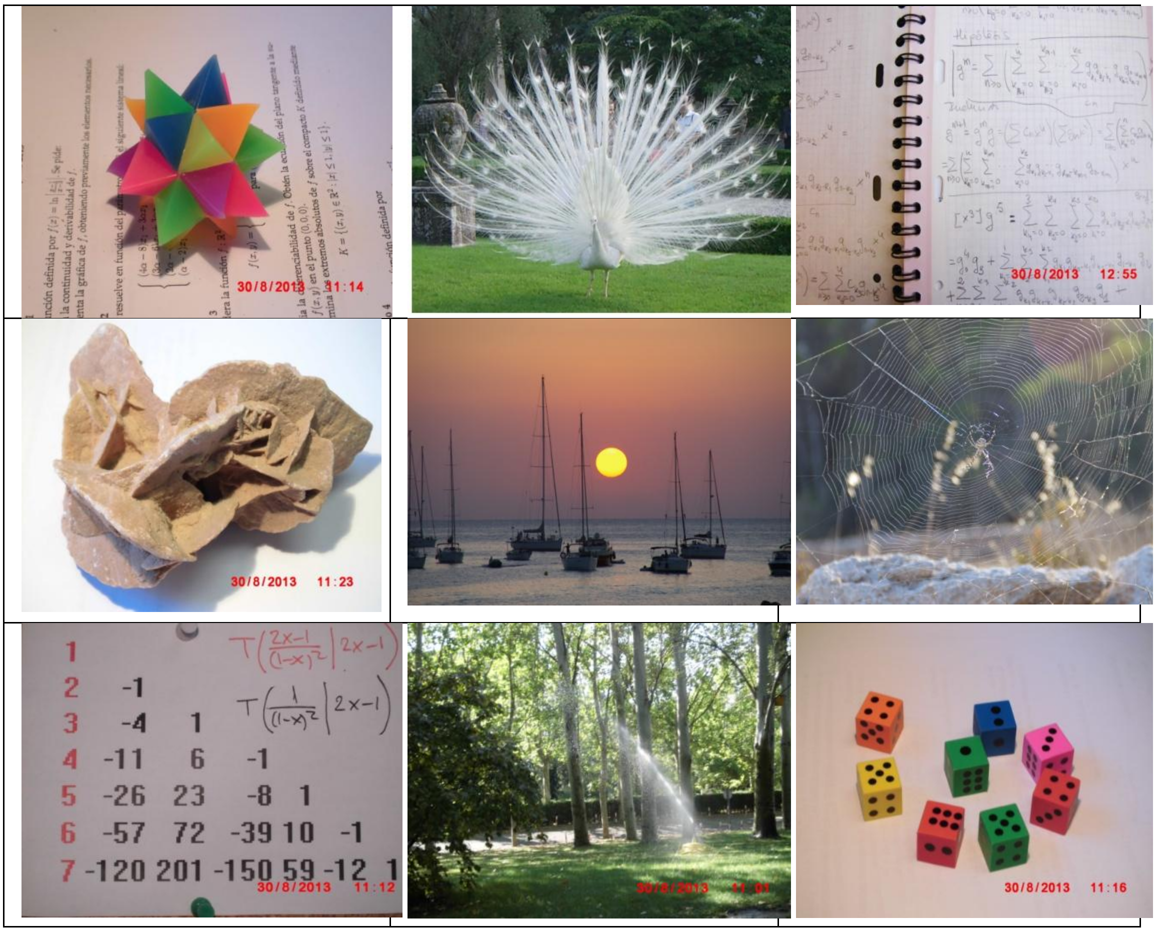


Matemáticas I

Ana Luzón

La foto de portada de la puesta de sol es cortesía de M.P. Luzón.

La foto de portada de la tela de araña es cortesía de J.L. Rubio.

Madrid, Septiembre 2013.

De cómo usar estos apuntes o de cómo estudiar.

El objetivo de estos apuntes es servir de ayuda para los estudiantes que cursan el curso de Matemáticas I en el grado de Ingeniería Forestal en la Escuela de Ingeniería Forestal y del Medio Natural, en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid.

Estos apuntes los he pensado para que el alumno al que va dirigido, siga una evaluación continúa. Uno de los pilares de este tipo de evaluación es **la asistencia y participación en clase**. En mi opinión, siendo muchas veces parte como oyente de clases y conferencias, pienso que la posición difícil en una clase es la del alumno. El alumno esta recibiendo, muchas veces por primera vez, información que ha de ir escuchando, entendiendo y *digiriendo* para poder continuar la explicación. Es por esto que me decidí a escribir estos apuntes. Pienso que podrían servir para que **leer los apuntes antes de la clase**, que **tratar de pensar por uno mismo cómo solucionar los problemas y ejemplos antes de que los haga yo en clase** y además, si se ha conseguido todo eso, intentar **resolver los problemas propuestos** aquí y en la bibliografía complementaría para luego en clase **preguntar las dudas que hayan surgido** y, como lo que pone en estas notas es lo que digo en clase, **no es necesario tomar** prácticamente **apuntes**. Normalmente se suele hacer al reves, soltamos la charla en clase y se toman apuntes, se copian los problemas que ha resuelto el profesor de turno y a veces, en muy pocas ocasiones o ninguna, se hace algún problema que no se tenga resuelto o con solución, preguntando las dudas un día antes del examen. Pues esto no da resultado. En resumen, un poco de **escucha activa** en clase puede servir para que las clases de matemáticas (y de cualquier otra asignatura) no resulten una pesadilla y se tenga menos trabajo que hacer más tarde en casa.

El temario de esta asignatura lo he dividido en cuatro temas que corresponden a los cuatro meses, más o menos, en los que hay clase este primer semestre: En el primer tema, el tema de introducción, repasaremos las matemáticas que se han visto en bachillerato. En el segundo tema estudiamos el Cálculo Diferencial en una variable. Este tema es fundamental. Es el que mejor hay que saberse y entender. El resto de las matemáticas que se vayan a ver en la carrera dependen de él. El concepto de límite será básico en esta parte. En el tercer tema veremos Cálculo Diferencial en varias variables. Como nuestro nivel es elemental, nos conformaremos con unas cuantas pinceladas parándonos especialmente en el concepto de diferencial de una función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ¿Qué significa *derivar* una función cuya gráfica es una superficie en el espacio? Terminaremos este capítulo estudiando problemas de optimización relacionados con funciones escalares. El último tema: Integración en una variable, tiene su importancia por varias razones: una teórica, estudiaremos el teorema fundamental del Cálculo y entenderemos la integral y la derivada como procesos inversos uno de otro. Una práctica: las aplicaciones de este tema son enormes y aparecen en numerosas asignaturas y otra práctica ya que en Matemáticas II empezarás estudiando las integrales en varias variables y para eso vendrá muy bien haber acabado Matemáticas I con integración en una variable.

En mis clases, habitualmente, suelo proyectar los enunciados de la teoría, los ejemplos, gráficas, etc y las complemento con la resolución en la pizarra de ejemplos y problemas. En estas notas encontrarás el contenido proyectado al que he añadido algunas explicaciones, ejemplos, problemas resueltos y problemas propuestos. En ellos puedes encontrar algunas notas teóricas: definiciones, propiedades, proposiciones, algún teorema, pocas demostraciones.... Todo esto puede encontrarse en más cantidad y mucho mejor, en muchos libros. Entonces ¿por qué escribo esto? A parte de lo dicho anteriormente, también porque me lo han pedido algunos alumnos durante varios años.

También se pueden encontrar ejemplos y problemas resueltos que llevan la misma numeración, son esencialmente lo mismo. Salvo que, quizá, me esfuerce más en que me dé tiempo a explicar los ejemplos (básicos para entender el concepto que estemos tratando) mientras que los problemas resueltos los haremos o no en clase dependiendo de cómo vayamos de tiempo. En los problemas resueltos encabezo la solución por **Mi solución**. Mi solución significa que he pensado el problema y la solución a mi manera, con mis conocimientos, desde mi punto de vista didáctico....puede que el resultado sea único pero el camino, en muchas ocasiones, depende de cada uno. Por eso es importante que cada cual encuentre su propia manera de solucionar los problemas. Para esto es fundamental pensar el problema antes de que exponga mi solución. También encontrarás preguntas y problemas propuestos.

Al final he adjuntado un apéndice con los exámenes resueltos de los años anteriores. Y finalizo con una extensa bibliografía incluyendo algunas páginas web.

Estos apuntes han tenido diversas fuentes: de mis profesores de todos los niveles, de las clases que recibí, de mi trabajo de investigación, de la bibliografía adjunta y de alguna más, de la impartición de las clases (si, dando clase también se aprende) y de mis compañeros, en especial del profesor Manuel Alonso Morón, catedrático de la Universidad Complutense de Madrid, mi sparring matemático.

