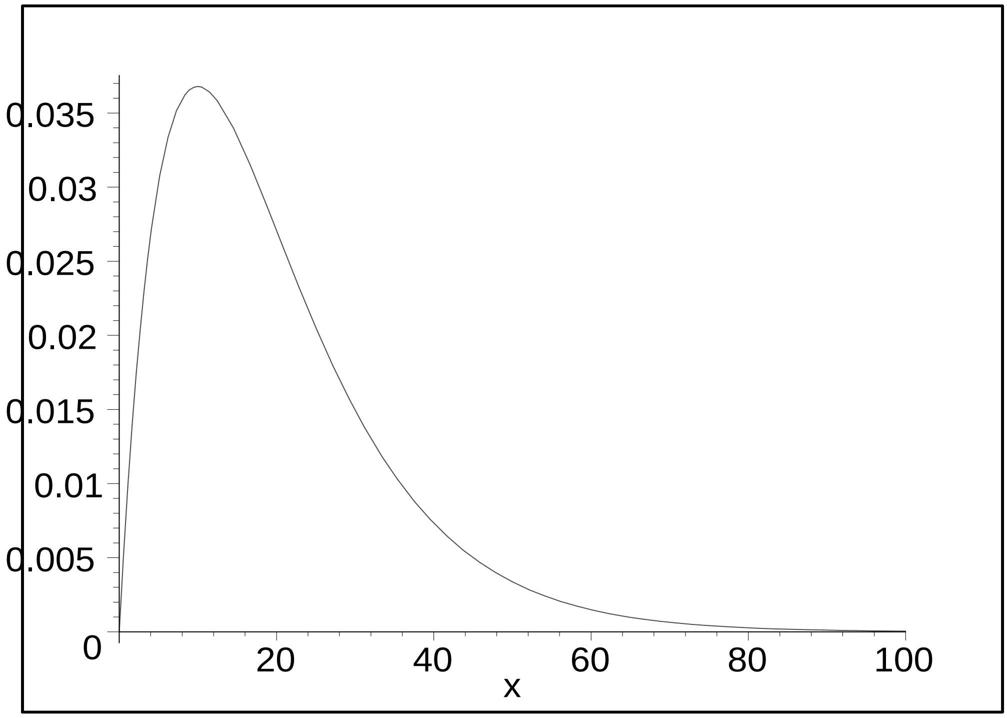
Se pide

(a) Dibujar la función de densidad

(b) Calcular la probabilidad de que el satélite deje de funcionar antes de que finalice el primer año de su lanzamiento.

(c) Calcular el tiempo esperado de vida util del satélite

```
>   f:=x->piecewise(x<0,0,x/100*exp(-x/10)):
>   plot(f(x),x=0..100);
```




```
>   int(f(x),x=0..1.);
```

$$0.004678840160$$

```
>   int(x*f(x),x=0..infinity);
```

$$20$$

4.4.1 Ejercicio 20

Para que el satélite de comunicaciones del ejemplo anterioresté operativo es necesario que describa una órbita cuya inclinación con respecto al ecuador terrestre esté comprendida entre 43 y 47 grados. Debido a múltiples perturbaciones la inclinación de la órbita varía de tal forma que en un instante cualquiera su valor se puede describir por medio de una variable aleatoria Y que medida en grados tiene como función de densidad es

g(y)=1/(2*sqrt(2*Pi))*exp(-(y-45)^2/8)

Se pide:

(a) Dibujar la función de densidad

(b) Calcular la probabilidad de que el satélite esté opertivo en un instante cualquiera.

(c) Calcular la inclinación esperada para la órbita del satélite.

Capítulo 5

INTEGRACION MULTIPLE

5.1 Cálculo de integrales dobles sobre rectángulos

5.1.1 Introducción

De forma similar a lo que ocurría en una variable con el área encerrada aquí pensaremos en el volumen encerrado entre la grafica de la función f(x,y), el rectángulo formado por a<=x<=b, c<=y<=d y sus ”paredes verticales”.

Para calcular integrales dobles podemos o utilizar dos veces el comando **int** o bien utilizar el comando **Doubleint,** este comando, como **Int,** es inerte, es decir, que necesitaremos luego calcular el valor seguidamente. Habitualmente utilizaré el comando **int** dos veces. Esto nos servirá para ser cómo es cada una de las integrales iteradas.

```
> restart:

> with(student):
> Int(Int(x^2+y^2,y=-1..1),x=-1..1)=int(int(x^2+y^2,y=-1..1),x=-
1..1);
```

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 + y^2 \, dy \, dx = \frac{8}{3}$$

```
> Doubleint(x^2+y^2,y=-1..1,x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 + y^2\, dy\, dx$$

```
> value(%);
```

$$\frac{8}{3}$$

Ejercicio 1: Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{2} x^3 + y^2\, dy\, dx$

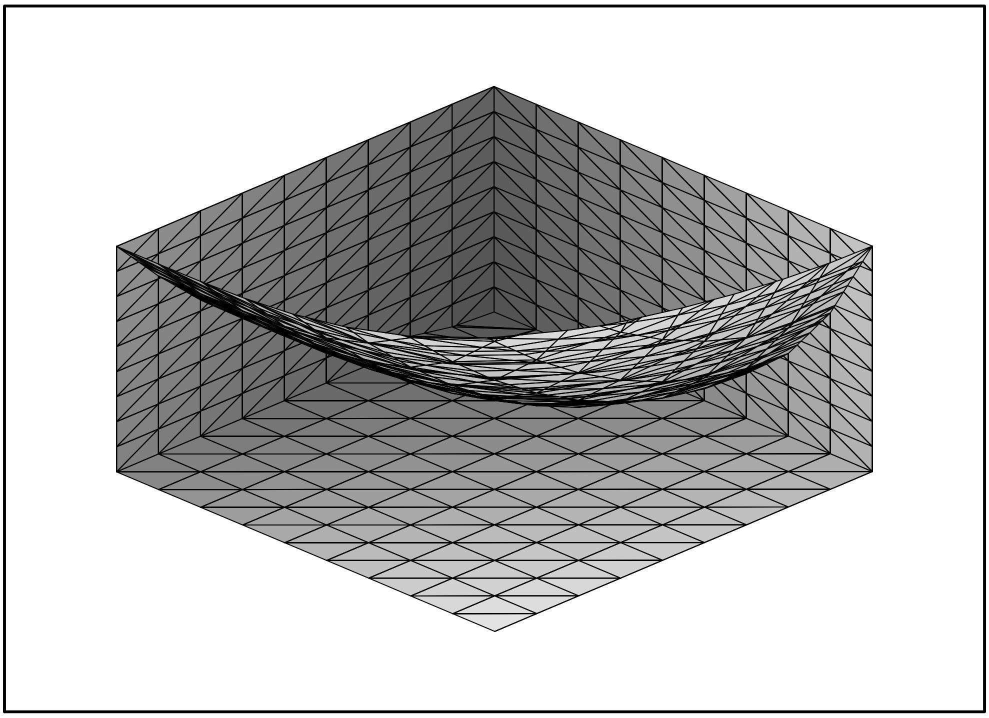
(b) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{3} y\, e^{(x\, y)}\, dy\, dx$

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{4} x^2\, y^2 \cos(x^3)\, dy\, dx$

Ejercicio 2: Comprueba el teorema de Fubini en las integrales del apartado anterior.

Ejemplo 1: Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos x=1, y=1 y la superficie z=x^2+y^4.

```
> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> implicitplot3d({z=x^2+y^4,y=0,x=0,z=0},x=0..1,y=0..1,z=0..1);
```



Calculamos el volumen que esta debajo del paraboloide elíptico y acotado por estos planos

```
> Int(Int(x^2+y^4,x=0..1),y=0..1)=Int(int(x^2+y^4,x=0..1),y=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^4 \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{1}{3} + y^4 \, dy$$

```
> Int(int(x^2+y^4,x=0..1),y=0..1)=int(int(x^2+y^4,x=0..1),y=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{3} + y^4 \, dy = \frac{8}{15}$$

Ejercicio 3: Calcula el volumen del sólido acotado por z=sin(y), 0<=y<=Pi/2, 0<=x<=1 y el plano xy. Dibuja dicho volumen.

Ejercicio 4: Calcula el volumen del sólido acotado por z=xˆ2+y, el rectángulo R=[0,1]x[1,2] y los ”lados verticales”de R. Dibuja dicho volumen.

5.2 Cálculo de integrales dobles sobre regiones más generales

Ahora vamos a calcular integrales dobles pero en lugar de sobre rect ángulos sobre regiones más generales.

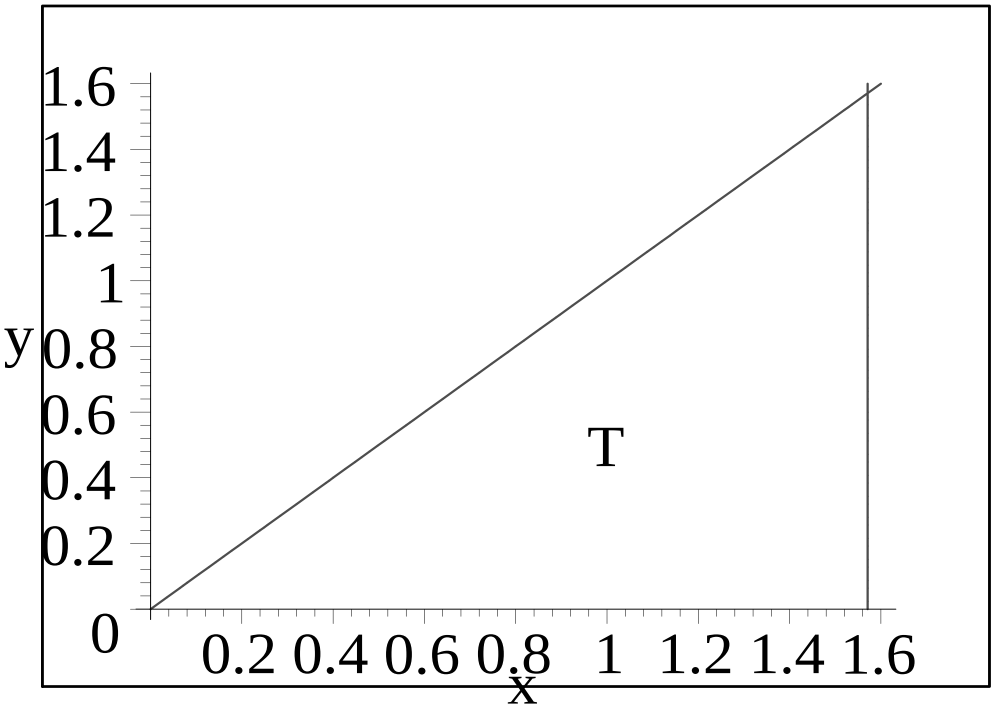
Ejemplo 2: Queremos calcular la integral de la función f(x,y)=xˆ3y+cos(x) sobre el triángulo que consta de los puntos (x,y) tales que 0<=x<=Pi/2, 0<=y<=x. Esto es:

```
> restart:
```

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> T:=implicitplot({x=Pi/2,y=x},x=0..2,y=0..1.6,thickness=3):
> t1:=textplot([1,0.5,'T']):
> display([T,t1],font=[TIMES,ROMAN, 18]);
```



Ahora calculamos la integral de f(x,y) sobre este triángulo

Si calculamos esto poco a poco tenemos:

```
> Int(Int(x^3*y+cos(x),y=0..x),x=0..Pi/2)=Int(int(x^3*y+cos(x),y=0..x),
> x=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x x^3\, y + \cos(x)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^5}{2} + \cos(x)\, x\, dx$$

```
> Int(int(x^3*y+cos(x),y=0..x),x=0..Pi/2)=int(int(x^3*y+cos(x),y=0..x),
> x=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^5}{2} + \cos(x)\, x\, dx = \frac{1}{768}\, \pi^6 + \frac{1}{2}\, \pi - 1$$

Esto es:

```
>   Int(Int(x^3*y+cos(x),y=0...x),x=0..Pi/2)=int(int(x^3*y+cos(x),y=0..
>   ,x=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x x^3\, y + \cos(x)\, dy\, dx = \frac{1}{768}\,\pi^6 + \frac{1}{2}\,\pi - 1$$

Ejercicio 5: Encontrar el volumen del tetraedro acotado por los planos y=0, z=0, x=0 y el plano y-x+z=1. Empieza dibujando el tetraedro.

Ejercicio 6: Sea D la región dada como el conjunto de (x,y) donde 1<=x^2+y^2<=2 e y>=0. Pintar D y evaluar la integral de f(x,y)=1+x*y sobre D.

Ejercicio 7: ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene base rectangular de 6 metros por 12 metros y paredes verticales de 9 metros al frente (en el lado que mide 6 metros) y 12 metros en la parte posterior? El granero tiene un tejado plano.

5.2.1 Cambio en el orden de integración

A veces cuando la región es más general que un rectángulo puede ser m ás fácil integrar con respecto a una variable que con respecto a otra.

Ejemplo 3: (Problema 2 del examen del 30 de enero de 2004). Calcula el valor de la integral

$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^5\, e^{(-y^2)}\, dy\, dx$

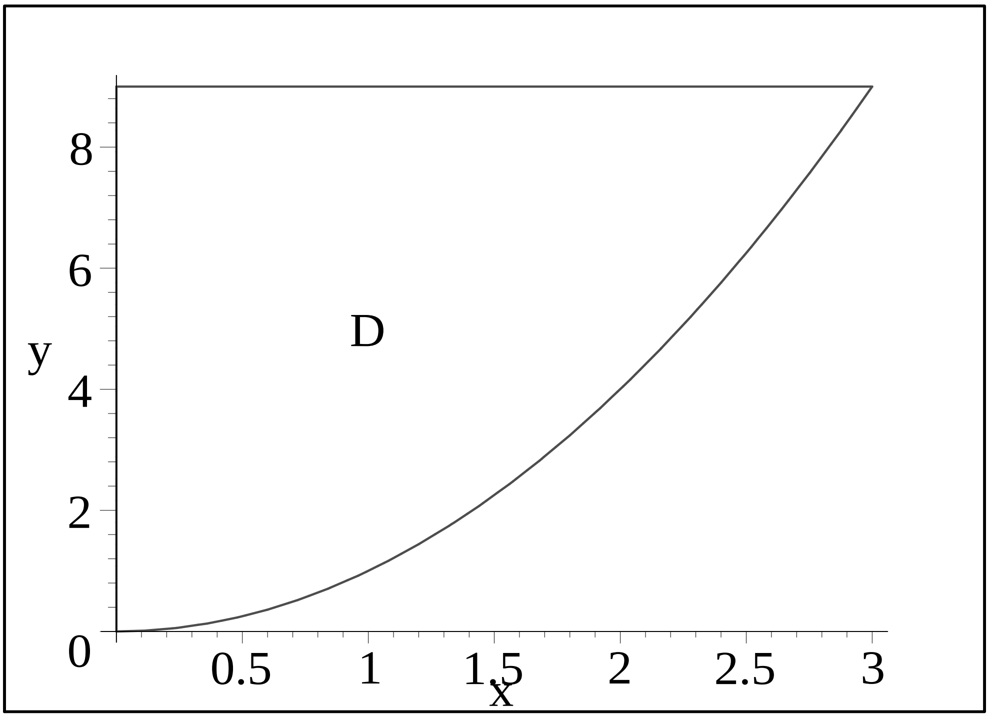
Si integramos en este orden nos aparece la función error, erf(y), ya que sabemos que $\int e^{(-y^2)}\, dy$ no tiene expresión en términos de funciones elementales:

```
>   Int(Int(x^5*exp(-y^2),y = x^2 ..  9),x = 0 ..
>   3)=Int(int(x^5*exp(-y^2),y = x^2 ..  9),x = 0 ..  3);
```

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^5\, e^{(-y^2)}\, dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(9)\, x^5\, \sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(x^2)\, x^5\, \sqrt{\pi}\, dx$$

Pero si cambiamos el orden de integración. Dibujamos el recinto para ayudarnos en el cambio de los límites de integración