Para los alumnos del grupo C de Matemáticas I del curso 2013/14 del grado de Ingeniería Forestal de la UPM:

Por ser un borrador, todavía le faltan a estas notas ejemplos, problemas, gráficas, revisiones, etc. Te invito a que me digas cualquier sugerencia, errata, error, ampliación, etc. que se te ocurra. Lo tendré en cuenta para la evaluación continua!

A. L.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCION

1.1. Introducción

Un objetivo de este capitulo es recordar y ponernos al día de las matemáticas que has visto anteriormente. Depende de donde hayas cursado el bachillerato, habrás visto con más detenimiento o profundidad unos temas u otros, vamos a intentar que la clase alcance un cierto nivel de partida, tu tendrás que ver en qué estás más fuerte o más flojo y aplicarte. Otro objetivo de este tema es mirar algunos resultados que ya conoces desde otro punto de vista, un punto de vista menos computacional y más abstracto. Realmente este objetivo es común con buena parte del temario de esta asignatura porque la mayoría de los conceptos ya los has visto alguna vez. Un último objetivo puede ser que en estas tres primeras semanas en las que vamos a trabajar este tema, debido a que muchas cosas son ya conocidas, te centres en encontrar tu manera de estudiar, en encontrar un programa informático, un lenguaje de programación, un paquete informático o una aplicación para matemáticas que te guste utilizar y en asegurar, una buena nota para el primer examen parcial.

Este tema tiene dos bloques: una ligera introducción al Algebra Lineal y la Geometría y otro dedicado a una introducción al Cálculo Diferencial. Empezaremos el primer bloque dando un repaso a la geometría en el plano y en el espacio, continuaremos con sistemas lineales, cuando podamos los interpretaremos geométricamente, y el método de Gauss para la resolución de dichos sistemas. Terminando con un repaso de matrices, aunque ya las hayamos utilizado. En el segundo bloque veremos las propiedades básicas de los números reales, las primeras definiciones y ejemplos de funciones reales de variable real. En esta parte el método de inducción suele ser uno de los puntos flojos que debes tratar.

Acabaremos con un primer vistazo a las funciones de varias variables con valores vectoriales.

A menudo utilizaré la notación $\mathbb{K}$ diciendo que $\mathbb{K}$ es un cuerpo, en particular estaré pensando generalmente en $\mathbb{R}$, pero también puede que estemos con $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}$.

Y como el movimiento se demuestra andando te encargo el primer trabajo individual que tendrás que entregar el día que te propongo en el calendario del curso.

Primer trabajo individual o superchuleta. Muchos libros tienen en sus contraportadas tablas con fórmulas y expresiones varias. Eso es lo que quiero que hagas: 2 hojas, por las dos caras si es necesario, con un resumen de las matemáticas que has visto hasta ahora y creas que te puede venir bien recordar. De estas hojas harás dos copias, una para entregarme y otra para ti que podrás llevar en todo momento en clase, incluso en los exámenes de evaluación continua. Puedes imaginar que el objetivo fundamental de este trabajo es repasar las matemáticas que has estudiado en tu etapa pre-universitaria. Como orientación sobre qué puedes incluir en tus tablas te recomiendo los siguientes problemas:

Problema 1.- Recuerda las ecuaciones generales de una recta en el plano y en el espacio, de un plano, de una circunferencia, de una parábola, de una elipse y de una hipérbola. También de una esfera, un cilindro y un cono.

Problema 2.- Construye una tabla con las principales medidas de las figuras elementales. Esto es: Perímetro y Area de un rectángulo, de un paralelogramo, de un triángulo, de un trapecio, de un círculo, de un sector circular. También volúmenes y áreas de un paralelepípedo rectángulo, de una esfera, de un cilindro circular recto, de un cono recto y de una pirámide.

Problema 3.- Haz una tabla con las expresiones trigonométricas más habituales.

Problema 4.- Define el conjunto de los números naturales, racionales y reales. Dame un subconjunto de cada uno de los conjuntos anteriores. Define aplicación inyectiva, sobreyectiva (o suprayectiva) y biyectiva. Escribe ejemplos de cada una utilizando los conjuntos anteriores.

Problema 5.- Elabora una tabla con las derivadas de las funciones elementales y de las reglas básicas de derivación de funciones.

Problema 6.- Elabora una tabla con las integrales inmediatas y de los métodos básicos de integración.

Problema 7.- Calcula el polinomio de Taylor de orden n de:

(1) $\operatorname{sen}(x)$ en $x=0$,
(2) $\cos(x)$ en $x=0$,
(3) e^x en $x=0$,
(4) $(1+x)^m$ en $x=0$,
(5) $\log(x+1)$ en $x=0$.
(6) $-\log|1-x|$ en $x=0$.
(7) $\frac{1}{1-x}$ en $x=0$.
(8) $\frac{1}{1+x}$ en $x=0$.

Problema resuelto 1.- Calcula las series de Taylor del ejercicio anterior.

Mi solución:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad \text{para} \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad \text{para} \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para} \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots =$$

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots \binom{m}{n}x^n + \cdots$$

$$\log(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{x} + \cdots$$

1.2. Geometría: vectores, rectas, planos, distancias...

Todo lo que estudiaremos en Matemáticas I va a estar relacionado con los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$. Necesitamos conocer bien la recta real, el plano y el espacio euclídeos porque ahí es donde definiremos las funciones con las que vamos a trabajar, pintaremos sus gráficas cuando podamos e interpretaremos conceptos como la derivada e integral. Además, los puntos, las rectas y los planos serán, a menudo, nuestros ejemplos. De manera que empezaremos a repasar algunos conceptos que ya habéis visto en bachillerato como los vectores y sus operaciones, las rectas y sus ecuaciones, sus posiciones relativas, los planos, etc. Recuerda que para calcular la posición relativa de un par de rectas resolvemos el sistema lineal formado por sus dos ecuaciones. Si el sistema tiene solución ese es el punto de corte. Si no tiene solución es que las rectas son paralelas o coincidentes. Veremos esto más adelante con más detalle.

Algunos de los conceptos que tenemos relacionados con vectores son: sistema de referencia, definición de vector: módulo, dirección y sentido. Operaciones con vectores. Vectores equipolentes. La relación de equipolencia es una relación de equivalencia. Vectores fijos y libres. Dados un vector libre $[AB]$ y un punto P siempre existe un representante de $[AB]$ con origen en el punto P. Vectores perpendiculares.

Las ecuaciones más típicas de una recta en el plano son las siguientes:

Definicion 1 *Ecuaciones de la recta en el plano. Sean $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ dos puntos del plano. Sea $v = \overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2)$, entonces la recta r que pasa por P y Q puede expresarse mediante*

- ***Ecuación vectorial:*** $r \equiv (x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2),\ t \in \mathbb{R}$
- ***Ecuaciones paramétricas:*** $r \equiv \begin{cases} x = p_1 + tv_1, \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$
- ***Ecuación continua:*** $r \equiv \dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}$. **Pregunta 1.-**¿*Qué ocurre si v_1 o v_2 son iguales a cero?*
- ***Ecuación general:*** *(ecuación implícita)* $r \equiv Ax + By + C = 0$
- ***Ecuación punto-pendiente:*** *(Ecuación explícita)* $r \equiv y = mx + b$

Observa en las ecuaciones anteriores el vector director (v_1, v_2), y la pendiente m. Observa las relaciones entre ellos. Atención: date cuenta que la pendiente de una recta no depende del vector director elegido.

Pregunta 2.-¿Qué ocurre si empezamos todo nuestro razonamiento utilizando otro par de puntos distintos que pertenezcan a la recta? ¿Podrías demostrarlo matemáticamente.?

Problema resuelto 2.- Probar que si dos rectas del plano, con pendientes m_1 y m_2, son perpendiculares entonces $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Mi solución: Si (A, B) es el vector director de una recta su pendiente es

$$m_1 = \frac{B}{A},$$

por otra parte si tenemos una recta perpendicular tendremos que su vector ha de ser $(-B, A)$ esto es, su pendiente vendrá dada por

$$m_2 = -\frac{A}{B}.$$

De manera que la relación entre ambas pendientes perpendiculares es:

$$m_1 = \frac{B}{A} = \frac{1}{\frac{A}{B}} = -\frac{1}{-\frac{A}{B}} = -\frac{1}{m_2}$$

Problema resuelto 3.- En el plano se consideran los puntos $P(2,0)$ y $Q(-3,-3)$.

a) obténgase la longitud de los lados y los otros dos vértices del cuadrado que tiene a P y Q por vértices opuestos.

b) obténgase la longitud de los lados y los otros dos vértices de cada cuadrado que tenga un lado definido por los vértices P y Q.