```
> D1:=implicitplot({y=x^2,y=9,x=0},x=0..3,y=0..9,thickness=3):
> t2:=textplot([1,5,'D']):
> display([D1,t2],font=[TIMES,ROMAN, 14]);
```



tenemos

```
> Int(Int(x^5*exp(-y^2),y = x^2 .. 9),x = 0 ..
> 3)=Int(Int(x^5*exp(-y^2),x = 0 .. sqrt(y)),y = 0 .. 9);
```

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^5\, e^{(-y^2)}\, dy\, dx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^5\, e^{(-y^2)}\, dx\, dy$$

Y esta ya si podemos integrarla

```
> Int(Int(x^5*exp(-y^2),x = 0 .. sqrt(y)),y = 0 ..
> 9)=Int(int(x^5*exp(-y^2),x = 0 .. sqrt(y)),y = 0 .. 9);
```

$$\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^5\, e^{(-y^2)}\, dx\, dy = \int_0^9 \frac{1}{6}\, e^{(-y^2)}\, y^3\, dy$$

```
> Int(int(x^5*exp(-y^2),x = 0 .. sqrt(y)),y = 0 ..
> 9)=int(int(x^5*exp(-y^2),x = 0 .. sqrt(y)),y = 0 .. 9);
```

$$\int_0^9 \frac{1}{6}\, e^{(-y^2)}\, y^3\, dy = -\frac{41}{6}\, e^{(-81)} + \frac{1}{12}$$

Esto es:

```
>  Int(Int(x^5*exp(-y^2),x = 0 ..  sqrt(y)),y = 0 ..
>  9)=int(int(x^5*exp(-y^2),x = 0 ..  sqrt(y)),y = 0 ..  9.);
```

$$\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^5\, e^{(-y^2)}\, dx\, dy = 0.08333333333$$

Ejercicio 8: Evaluar la integral $\int_0^{\frac{1\pi}{2}} \int_0^{\cos(x)} \cos(x)\, dy\, dx$

Ejercicio 9: Evaluar la integral $\int_1^2 \int_0^{\ln(x)} (x-1)\, \sqrt{1 + e^{(2\, y)}}\, dy\, dx$

5.3 Cálculo de integrales triples

De manera similar a como integrabamos con dos variables vamos a integrar ahora con tres, ahora la idea de volumen solo la tendremos cuando integremos sobre una región acotada la función constantemente 1. Pero el mecanismo es similar al que utilizamos en integrales dobles solo que ahora integraremos sobre regiones en R^3. También tenemos el teorema de Fubini para dimensión tres. Y ahora las regiones de integración se pueden ver como de cuatro tipos generales.

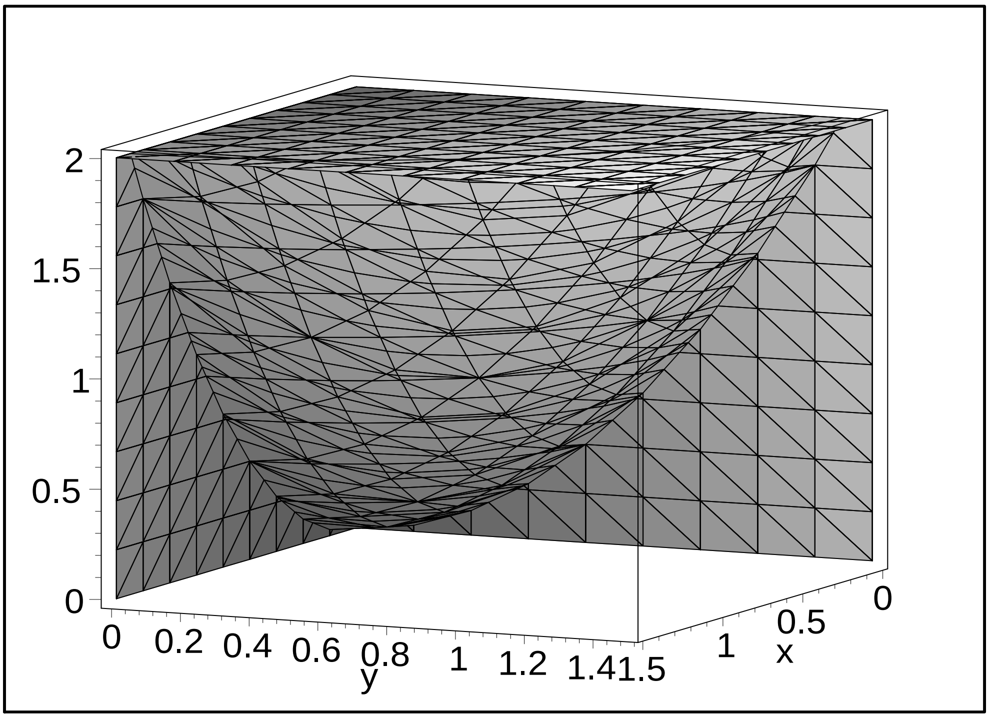
Existe el comando inerte **Tripleint** que al igual que el **Doubleint** prácticamente no usaremos y si que usaremos tres veces el comando Int e int.