Mi solución: Empezamos calculando el vector PQ= $(-5,-3)$. Podemos dar **la ecuación vectorial** de la recta:

$$(x,y) = (2,0) + \lambda(-5,-3)$$

Ahora estamos en disposición de dar **la ecuación paramétrica** de la recta:

$$\begin{cases} x = -5\lambda + 2, \\ y = -3\lambda \end{cases}$$

Calculamos ahora **la ecuación continua** de la recta eliminando el *parámetro* λ

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y}{-3}$$

A partir de aquí podemos calcular **la ecuación implícita** o general de la recta:

$$3x - 5y - 6 = 0$$

Observar que el vector (3,-5) es un **vector normal** a la recta.

Ahora **su ecuación explícita**

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$$

En esta ecuación de la recta, llamada también ecuación en la forma **punto pendiente**, podemos distinguir **la pendiente de la recta** $m = \dfrac{3}{5}$ y el corte de la recta con el eje de abscisas: $-\dfrac{6}{5}$. Por lo que hemos hecho antes sabemos que un vector perpendicular a la primera recta es $(3,-5)$. Calculamos ahora el punto medio del segmento PQ, $M = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$. Calculamos ahora la recta perpendicular:

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$$

Ahora podemos seguir de varias maneras

De manera que si calculamos la intersección de una circunferencia de centro M y radio $d(P,Q)/2$ y la recta perpendicular encontraremos los dos puntos que buscamos.

La circunferencia viene dada por la expresión:

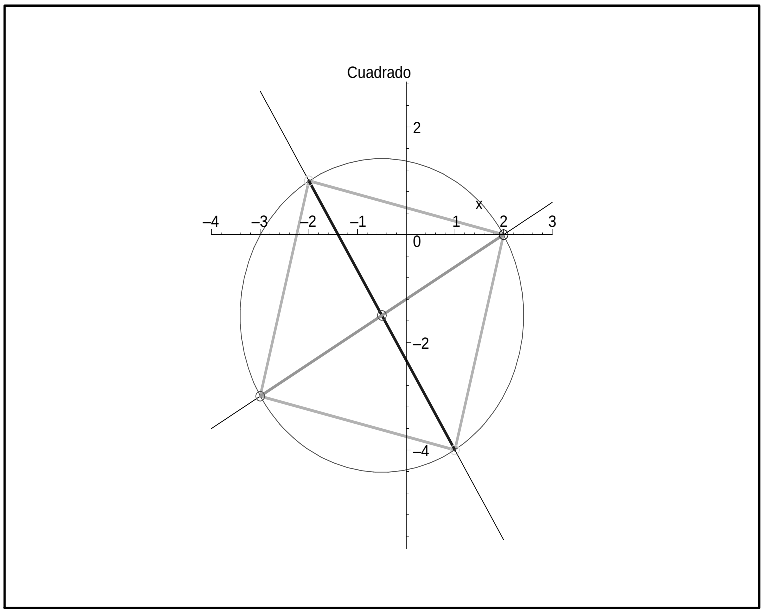
$$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{17}{2}$$

Y los puntos de corte vienen de resolver el **sistema de ecuaciones no lineal**

$$\begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{17}{2} \\ y=-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3} \end{cases}$$

que tiene por solución

$$P1\equiv(-2,1) \qquad P2\equiv(1,-4)$$



En este problema hemos utilizado un concepto que merece la pena resaltar:

Definicion 2 Distancia entre dos puntos en el plano. *Sean $X\equiv(x_1,x_2)$ e $Y\equiv(y_1,y_2)$, dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Entonces*

$$d(X,Y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$

Y directamente de esta definición podemos definir la circunferencia

Definicion 3 Circunferencia. *Una circunferencia C es el lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano que equidistan de uno dado llamado **centro**, (a, b). A la distancia que equidistan los puntos se le llama **radio**, r. Esto significa que su ecuación vendrá dada por:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Ahora puedes resolver el siguiente problema:

Problema resuelto 4.- Un segmento de longitud l se mueve en el plano de forma que uno de sus extremos está siempre sobre un eje coordenado y el otro extremo sobre el otro eje. ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio del segmento?.

Mi solución:

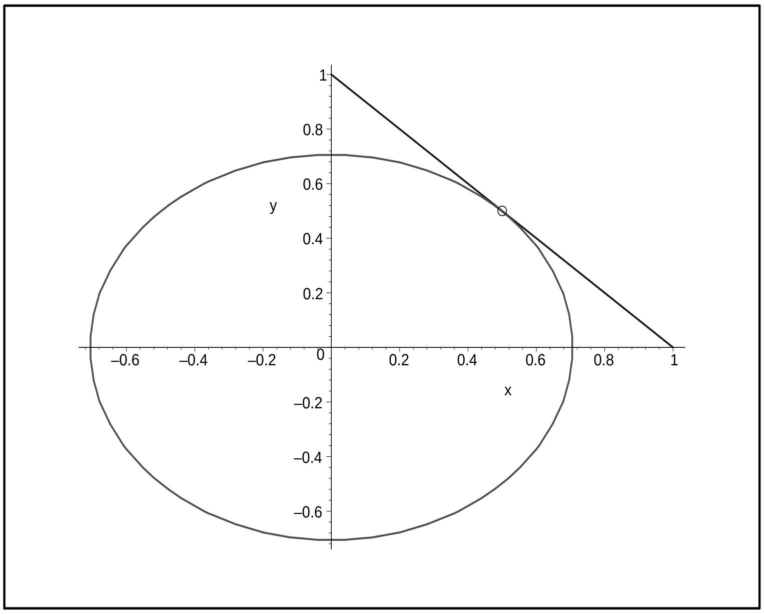
$$(m_1, m_2) = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \qquad x = 2m_1, \quad y = 2m_2$$

Como el segmento es fijo de longitud l se tiene que

$$d((x,0),(0,y)) = l \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = l^2$$

Entonces

$$4m_1^2 + 4m_2^2 = l^2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 + m_2^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$



En el espacio estas fórmulas son similares

Definicion 4 Distancia entre dos puntos en el espacio. *Sean $X \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $Y \equiv (y_1, y_2, y_3)$, dos puntos del espacio $\mathbb{R}^3$. Entonces*

$$d(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

Ejercicio 8.- Ecuación de una esfera. Si una esfera es el lugar geométrico de los puntos del espacio de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que equidistan, a una distancia llamada radio r, de un punto (a, b, c), llamado **centro**. ¿Cuál es la ecuación de la esfera de centro (a, b, c) y **radio** r?.

Para terminar esta parte de geometría recordamos la ecuación general de un plano en el espacio

Definicion 5 Ecuación de un plano en el espacio.

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

*Donde el vector (A, B, C) es un vector **normal** al plano π.*

y algunas distancias más, el producto escalar de dos vectores, su ángulo y cuándo son perpendiculares.

Definicion 6 Distancia entre un punto y una recta en el plano. *Sea $P \equiv (p_1, p_2)$ un punto del plano y sea $r \equiv Ax + By + C = 0$. Entonces*

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Definicion 7 Distancia entre un punto y un plano en el espacio. *Sea $P \equiv (p_1, p_2, p_3)$ un punto del espacio y sea $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$. Entonces*

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Definicion 8 Ángulo entre dos vectores. *Sean v_1 y v_2 dos vectores del plano o del espacio y sea α el ángulo que forman. Entonces*

$$\cos\alpha = \frac{| < v_1, v_2 > |}{||v_1|| ||v_2||}$$

En la siguiente sección recordaremos los sistemas lineales de ecuaciones, pero recuerda que estudiar la posición relativa de dos o más rectas o planos en el plano o en el espacio no es más que estudiar el comportamiento de los sistemas lineales que forman sus ecuaciones. Observa estos problemas resueltos e intenta resolver los siguientes problemas. Si tienes problemas a la hora de resolverlos es conveniente que profundices en la siguiente sección.
Problema resuelto 5.- Demuestra el teorema de Pitágoras.

Mi solución: Consideramos el triángulo rectángulo de catetos x e y, esto es: $x \perp y$, y de hipotenusa $x + y$, entonces

$$|x+y|^2 =< y+x, y+x >=< y, y > + < x, x > +2 < x, y >=$$

$$=< y, y > + < x, x >= |y|^2 + |x|^2$$

Problema resuelto 6.- Un chopo (C), un pino (P) y un abeto (A) están colocados con arreglo a las siguientes distancias: $d(C, P) = 30$, $d(C, A) = 40$ y $d(P, A) = 60$. ¿Están los tres árboles alineados?

Mi solución: No. Desigualdad triangular.

Problema resuelto 7.- Considera los planos $\pi_1 \equiv 3x+2y-5z = 2$,$\pi_2 \equiv -3x+y-z = 0$ y $\pi_3 \equiv -2y + z = 1$. Estudia su posición relativa.

Mi solución:

$$\left(-\frac{1}{27}, -\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}\right)$$

Problema resuelto 8.- Determinar a y b para que las rectas r y r' se corten en el punto P, en los siguientes casos:

i) $r \equiv (a+b)x+(a-b)y = 15,\ r' \equiv (2a-3b)x+(2a-5b)y = a+2b,\ P = (3, -7).$

ii) $r \equiv (a-1)x + 2by = a,\ r' \equiv (a+3b)x + (a+2b)y = b,\ P = (1, 1).$

Mi solución: i)

$$\begin{cases} 3a + 3b - 7a + 7b = 15 \\ 6a - 9b - 14a + 35b = a + 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} -4a + 10b = 15 \\ -9a + 24b = 0 \end{cases} \qquad a = -60, \quad b = -\frac{45}{2}$$

ii)

$$\begin{cases} a - 1 + 2b = a \\ a + 3b + (a + 2b) = b \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \qquad a = -1, \quad b = \frac{1}{2}$$

Problema resuelto 9.- a) Demostrar que $\begin{cases} x - z = 1 \\ by + 2z = -1 \end{cases}$ determina una recta r para cualquier valor de $b \in \mathbb{R}$.

b) Estudiar la posición relativa de r con el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

Mi solución: a) Determina una recta ya que independientemente del valor de b tenemos $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Problema resuelto 10.- Localizar en un mapa un tesoro que está enterrado a 3 metros de un alcornoque A y equidista de un enebro E y un pino P.

Mi solución: Consideramos la mediatriz del segmento formado por el E y P y la circunferencia de radio 3 centrada en A. La única manera posible de que exista un único punto es que la recta y la circunferencia sean tangentes.

Problema 9.- Considera los vectores $v = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $w = (-1, 0, 3, 1, -2)$, calcula su norma y su suma y su producto.

Problema 10.- En el pinar de Rascafría queremos enviar una señal luminosa de una torre de vigilancia, E, a otras dos, R1 y R2. En un mapa topográfico de la zona, la torre de vigilancia emisora, E, está situada en la marca $(1, 1)$ y las receptoras, R1, en $(9, 6)$ y R2 en $(7, 4)$. Al analizar las curvas de nivel del lugar se ha detectado un posible obstáculo en las trayectorias de la señal situado en $(5, 3)$. ¿Llegará la señal a las dos torres?

Problema 11.- Determinar la ecuación del plano π_1 que contiene al punto $P(0, 1, -3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = & 1 + \lambda \\ y = & 2 - \lambda \\ z = & 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Problema 12.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de los planos $3x + 2y - z = 0$, $2x - y + 3z = 1$ y $x + y + z = -2$ y que sea paralelo al plano $3x - 2y + 4z = \sqrt{3}$.

Problema 13.- Dada la recta $r \equiv \pi_1 \cap \pi_2$, con $\pi_1 \equiv \{x + y - 3z + 2 = 0\}$ y $\pi_2 \equiv \{2x - y + z - 1 = 0\}$, hallar las ecuaciones de la recta s paralela a r y que pasa por $(1, 0, 1)$.

Problema 14.- Hallar una ecuación del plano π que contiene al punto $P = (1, -5, 2)$ y es paralelo al plano $\bar{\pi} \equiv 3x - 7y + 4z = 5$

Problema 15.- Hallar el ángulo que forman las rectas:

a)

$$\begin{cases} r \equiv x + 2y + 1 = 0 \\ s \equiv x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

b)

$$r \equiv \begin{cases} A = (1, 2) \\ \vec{v} = (2, 1) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} B = (-3, 1) \\ \vec{w} = (2, 2) \end{cases}$$

Problema 16.- Hallar la distancia del punto P al punto Q
a) $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 4)$
b) $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (4, 5, 6)$

Problema 17.- Hallar la distancia del punto P a la recta r
a) $P = (3, 4)$ $r \equiv 4x - 2y + 5 = 0$
b) $P = (1, -2)$ $r \equiv 3x - 2y + 10 = 0$

Problema 18.- Hallar la ecuación de la esfera (o de las esferas) que tiene el centro en la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{array} \right\}$, y es tangente a los planos $2x - y - 2z = -11$ y $2x - y - 2z = 7$.

Problema 19.- Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en el plano:

$$\begin{array}{ccccc} y + x = 0 & y - x = 3 & y - x = 0 & y - x = 5 & 2y + 2x = 15 \\ y - x = 12 & 2y + 2x = 1 & 2y + 2x = 3 & 2y + 2x = 5 & y - x = 13 \\ 2y + 2x = 7 & 3y - 3x = \pi & 2y + 2x = 9 & y - x = 10 & 3y - 3x = 2\pi \\ y - x = 6 & y - x = 4 & 2y + 2x = 13 & x + y = -2 & -x - y = 1 \end{array}$$

$$y + x = r \text{ , donde } r = 1, ..., 18$$

$$3x - 3y = \sup\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$8x + 8y = 1 - \text{ínf}\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$9x - 9y = 9\,\text{ínf}\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

1.3. Sistemas Lineales

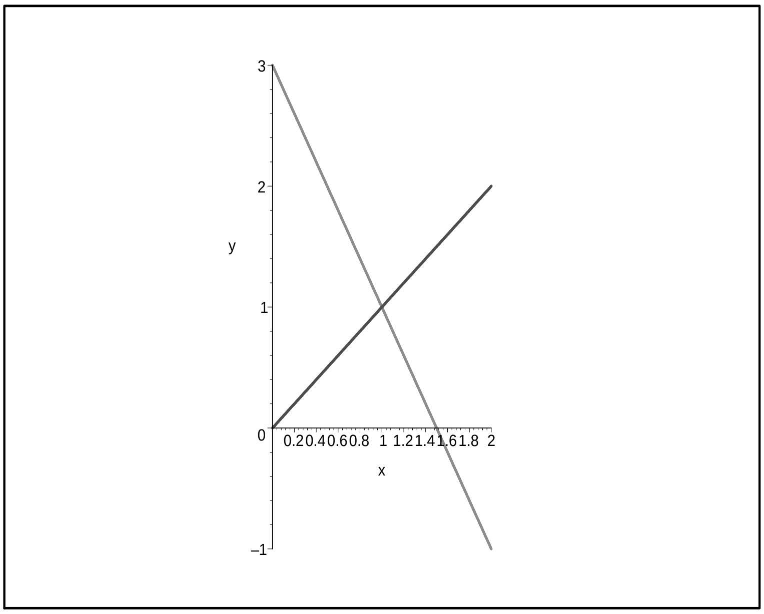
Como hemos visto en la sección anterior, para estudiar la posición relativa de rectas, planos, circunferencias, esferas, etc. nos viene bien plantear los sistemas formados por sus ecuaciones y estudiarlas conjuntamente. Por ejemplo:
Ejemplo 11.- Estudia la posición relativa del par de rectas en el plano siguientes:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

pero este sistema tiene las mismas soluciones que

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = 3 \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Interpretando este sistema geométricamente decimos que las dos rectas que representan estas dos ecuaciones, se cortan en el punto $(1, 1)$. Las dibujamos.



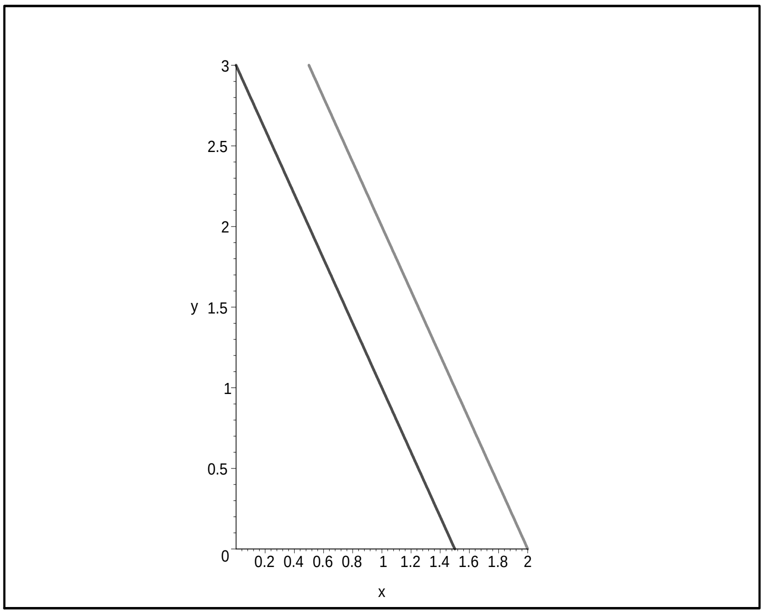
Ejemplo 12.- De la misma forma si consideramos

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

tenemos

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

que es imposible, por tanto la interpretación geométrica en este caso corresponde a un par de rectas paralelas