```
>  restart:

>  with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined
```

Ejemplo 4: Sea W la región acotada por los planos x=0, y=0, z=2 y la superficie z=x^2+y^2, x>=0,y>=0. Calcular la integral de f(x,y,z)=x sobre W.

Empezamos pintando la región de integración:

```
>  implicitplot3d({x=0,y=0,z=2,z=x^2+y^2
>  },x=0..1.5,y=0..1.5,z=0..2,axes=boxed,orientation=[25,80]);
```



Y ahora integramos la función sobre esta región teniendo especial cuidado en los límites de integración:

```
>  Int(Int(Int(x,z = x^2+y^2 ..  2),y = 0 ..  sqrt(2-x^2)),x =
0 ..
>  sqrt(2))=Int(Int(int(x,z = x^2+y^2 ..  2),y = 0 ..  sqrt(2-
x^2)),x = 0
>  ..  sqrt(2));
```

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x \left(2 - x^2 - y^2\right) dy \, dx$$

```
> Int(Int(int(x,z = x^2+y^2 .. 2),y = 0 .. sqrt(2-x^2)),x =
0 ..
> sqrt(2))=Int(int(int(x,z = x^2+y^2 .. 2),y = 0 .. sqrt(2-
x^2)),x = 0
> .. sqrt(2));
```

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x\,(2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\,x\,(2 - x^2)^{(3/2)}}{3}\,dx$$

```
> Int(int(int(x,z = x^2+y^2 .. 2),y = 0 .. sqrt(2-x^2)),x =
0 ..
> sqrt(2))=int(int(int(x,z = x^2+y^2 .. 2),y = 0 .. sqrt(2-
x^2)),x = 0
> .. sqrt(2));
```

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\,x\,(2 - x^2)^{(3/2)}}{3}\,dx = \frac{8\,\sqrt{2}}{15}$$

Ejercicio 10: Verificar el volumen de una esfera de radio 1. (Tiene que salir 4/3*Pi). Empezar pintando la esfera.

Ejercicio 11: Evaluar la integral de x^2*cos(z) sobre el volumen W, que es la región acotada por los planos: z=0, z=Pi, y=0, y=Pi, x=0, y x+y=1. Empezar pintando la región.

5.4 Cambios de variable

```
> restart:
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Hemos visto en teoria que si D=T(D1), con T(u,v)=(x(u,v),y(u,v)) con (u,v) en D1 y J es el determinante de la matriz jacobiana de T tenemos que:

$\int\ \int_{\mathrm{D}} 1\,dx\,dy$

$$= \int\ \int_{\mathrm{D1}} |J|\ du\,dv$$

En particular en R teniamos:

$\int_a^b \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}(u))\,dx}{du}\,du$

$$= \int_{\mathrm{x}(a)}^{\mathrm{x}(b)} \mathrm{f}(x)\,dx$$

donde f es continua y u–>x(u) es continuamente diferenciable en [a,b]

En R^2 tendremos

$\int \int_{\mathrm{D}} \mathrm{f}(x,\,y)\,dx\,dy$

$$= \int \int_{\mathrm{D1}} \mathrm{f}(\mathrm{x}(u,\,v),\,\mathrm{y}(u,\,v))\ |J|\ du\,dv$$

Y de manera similar

$\int \int \int_{\mathrm{W}} \mathrm{f}(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \int \int \int_{\mathrm{W1}} \mathrm{f}(\mathrm{x}(u,\,v,\,w),\,\mathrm{y}(u,\,v,\,w),\,\mathrm{z}(u,\,v,\,w))\ |J|\ dx\,dy\,dz$$

siendo W un dominio en R^3 imagen de W1 de R^3 por una aplicación S: R^3 en R^3 y J el jacobiano de S.

Ejemplo 5: Sea P el paralelogramos acotado por y=2*x, y=2*x-2, y=x, y=x+1. Evaluar la integral de f(x,y)=x*y sobre P haciendo el cambio de variable x=u-v, y=2*u-v.

Vamos a empezar pintando el paralelogramo:

```
> solve({y=2*x, y=x},{x,y});
```

$$\{y = 0,\ x = 0\}$$

```
> solve({y=2*x, y=x+1},{x,y});
```

$$\{x = 1,\ y = 2\}$$

```
> solve({y=2*x-2, y=x+1},{x,y});
```

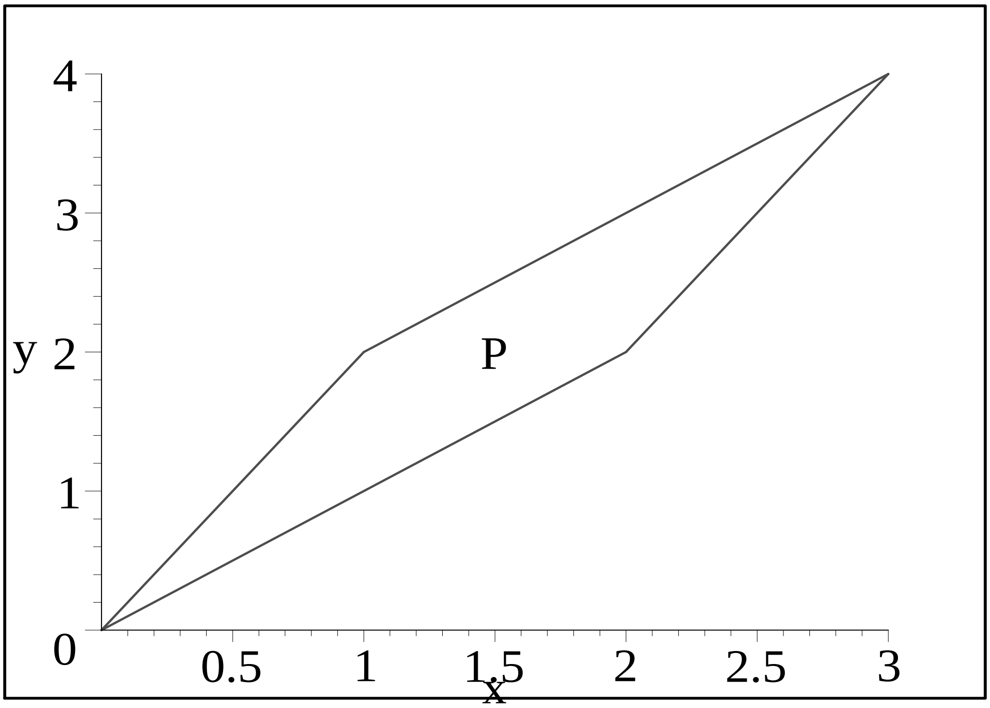
$$\{y = 4,\ x = 3\}$$

```
> solve({y=2*x-2, y=x},{x,y});
```