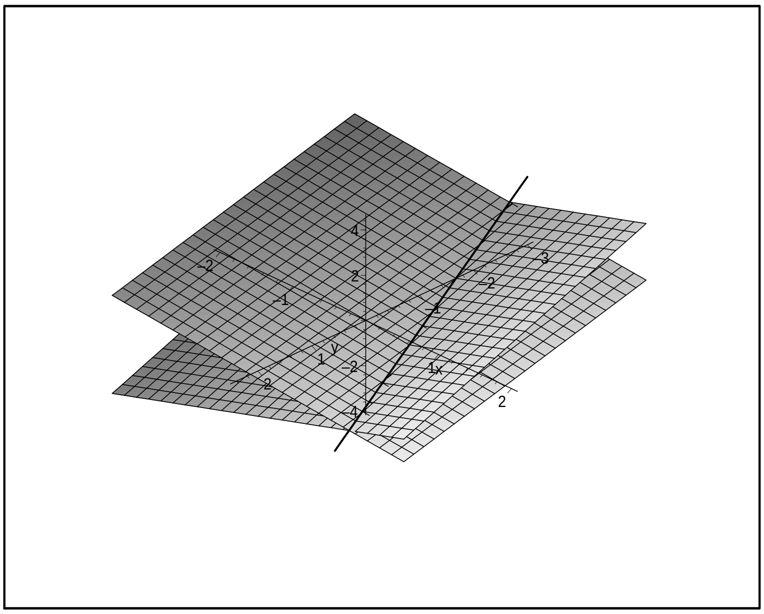
Ejemplo 13.- Si consideramos ahora los dos siguientes planos, tenemos

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ x = y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - 3y \\ x = y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - 3y \\ x = 4y - 3 \end{cases}$$

que tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor que tome y, que corresponden a los infinitos puntos que forman la recta en que se intersecan ambos planos. Una posible parametrización para la recta intersección es:

$$\begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$



En la figura observamos los planos y la recta intersección.

Finalmente en el siguiente ejemplo observamos una circunferencia y una recta

Ejemplo 14.-

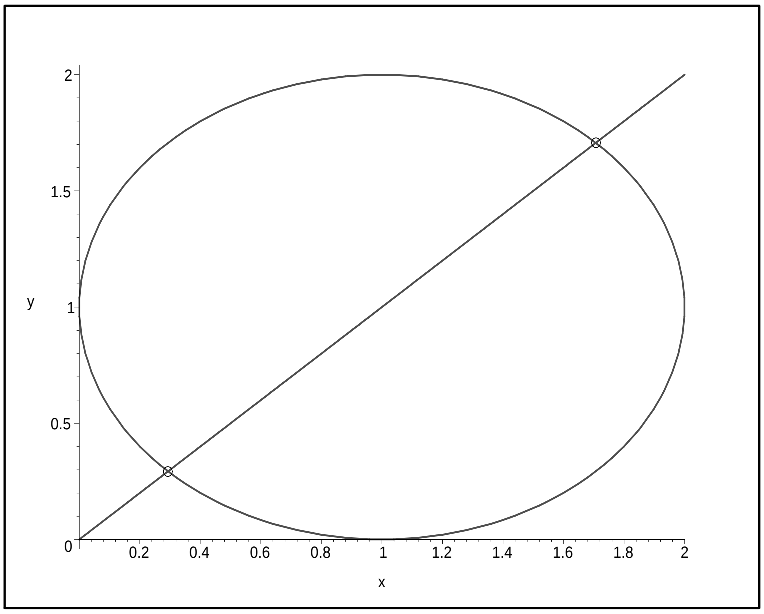
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

resolviendo

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x-1)^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Es este caso tenemos dos soluciones, tenemos que la recta corta a la circunferencia en dos puntos.



De los cuatro ejemplos anteriores los tres primeros son sistemas lineales mientras que el cuarto ejemplo es un sistema no lineal. Vamos a definir lo que es un sistema lineal.

Definicion 9 Sistema lineal. *Llamamos sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas al siguiente conjunto de m ecuaciones*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Observa que las incógnitas (x_j, con $j = 1 \cdots n$) aparecen siempre multiplicadas por constantes ($a_{i,j}$), con $i = 1 \cdots m$ y $j = 1 \cdots n$, los coeficientes, nunca por otras incógnitas, tampoco están elevadas a ninguna potencia salvo la potencia 1. Cada ecuación está igualada a una constante que llamaremos término independiente, b_i, con $i = 1 \cdots m$. $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ y $b_i \in \mathbb{K}$.

Para manejar los sistemas lineales solemos escribir sólo las constantes entendiendo, por la posición, a qué incógnita y ecuación pertenecen, los representamos mediante la siguiente matriz

Definicion 10 Matriz asociada a un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A la matriz $(a_{i,j})$ se le suele llamar la matriz de los coeficientes del sistema y a la matriz formada por la matriz de los coeficientes junto con la columna de términos independientes se le suele llamar matriz ampliada del sistema. A veces representamos el sistema lineal en forma compacta: $AX = b$, donde A es la matriz de los coeficientes, X es el vector de las incógnitas y b es el vector de los términos independientes.

Una de las características de los sistemas lineales es su clasificación en términos de sus soluciones. Es por esto que empezamos definiendo a qué llamamos solución de un sistema lineal

Definicion 11 Solución de un sistema lineal. *Decimos que $s = (s_1, s_2, \cdots s_n)$ es una solución del sistema lineal si cumple*

$$(S)\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$$

o de manera compacta s es solución del sistema lineal si y solo si $As = b$.

Si un sistema lineal tiene solución decimos que es un sistema **compatible** y si no tiene **incompatible**. Si tiene una única solución es **determinado** y si tiene infinitas **indeterminado**.

Ejercicio 20.- Observa los ejemplos de esta sección y repasa todas las definiciones en cada uno de ellos.

Proposición 12 *Si un sistema lineal tiene dos soluciones entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

Demostración: Sean s y $\bar{s}$ dos soluciones distintas del sistema $S \equiv Ax = b$, entonces tenemos que como son soluciones se cumple que $As = b$ y $A\bar{s} = b$. Considero ahora este candidato a solución $\hat{s} = ts + (1-t)\bar{s}$ y me pregunto ¿Es $\hat{s}$

solución? Vamos a verlo utilizando las propiedades las operaciones de matrices y el hecho de que tanto s como $\bar{s}$ son soluciones del sistema lineal S

$$A\hat{s} = A(ts + (1-t)\bar{s}) = tAs + (1-t)A\bar{s} = tb + (1-t)b = b \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Para cada t fijo tenemos una solución, esto es infinitas. **Pregunta 1.-**¿Dónde estoy utilizando que s y $\bar{s}$ son soluciones distintas del sistema lineal?.

Para resolver los sistemas lo que solemos hacer es buscar sistemas que tengan las mismas soluciones pero con las ecuaciones más sencillas, esto es sistemas con las mismas soluciones pero más fáciles de resolver.

Definicion 13 Sistemas equivalentes. *Decimos que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Un tipo de sistemas que van a jugar un papel importante tanto ahora como en asignaturas posteriores son los:

Definicion 14 Sistemas homogéneos. *Decimos que un sistema es homogéneo si su término independiente es el vector nulo, ($b = 0$).*

Pregunta 2.-¿Los sistemas homogéneos son compatibles?.

Pregunta 3.-¿Cómo es la compatibilidad y determinación de los sistemas homogéneos?

Pregunta 4.-¿Qué pasa con la suma y el producto por un escalar de soluciones de un sistema homogéneo?

Pregunta 5.-Sea $(0, 0, \cdots 0)$ solución del sistema S, ¿es S homogéneo?

Definicion 15 Sistema homogéneo asociado a un sistema lineal *Dado un sistema S de ecuaciones lineales llamamos sistema homogéneo asociado, y a veces lo denotaremos por S_h, al sistema lineal que tiene la misma matriz de coeficientes pero tiene el vector cero por término independiente.*

Proposición 16 Principio de superposición *Si h es una solución del sistema homogéneo y s es solución del sistema completo. Entonces $s + h$ también es solución del sistema completo.*

Ejercicio 21.- Demostración: .

Pregunta 6.-Se consideran dos sistemas lineales de ecuaciones siguientes:

$$(S_1)\ \{\ AX = B_1 \qquad\qquad (S_2)\ \{\ AX = B_2$$

Es decir, tienen los mismos coeficientes pero distintos términos independientes. Supongamos que S_1 es incompatible y S_2 es compatible. Sea $B = B_1 + B_2$ Sea $(S)\ \{AX = B$ ¿es compatible este sistema?

1.3.1. Operaciones elementales en sistemas lineales.

Hemos visto anteriormente que para resolver sistemas lo que hacemos es buscar sistemas equivalentes pero más sencillos de resolver. Quizá la pregunta que te ha surgido es ¿Cómo consigo que el sistema inicial convertirlo en otro más sencillo pero con las mismas soluciones? Pues esta pregunta es la que nos contesta el siguiente y principal teorema de esta sección:

Teorema 17 *Si en un sistema se sustituye una ecuación e_i por ella más una combinación lineal de las restantes, es decir,*

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots \lambda_n e_n = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots \lambda_n b_n$$

Siempre que $\lambda_i \neq 0$, el sistema que se obtiene es equivalente.

Demostración: Consideramos los sistemas S y $\bar{S}$ siguientes

$$S = \begin{cases} e_1 = b_1 \\ \vdots \\ e_i = b_i \\ \vdots \\ e_n = b_n \end{cases} \qquad \bar{S} = \begin{cases} e_1 = b_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i + \cdots \lambda_n e_n = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_i b_i + \cdots + \lambda_n b_n \\ \vdots \\ e_n = b_n \end{cases}$$

Para ver que ambos sistemas son equivalentes sólo tengo que conseguir la equivalencia en la ecuación i que es la única en la que se diferencian. Si S tiene una solución multiplicamos cada ecuación por su λ correspondiente y las sumamos todas encontrándonos con la ecuación i del sistema $\bar{S}$. Por otra parte si hacemos la misma operación en el sistema $\bar{S}$ y cancelamos los términos que valen lo mismo obtenemos la ecuación

$$\lambda_i e_i = \lambda_i b_i$$

en la que necesitamos aplicar la hipótesis de que $\lambda_\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$ para poder simplificar y obtener la ecuación i deseada.

Como aplicación de éste teorema podemos definir las operaciones elementales que podemos realizar sobre sistemas lineales para obtener sistemas equivalentes

Definicion 18 *Las **operaciones elementales** que realizamos para transformar un sistema en otro equivalente son:*

- *Sustituir una ecuación por ella multiplicada por $\lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$*
- *Sustituir una ecuación por la suma de ella y otra*

- *Sustituir una ecuación por la combinación lineal de ella con otra u otras.*
- *Cambiar el orden de las ecuaciones*

Idea trabajo fin de curso. Estudio de relación entre las operaciones elementales con las matrices elementales en relación a la resolución de sistemas lineales. Recordamos que una matriz elemental es aquella que viene de la identidad y la que le hemos hecho una operación elemental.

1.3.2. Método de Gauss

Estas operaciones elementales son la base para el método de Gauss. Dicho método consiste en encontrar sistemas equivalentes al inicial dado utilizando operaciones elementales y de manera que aparezcan ceros debajo de la diagonal principal. De esta manera obtendremos un sistema triangular equivalente al inicial pero mucho más fácil de resolver, basta que resolvamos de abajo arriba. Otra manera de resolver es haciendo ceros por encima de la diagonal principal quedando finalmente un sistema diagonal y la columna de los términos independientes.
Ejemplo 15.- Resolvemos los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss:

$$(a)\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y-z=8 \\ x-y+z=-2 \\ -x+y+z=12 \end{cases}$$

Mi solución: (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema triangular

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y-4z=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Cuya única solución se obtiene fácilmente resolviendo de abajo arriba $z=1$, $y=2+4z=6$ y $x=1+z-y=-4$. Luego la solución es $(-4,6,1)$. Por tanto este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es **compatible determinado**.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema ya es triangular y como tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas, vemos que es un sistema **compatible indeterminado**, con infinitas soluciones. Una posible parametrización de la solución es $z = t$, $y = -\frac{1}{2} - t$, $x = \frac{3}{2}$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 2 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

El sistema es **incompatible** ya que la última ecuación nos queda de la forma $0 = 8$ que no tiene sentido. El sistema no tiene solución.

El método de Gauss consiste en hacer ceros metódicamente debajo de la diagonal principal utilizando operaciones elementales hasta llegar a un sistema triangular equivalente. Este sistema triangular ya se puede resolver mediante sustitución o bien haciendo ceros por encima de la diagonal principal. Si haciendo ceros nos encontramos con una fila toda de ceros, eso significa que tenemos una ecuación que podemos eliminar. Si, en cambio, nos encontramos con toda una fila de ceros excepto en el término independiente, como el último ejemplo anterior, entonces estamos ante un sistema **incompatible**. Si por el contrario no aparece esto y llegamos a un sistema triangular con todo ceros debajo de la diagonal principal, podemos estar ante dos situaciones: que haya más incógnitas que ecuaciones ($n > m$), estaremos ante un sistema **compatible indeterminado**, o bien tenemos igual número de incógnitas que de ecuaciones con lo que estaremos ante un sistema **compatible determinado**.

Problema resuelto 16.- Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} px + qy = 1 - pq^2 \\ qx + py = 1 - qp^2 \\ pq(x + y) = -p^2q^2 \end{cases}$$

Donde x e y son las incógnitas y p y q son los parámetros.

Mi solución:

$$\begin{pmatrix} p & q & 1 - pq^2 \\ q & p & 1 - qp^2 \\ pq & pq & -p^2q^2 \end{pmatrix}$$

Si $p \neq 0$ y $q \neq 0$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -pq \\ p & q & 1-pq^2 \\ q & p & 1-qp^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -pq \\ 0 & q-p & 1-pq^2+p^2q \\ 0 & p-q & 1-qp^2+pq^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -pq \\ 0 & q-p & 1-pq^2+p^2q \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esto es, el sistema es **incompatible**.

Por otra parte, si $p = 0$ y $q \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 1 \\ q & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = y = \frac{1}{q}$$

Esto es **compatible determinado**. De la misma forma si $q = 0$ y $p \neq 0$ tenemos

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = y = \frac{1}{p}$$

Y finalmente, si $p = q = 0$ tendríamos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de nuevo un sistema **incompatible**.

Problema resuelto 17.- Discutir y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas de ecuaciones, en función de los parámetros que aparecen:

$$a)\begin{cases} x_1 & +ax_2 & +ax_3 & +ax_4 & = a \\ ax_1 & +x_2 & +ax_3 & +ax_4 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +x_3 & +ax_4 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & +x_4 & = a \end{cases} \qquad b)\begin{cases} (1+a)x & +ay & +(1+a)z & = b \\ (-1+a)x & +(-1+a)y & +(-1+a)z & = 0 \\ (2+a)x & +(1+a)y & +(2+a)z & = b \end{cases}$$

Mi solución: (b)

$$\begin{pmatrix} 1+a & a & 1+a & b \\ a-1 & a-1 & a-1 & 0 \\ 2+a & 1+a & 2+a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+a & a & 1+a & b \\ -2 & -1 & -2 & -b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -b \\ 1+a & a & 1+a & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de a y b el sistema es **compatible indeterminado** dependiente de un parámetro t. Con una posible parametrización de la solución $(b - t, -b, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Problema resuelto 18.- Descomponer $f(x)$ en fracciones simples

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2}.$$

Mi solución:

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

Problema 22.- Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\ \begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 7y + 5z = 16 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ 2x + 2y - 2z - 2t = -8 \\ x + y + z - 2t = -6 \\ 3x + 5y - z - t = 6 \end{cases}$$

Problema 23.- Discutir los siguientes sistemas:

$$a)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Problema 24.- Dados los puntos (1,7), (6,2) y (4,6), demostrar que por esos tres puntos pasa una sola circunferencia en el plano y calcular su ecuación, sabiendo que la ecuación general del círculo es: $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ con $a \neq 0$.

Problema 25.- Encontrar un polinomio p(x) de grado menor o igual que 2 tal que :

$$\int_0^1 x^2 p(x)dx = 2 \qquad \int_0^1 xp(x)dx = 0 \qquad \int_0^1 p(x)dx = 0$$

¿es único el polinomio ?

Problema 26.- Dado un número complejo cualquiera z=a+bi con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ probar que existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1$ *Indicación:* Dados z=a+bi y w=c+di se tiene $z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i$

Problema 27.- Dada la función racional $q(x) = \frac{x}{1-x^2}$ demostrar que existen dos constantes a y b tales que

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

Problema 28.- Demostrar que un polinomio no nulo de grado 2, con coeficientes reales, tiene como mucho dos raíces reales distintas.

Problema 29.- Discutir los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = \alpha \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = \mu \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$

Problema 30.- Discutir los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y + z = t \\ x - y + 2z = 1 + t^2 \\ 3x + 7y - 4z = -1 - t - t^2 - t^3 \\ 2x + y + bz = t^3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - ay + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y - bz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Problema 31.- Discutir y resolver, según los valores del parámetro a el sistema:

$$\begin{cases} 1/x + 3/y - 1/z = 0 \\ 1/x + 2/y + 1/z = 2 \\ a/x + 1/y - 1/z = 1 \end{cases}$$

Problema 32.- Estudiar las posiciones relativas de los tres planos siguientes, en función de los valores que tomen los parámetros $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x - y + 3z = 1 \\ \pi_2 \equiv 3x - 5y + 7z + \beta = 0 \\ \pi_3 \equiv x - 3y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Problema 33.- Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\quad \begin{cases} x + ay - az = 0 \\ x + y - z = a - 1 \\ 2x + 2y - z = 2a + 2 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} mx + y = n \\ x + my = n \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \qquad d)\quad \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

1.4. Matrices

En la sección anterior ya hemos empezado a utilizar matrices. En particular, hemos utilizado la matriz asociada a un sistema lineal y han sido sobre esta representación de los sistemas que hemos realizado las operaciones elementales. A pesar de eso, ahora volvemos sobre la definición de matriz y vamos a estudiarlas por ellas mismas.