$$\{x = 2,\ y = 2\}$$

Estas son las cuatro esquinas, lo pintamos

```
> P:=plot([[0,0],[2,2],[3,4],[1,2],[0,0]],x=0..3,y=0..4,thickness=3):
> p1:=textplot([1.5,2,'P']):
> display([P,p1],font=[TIMES,ROMAN, 14]);
```



Observamos que P1 será x=u-v, y=2*u-v,

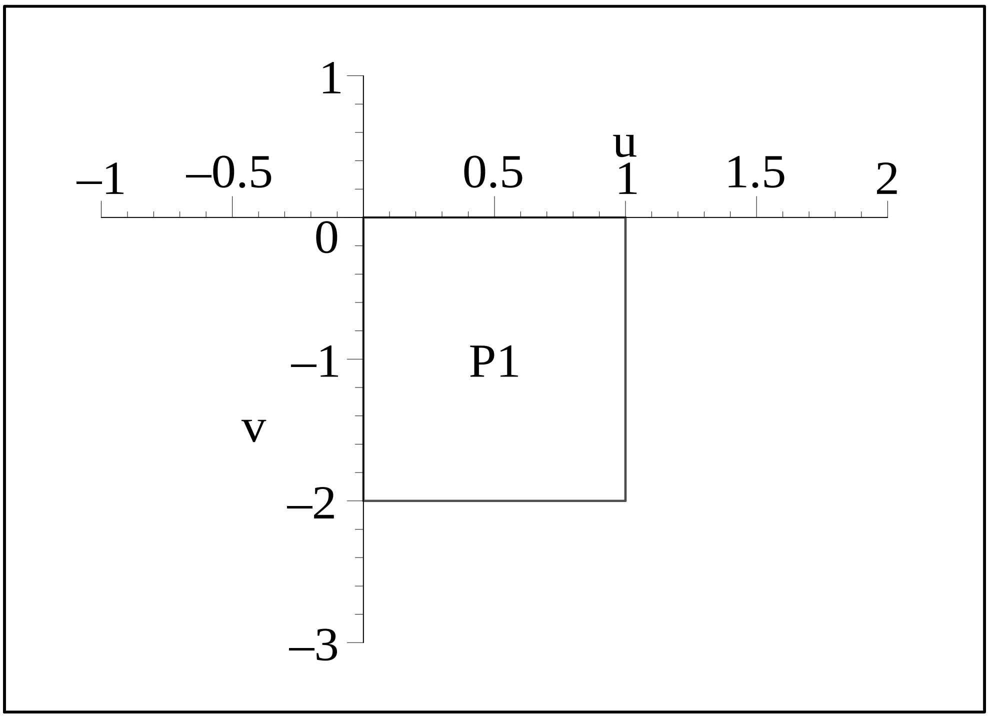
```
> solve({x=u-v, y=2*u-v},{u,v});
```

$$\{u = y - x, \, v = y - 2\,x\}$$

De manera que P se convierte en P1

v=y-2*x=0, v=y-2*x=-2, u=y-x=0, u=y-x=1, esto es:

```
> P1:=plot([[0,0],[0,-2],[1,-2],[1,0],[0,0]],u=-1..2,v=-3..1,thicknes
> 3):
> p2:=textplot([0.5,-1,'P1']):
> display([P1,p2],font=[TIMES,ROMAN, 14]);
```



Asi que para calcular $\int \int_P x\, y\, dx\, dy$ utilizando la fórmula del cambio de variable necesitamso tambien calcular el jacobiano con el comando **jacobian** del paquete **linalg**

```
> restart:
> with(student):
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> T:=vector([u-v, 2*u-v]);
```

$$T := [u - v, 2\,u - v]$$

```
> J1:=jacobian(T,[u,v]);
```

$$J1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> det(J1);
```

$$1$$

De manera que

```
> Doubleint(x*y,x,y,P)=Doubleint((u-v)*(2*u-v)*1,u,v,P1);
```

$$\int\int_{P} x\,y\,dx\,dy = \int\int_{P1} (u-v)\,(2\,u-v)\,du\,dv$$

```
> collect((u-v)*(2*u-v),u);
```

$$2\,u^2 - 3\,u\,v + v^2$$

```
> Int(Int((u-v)*(2*u-v),u = P1 ..  ``),v = `` ..
> ``)=Int(Int(2*u^2-3*v*u+v^2,u = 0..1),v =-2..0);
```

$$\int\int_{P1} (u-v)\,(2\,u-v)\,du\,dv = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{1} 2\,u^2 - 3\,u\,v + v^2\,du\,dv$$

```
> Int(Int(2*u^2-3*v*u+v^2,u = 0 ..  1),v = -2 ..
> 0)=Int(int(2*u^2-3*v*u+v^2,u = 0 ..  1),v = -2 ..  0);
```

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{1} 2\,u^2 - 3\,u\,v + v^2\,du\,dv = \int_{-2}^{0} \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\,v + v^2\,dv$$