Definicion 19 *Llamamos **matriz** real o compleja de tamaño $m \times n$, a una tabla de números, $a_{i,j} \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

También la denotamos por $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m \\ j=1\cdots n}}$. Al conjunto de todas las matrices $m \times n$ lo llamaremos $\mathcal{M}_{m\times n}$

Ejemplo 19.- Algunos **tipos de matrices** son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cuadrada, Rectangular, Iguales, Triangular Superior e Inferior, Diagonal, Fila, Columna, Nula, Identidad, Simétrica, Antisimétrica.

Pregunta 1.-Expresa matemáticamente el hecho de que dos matrices sean iguales.

Ejercicio 34.- : Hallar x, y, z para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & x+y & x-z \\ x-y & y & y+z \\ x+y-z & z-y & z \end{pmatrix}$$

Sea: (i) Triangular superior, (ii) Triangular inferior, (iii) Simétrica, (iv) Antisimétrica.

Pregunta 2.-¿Cómo es la diagonal principal de una matriz antisimétrica?.

Otra herramienta útil para resolver sistemas son los determinantes. No vamos a estudiarlos extensivamente. Se verán en la asignatura de Matemáticas II. De todas maneras para la siguiente definición recordamos que un menor en un determinante es otro determinate en el que se han elegido sólo algunas filas y columnas.

Definicion 20 *Definimos el **rango** R de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ como el orden del mayor menor no nulo de A.*

1.4.1. Operaciones con Matrices y sus propiedades.

Con las matrices, como con los numeros o las funciones, también podemos hacer operaciones. En las operaciones con matrices necesitamos que el tamaño sea el adecuado.

Definimos la suma de matrices de la siguiente manera:

Definicion 21 *Sean* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$ *y* $B = (b_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$. *Definimos la* ***suma*** *de* A *y* B *como*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$$

De manera similar definimos el producto de un escalar por una matriz:

Definicion 22 *Sean* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$. *Definimos el* ***producto de un escalar*** $\lambda \in \mathbb{K}$ *por la matriz* A *como*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$$

Con las dos operaciones anteriores tenemos que el conjunto de matrices forman un espacio vectorial sobre el $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$), esto es:

Proposición 23 Propiedades de la suma de matrices y producto por un escalar *Sean* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Entonces*

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = 0 + A = A$, *donde* 0 *es la matriz nula* $m \times n$.
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- $A + B = B + A$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $1A = A$

Estas operaciones solemos decir que se realizan 'componente a componente'. Cosa que no ocurre con la siguiente operación: el **producto de Cauchy de matrices**. El producto 'componente a componente' corresponde al producto de Hadamard de matrices pero eso no lo vamos a estudiar en este texto.

Fijate que para poder empezar a multiplicar dos matrices necesitamos para empezar que la de la izquierda tenga el mismo número de columnas que filas la de la derecha.

Definicion 24 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *y* $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ *con* $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$ *y* $B = (b_{jk})_{\substack{j=1\cdots n\\ k=1\cdots p}}$ *definimos el producto de Cauchy de* A *y* B *como la* $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}$ *tal que*

$$AB = (c_{ik})_{\substack{i=1\cdots m\\ k=1\cdots p}} \qquad \textit{donde} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Ejemplo 20.- Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mientras que} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver alguna de sus propiedades:

Proposición 25 Propiedades del producto (de Cauchy) de matrices *Sean* A, B *y* C *matrices de los tamaños adecuados y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces*

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

Atención, como viste en el ejemplo anterior a diferencia de cuando multiplicas números, el orden si importa. El producto de Cauchy de matrices también se diferencia del producto de números en que si yo multiplico dos números y me dan cero eso sólo puede ser a base de que al menos uno de ellos sea cero. Eso no pasa en matrices, podemos encontrar dos matrices distintas de la matriz cero y su producto darnos la matriz cero. **Ejercicio 35.-** Encuentra un ejemplo de esto.

Observación 1 ¡OJO!

- *El producto de matrices no es, en general, conmutativo.*
- *En matrices, podemos tener $AB = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$.*

Otra operación que se le puede hacer a una matriz es trasponerla. Consiste en cambiar de lugar sus elementos: las filas las convertimos en columnas y las columnas en filas.

Definicion 26 Traspuesta de una matriz *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$. Definimos la **traspuesta** de la matriz A, y la denotamos por A^t, a una matriz de tamaño $\mathcal{M}_{n\times m}$ tal que $A^t = (\bar{a}_{ji})_{\substack{j=1\cdots n\\ i=1\cdots m}} = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$*

Ejemplo 21.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{su traspuesta es} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algunas de las propiedades de la traspuesta. Sean A, B matrices de los tamaños adecuados y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

Otra cosa que podemos hacer con 'algunas' matrices es invertirlas.

Definicion 27 Matriz Inversa. *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, diremos que es **invertible** si existe una matriz cuadrada de igual tamaño $n \times n$ que llamaremos **inversa** de A y la denotaremos por A^{-1}, tal que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Algunas propiedades de la matriz inversa son:

- La inversa de una matriz, si existe, es única.
- Si A y B son invertibles entonces AB también lo es y además se tiene que: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces su traspuesta, A^t también lo es y además: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Ecuaciones matriciales.

De una manera similar a los sistemas lineales nos encontramos con las ecuaciones matriciales. Ahora nuestra incógnita y nuestro término independiente son matrices en vez de vectores. A la hora de resolverlo podemos utilizar el método de Gauss igual que para los sistemas lineales, poniendo especial cuidado en asegurarnos de hacer la operación elemental correspondiente a toda la fila.

Definicion 28 Ecuación matricial *Llamamos **ecuación matricial**, a una ecuación del tipo*

$$AX = B$$

donde A, X y B son matrices.

Ejemplo 22.- Resuelve la ecuación matricial $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que hacemos con los sistemas lineales ponemos la matriz de los coeficientes y a continuación la matriz de los términos independientes. Observa que en este caso la matriz de las incógnitas es una matriz 3×3, cada fila de esta matriz la podemos interpretar como una variable vectorial X_i. De manera que (X_1, X_2, X_3) son nuestras incógnitas. Una vez hecho esto hacemos operaciones elementales por el método de Gauss igual que antes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Ya tenemos el sistema triangular

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 - 2X_3 = (1, 0, 0) \\ X_2 - X_3 = (1, 1, 0) \\ X_3 = (-3, -4, 1) \end{cases}$$

que podemos despejar hacia atrás

$$X_3 = (-3, -4, 1)$$

$$X_2 = (1, 1, 0) + X_3 = (1, 1, 0) + (-3, -4, 1) = (-2, -3, 1)$$

$$X_1 = (1,0,0) - 3X_2 + 2X_3 = (1,0,0) - 3(-2,-3,1) + 2(-3,-4,1) = (1,1,-1)$$

Esto es, nuestra solución es

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Otra manera de resolver esta última parte es hacer ceros encima de la diagonal principal

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -5 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Algunos problemas resueltos y más problemas:

Problema resuelto 23.- Resuelve, si es posible, la ecuación matricial siguiente: $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es invertible la matriz A? En caso afirmativo encuentra la matriz inversa de A.

Mi solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Problema resuelto 24.- Calcula el determinante de la matriz A del problema anterior. ¿Hay alguna caracterización de las matrices invertibles mediante los determinantes? ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz y el determinante de su matriz inversa?.

Mi solución: $|A| = 10$, $|A^{-1}| = 0{,}1$

Problema resuelto 25.- Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}),$$

calcular una matriz $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ tal que $P \cdot A = B \cdot P$.

Mi solución: **Enero 2011**

Problema 36.- Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

Mi solución: **Enero 2011**

Problema 37.- Probar que si una matriz $A \in M_{n\times n}$ verifica $A^2 - 3A + I = O$, entonces

$$A^{-1} = 3I - A.$$

Mi solución: **Enero 2011**

Problema 38.- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Se puede multiplicar A*B?, ¿A*C?, ¿B*A?, ¿B*C?, ¿C*A? y ¿C*B? ¿Es conmutativo el producto de matrices?

Problema 39.- Efectuar los productos de matrices:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 40.- Sea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular A^2 y A^{-1}.

Problema 41.- Calcular la inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

Problema 42.- Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = I$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde I es la matriz identidad de tamaño 4×4.

Problema 43.- Calcular todas las soluciones de las ecuaciones matriciales siguientes: $A \cdot X = B$ donde

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ -9 & -13 & 25 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 44.- (Sep-93) Encontrar todas las soluciones de la ecuación matricial $A \cdot X = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Problema 45.- Dada una matriz diagonal D, demostrar que es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal principal son diferentes de cero. Calcular la inversa de una matriz diagonal.

Problema 46.- Una matriz cuadrada M se dice que es *idempotente* si $M^2 = M$. Sabiendo que A y B son matrices cuadradas tales que $A = AB$ y $B = BA$ comprobar que A y B son idempotentes.