```
> Int(2/3-3/2*v+v^2,v = -2 ..  0)=int(2/3-3/2*v+v^2,v = -2 ..
0);
```

$$\int_{-2}^{0} \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\,v + v^2\,dv = 7$$

Ejercicio 12: Sea T(u,v)=(4*u,2*u+3*v). Sea D1 el rectángulo [0,1]x[1,2]. Encontrar D=T(D1) y evaluar

(a) $\int\int_{\mathrm{D}} x\,y\,dx\,dy$

(b) $\int\int_{\mathrm{D}} x - y\,dx\,dy$

mediante un cambio de variables para evaluarlas como integrales sobre D1

Ejercicio 13: Repetir el ejercicio 12 pero con T(u,v)=(u,v*(1+u))

Ejercicio 14: Definir T(u,v)=(u^2-v^2,2*u*v). Sea D1 el conjunto (u,v) con u^2+v^2<=1, u>=0,v>=0. Encontrar T(D1)=D. Evaluar $\int\int_{\mathrm{D}} 1\,dx\,dy$

5.5 Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

De los cambios de variable destacan los siguientes por ser especialmente útiles según la geometría del recinto sobre el que se integra: circunferencias, elipses, cilindros , esferas, anillos, secciones de los anteriores, etc.

5.5.1 Cambio a polares

La función de r^2 en R^2 que transforma coordenadas polares en cartesianas esta dada por: x=r*cos(θ), y=r*sin(θ), aquí el jacobiano esta dado por

$$\theta$$

$$\theta$$

```
> pol:=vector([r*cos(theta),r*sin(theta)]);
```

$$pol := [r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)]$$

```
> Jpol:=jacobian(pol,[r,theta]);
```

$$Jpol := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

y su determinante es

```
> simplify(det(Jpol));
```

$$r$$

Ejemplo 6: Evaluar $\int \int_{\mathrm{D}} \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy$, donde D es la región en el primer cuadrante, entre los arcos de círculos x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=b^2, 0<a<b. Estos círculos tienen por ecuaciones r=a y r=b en coordenadas polares. Por lo tanto la transformación x=r*cos(θ), y=r*sin(θ) envía el rectándulo D1 dado por a<=r<=b, 0<= θ<=Pi/2 sobre el anillo D de manera que por el teorema del cambio de variable tendremos

$$\theta$$

θ

θ

```
> Int(Int(ln(x^2+y^2),x = D ..  ''),y = '' ..  '')=Int(Int(ln(r^2)*r,
=
> D1 ..  ''),theta = '' ..  '');
```

$$\int\int_{\mathrm{D}} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\int_{\mathrm{D1}} \ln(r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

```
> Int(Int(ln(r^2)*r,r = D1 ..  ''),theta = '' ..
> '')=Int(int(ln(r^2)*r,theta = 0..Pi/2),r =a..b);
```

$$\int\int_{\mathrm{D1}} \ln(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_a^b \frac{1}{2}\ln(r^2)\,r\,\pi\,dr$$

```
> Int(int(ln(r^2)*r,theta = 0..Pi/2),r =a..b)=int(int(ln(r^2)*r,theta
=
> 0..Pi/2),r =a..b);
```

$$\int_a^b \frac{1}{2}\ln(r^2)\,r\,\pi\,dr = \frac{1}{4}\pi\,b^2\ln(b^2) - \frac{\pi\,b^2}{4} - \frac{1}{4}\pi\,a^2\ln(a^2) + \frac{\pi\,a^2}{4}$$

Ejercicio 15: Sea D el disco unitario. Evaluar $\int\int_{\mathrm{D}} e^{(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ mediante un cambio de variables a coordenadas polares.

Ejercicio 16: Usando coordenadas polares encontrar e área acotada por la lemniscata (x^2+y^2)^2=2*a^2*(x^2-y^2)

5.5.2 Cambio a cilindricas

Una manera de generalizar el cambio a polares en R^3 son las coordenadas cilíndricas en las que haremos poalres en el plano xy y mantendremos la z como variable, esto es:

x=r*cos(θ)

y=r*sin(θ)

z=z

Aquí el jacobiano de nuevo es de la forma

$$\theta$$

$$\theta$$

```
> cil:=vector([r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
```

$$cil := [r\cos(\theta),\ r\sin(\theta),\ z]$$

```
> Jcil:=jacobian(cil,[r,theta,z]);
```

$$Jcil := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> simplify(det(Jcil));
```

$$r$$

Ejercicio 17:Hacer el cambio a variables cilindricas a $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$

Ejercicio 18: Hacer el cambio a coordenadas cilíndricas a $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x\, y\, z\, dz\, dx\, dy$

5.5.3 Cambio a esféricas

Si el problema tiene geometría esférica lo que combiene es hacer el cambio a esfericas este es:

x=r*sin(ϕ)*cos(θ)

y=r*sin(ϕ)*sin(θ)

z=r*cos(ϕ)

Ahora el jacobiano es de la forma:

$$\phi$$

$$\theta$$

$$\phi$$

$$\theta$$

$$\phi$$

```
> esf:=vector([r*sin(phi)*cos(theta),r*sin(phi)*sin(theta),r*cos(phi)
> ;
```

$$esf := [r\sin(\phi)\cos(\theta),\ r\sin(\phi)\sin(\theta),\ r\cos(\phi)]$$

```
> Jesf:=jacobian(esf,[r,theta,phi]);
```

$$Jesf := \begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & -r\sin(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & r\sin(\phi)\cos(\theta) & r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\phi) & 0 & -r\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

```
> simplify(det(Jesf));
```

$$-\sin(\phi)\,r^2$$

Ejemplo 7: Evaluar $\int\int\int_B (e^{(x^2+y^2+z^2)})^{(\frac{3}{2})}\,dx\,dy\,dz$ siendo B la bola unidad en R^3. Por la geometria del dominio nos vamos a calcularla utilizando coordenadas esféricas, de manera que x^2+y^2+z^2^=r^2 y la regíon ahora será 0<= r<=1, 0<= θ<=2*Pi, 0<= ϕ<=Pi

$$\theta$$

$$\phi$$

```
> Int(Int(Int(exp(x^2+y^2+z^2)^(3/2),x = B ..  ``),y = `` ..
``),z = ``
> ..  ``)=Int(Int(Int(exp(r^2)^(3/2)*r^2*sin(phi),theta = 0..2*Pi),ph
> =0..Pi),r = 0..1);
```

$$\int\int\int_B (e^{(x^2+y^2+z^2)})^{(3/2)}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (e^{(r^2)})^{(3/2)}\,r^2\sin(\phi)\,d\theta\,d\phi\,dr$$

```
> Int(Int(Int(exp(r^2)^(3/2)*r^2*sin(phi),theta = 0 ..  2*Pi),phi
= 0 ..
> Pi),r = 0 ..  1)=Int(Int(Int(exp(r^3)*r^2*sin(phi),theta =
0 ..
> 2*Pi),phi = 0 ..  Pi),r = 0 ..  1);
```

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (e^{(r^2)})^{(3/2)}\,r^2\sin(\phi)\,d\theta\,d\phi\,dr = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{(r^3)}\,r^2\sin(\phi)\,d\theta\,d\phi\,dr$$

```
> Int(Int(Int(exp(r^3)*r^2*sin(phi),theta = 0 .. 2*Pi),phi =
0 .. Pi),r
> = 0 .. 1)=Int(Int(int(exp(r^3)*r^2*sin(phi),theta = 0 .. 2*Pi),phi
= 0
> .. Pi),r = 0 .. 1);;
```

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{(r^3)}\, r^2 \sin(\phi)\, d\theta\, d\phi\, dr = \int_0^1 \int_0^\pi 2\, e^{(r^3)}\, r^2 \sin(\phi)\, \pi\, d\phi\, dr$$

```
> Int(Int(2*exp(r^3)*r^2*sin(phi)*Pi,phi = 0 .. Pi),r = 0 ..
> 1)=Int(int(2*exp(r^3)*r^2*sin(phi)*Pi,phi = 0 .. Pi),r = 0
.. 1);
```

$$\int_0^1 \int_0^\pi 2\, e^{(r^3)}\, r^2 \sin(\phi)\, \pi\, d\phi\, dr = \int_0^1 4\, e^{(r^3)}\, r^2\, \pi\, dr$$

```
> Int(4*exp(r^3)*r^2*Pi,r = 0 .. 1)=int(4*exp(r^3)*r^2*Pi,r
= 0 ..
> 1);
```

$$\int_0^1 4\, e^{(r^3)}\, r^2\, \pi\, dr = \frac{4}{3}\, \pi\, e - \frac{4\,\pi}{3}$$

Ejercicio 19: Calcular el volumen de la esfera de radio R y centro (0,0,0) utilizando coordenadas esféricas.

Ejercicio 20: Sea D el primer octante de la bola de radio a. Evaluar
$\int\int\int_{\mathrm{D}} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{(\frac{1}{4})}}{(z+x^4+2\,x^2\,y^2+2\,x^2\,z^2+y^4+2\,y^2\,z^2+z^4)^{(\frac{1}{2})}}\, dx\, dy\, dz$ mediante un cambio de variables.

Bibliografía

[1] Apostol, T.M. Calculus 2a ed. Reverté. Barcelona, 1972

[2] Anton, H. Calculus: a new horizon. 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999

[3] Bartle, R. and Sherbert, D. Introducción al Análisis matemático de una variable. Ed. Limusa. Mejico D. F. 1991.

[4] García et al. Calculo I. ????

[5] Larson et al. Algebra Lineal. Ed Pirámide. Madrid 2004

[6] Cohen, M. et al. Proof wihtout words: Geometrics Series. Mathematics Magazine. Vol 74. nº4 page 320, October 2001

[7] Pérez, C. Métodos matemáticos y programación con Maple V. 1a ed. ra-ma. Madrid, 1998.

[8] Roanes, E. et al. Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[9] Murray R. Spiegel, et al. Fórmulas y tablas de matemática aplicada. 2ª ed. Madrid 2000.

[10] Spivak, M. Calculus : cálculo infinitesimal 2a ed. Reverté. Barcelona, 1988.

[11] Anton, H. Calculus: a new horizon. 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999.

[12] Del Castillo, F. Análisis matemático II. 1ª ed. Alhambra Universidad. Madrid, 1980.

[13] Marsden, J.E. y Tromba, A. Calculo vectorial. 4a ed. Addison-Wesley Longman de México. Naucalpán de Juárez, 1998

[14] Pérez, C. Métodos matemáticos y programación con Maple V. 1a ed. ra-ma. Madrid, 1998.

[15] Roanes, E. et al. Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[16] Stewart, J. Cálculo: conceptos y contextos. International Thomson Editores. Mexico D.F., 1999