Problema 47.- Decir si son ciertas o no las siguientes afirmaciones, siendo A y S dos matrices cuadradas y S simétrica:

a) $A^t A$ es simétrica

b) $A^t S A$ es simétrica

c) Si A es antisimétrica $\Rightarrow A^2$ es simétrica

d) Si A es invertible $\Rightarrow (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Problema 48.- Si A y B son dos matrices simétricas del mismo tamaño. Pruébese que $A \cdot B$ es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

Problema 49.-

(a) Dadas n matrices $A_j, \ j = 1, \ldots, n$ invertibles, demostrar que:

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

(b) Demostrar que $A \in M_{n \times n}$ es invertible si y sólo si A^t es invertible.

(c) Probar que si A tiene una fila o una columna nula entonces A no es invertible.

Problema 50.- a) Dar un ejemplo de matriz $A \in M_{n \times n}$, no nula, para la que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = O$.
b) Demostrar que una matriz A tal que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = O$ no es invertible.

Problema 51.- Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n.

i) Demostrar que $Tr(AB) = Tr(BA)$

ii) Demostrar que es imposible la igualdad matricial $AB - BA = I$

1.5. Números

En esta sección vamos a estudiar

- Números naturales, $\mathbb{N}$: $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$
- Números enteros, $\mathbb{Z}$: $\cdots, -n, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$
- Números racionales, $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

Problema resuelto 26.- Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.

Mi solución: Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, esto es, se puede escribir de la forma $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$. Entonces

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p \mid 2 \Rightarrow p = 2p_1 \Rightarrow p^2 = 4p_1 \Rightarrow 4p_1 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow q \mid 2$$

pero entonces

$$(p, q) \neq 1 \qquad \textbf{Contradicción} \qquad \Rightarrow \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$$

- Números reales $\mathbb{R}$
- Números complejos $\mathbb{C}$

Proposición 29 *No acotación de los números naturales Los números naturales no tienen supremo, no están acotado superiormente.*

Definicion 30 *PRINCIPIO DE INDUCCIÓN Sea $P(n)$ una propiedad que se cumple para el número n. El principio de inducción afirma que $P(n)$ es verdad para todos los naturales n siempre que:*

1. *$P(1)$ es verdad (caso sencillo)*
2. *si $P(k)$ es verdad entonces $P(k+1)$ también lo es.*

Problema resuelto 27.- Calcula la suma de los 100 primeros números naturales.

Mi solución: 5050.

Ejemplo 28.- $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Problema resuelto 29.- Calcula el término general de la siguiente sucesión: 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11.... ¿Conoces este tipo de sucesión?

Mi solución: Es una sucesión aritmética de diferencia -2 y término inicial $a_0 = 9$. Esto es, $a_n = 9 - 2n$.

Problema resuelto 30.- Calcula el término general de la siguiente sucesión: 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072... ¿Conoces este tipo de sucesión?

Mi solución: Es una sucesión geométrica de razón 2 y de primer término 3, esto es $a_n = 3 \cdot 2^n$.

Problema 52.- Demuestra por inducción $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Problema 53.- Idem $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Problema 54.- Idem $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

Definicion 31 ***Definición axiomática de los números reales***

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$

[Ax.1] Propiedad conmutativa: $x + y = y + x \qquad xy = yx$

[Ax.2] Propiedad asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (xy)z = x(yz)$

[Ax.3] Propiedad distributiva: $x(y + z) = xy + xz$

[Ax.4] Existencia de elementos neutro para la suma y el producto: *Existencia de dos números reales distintos, que se representan por 0 y 1 tales que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene:* $x + 0 = 0 + x = x \qquad x1 = 1x = x$

[Ax.5] Existencia de negativos*: para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que x+y=y+x=0. Se suele representar $y = -x$.*

[Ax.6] Existencia de recíprocos*: para cada $x \in \mathbb{R}$ siempre que $x \neq 0$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que xy=yx=1. Se suele representar $y = \frac{1}{x}$.*

[Ax.7] *Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre con $x + y$ y xy.*

[Ax.8] *Para todo real $x \neq 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$, o $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.*

[Ax.9] $0 \notin \mathbb{R}^+$

[Ax.10] Axioma del supremo: *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee un extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = \sup S$*

1.5.1. Propiedades básicas de los números reales

Proposición 32 *Propiedades de los números reales*

1 ***Ley de simplificación de la suma***: *Si* $a+b=a+c$ *entonces* $b=c$

Demostración:

$$b=0+b=(-a+a)+b=-a+(a+b)=-a+(a+c)=(-a+a)+c=0+c=c$$

2 ***Posibilidad de sustracción***: *Dados* a *y* b *existe uno y sólo un* x *tal que* $a+x=b$. *Este* x *se designa por* $b-a$.

Demostración: *Sea* y *tal que* $a+y=0$ *entonces*

$$b=b+0=b+(a+y)=(b+y)+a=x+a \quad \Rightarrow \quad x=b+y$$

Supongo que existe otro $\bar{x}$ *tal que* $a+\bar{x}=b$ *entonces*

$$a+x=a+\bar{x} \quad \Rightarrow \quad x=\bar{x}$$

3 $b-a=b+(-a)$

Demostración: *Sea* $x=b-a$ *e* $y=b+(-a)$, *tenemos*

$$a+x=b \qquad a+y=a+b+(-a)=a+(-a)+b=0+b=b \quad a+x=a+y \quad \Rightarrow x=y.$$

4 $-(-a)=a$

5 $a(b-c)=ab-ac$

6 $0a=a0=0$

7 ***Ley de simplificación para la multiplicación***: *Si* $ab=ac$ *y* $a\neq 0$ *entonces* $b=c$

8 ***Posibilidad de división***: *Dados* a *y* b *con* $a\neq 0$ *existe uno y solo un* x *tal que* $ax=b$.

9 *Si* $a\neq 0$ *entonces* $\frac{b}{a}=ba^{-1}$

10 *Si* $a\neq 0$ *entonces* $(a^{-1})^{-1}=a$

11 *Si* $ab=0$ *entonces* $a=0$ *o* $b=0$

12 *(i)* $(-a)b=-(ab)$

(ii) $(-a)(-b) = ab$

13 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *si* $b \neq 0,\ d \neq 0$

14 $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *si* $b \neq 0,\ d \neq 0$

15 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ *si* $b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

16 ***Propiedad de tricomia****: Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones*

$$a < b, \qquad b < a, \qquad a = b$$

17 ***Propiedad transitiva*** *Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$*

18 *Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$*

19 *Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$*

20 *Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$*

21 *Si $a < b$ y $c < 0$ entotnces $ac > bc$*

22 *Si $a < b$ entoneces $-a > -b$, $a < 0$ entonces $-a > 0$*

23 *Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.*

24 *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$*

Problema resuelto 31.-

1. Factoriza $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$
2. Desarrolla $(x-1)(x-3)(x-5)$ y $(x-2)^5$.
3. Calcula $\dfrac{x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}$

Mi solución:

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$$

$$(x-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

$$\frac{x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15} = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$$

Problema resuelto 32.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}(x^2-y^2)\log(xy) &= 0\\ (xy)^2-3xy+2 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}(x^2-y^2)\log(xy) &= 0\\ (xy)^{x^2-y^2} &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(x^2-y^2)\log(xy) &= 0\\ (xy)^{x^2-y^2} &= 1\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}3(x+y)^2-3x^2y^3 &= 0\\ 3(x+y)^2-3x^3y^2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

Mi solución: Como estos sistemas no son lineales no podemos utilizar el método de Gauss, lo que debemos hacer es resolverlos utilizando las propiedades de los números reales.

$$\left.\begin{aligned}(x^2-y^2)\log(xy) &= 0\\ (xy)^2-3xy+2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

La primera ecuación será cero si

$$(x^2-y^2)=0 \quad \log(xy)=0 \Rightarrow (x+y)(x-y)=0 \qquad xy=1$$

Metemos estas soluciones en la segunda ecuación:

Si $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ entonces

$$(x\cdot x)^2-3x\cdot x+2=0 \Leftrightarrow x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1,\ x=\pm\sqrt{2}$$

De manera que los puntos solución de esta condición son:

$$(1,1) \qquad (-1,-1) \qquad (\sqrt{2},\sqrt{2}) \qquad (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

Si $\mathbf{y}=-\mathbf{x}$ entonces

$$(x\cdot(-x))^2-3x\cdot(-x)+2=0 \Leftrightarrow x^4+3x^2+2=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2+2)=0$$

que no tiene soluciones reales.

Si $\mathbf{xy}=\mathbf{1}$, observamos que $x\neq 0$ y $y\neq 0$ y podemos considerar $y=\frac{1}{x}$ de manera que

$$(x\cdot\frac{1}{x})^2-3x\cdot\frac{1}{x}+2=0 \Leftrightarrow 1-3+2=0$$

que se da siempre. Luego toda la curva $y=\frac{1}{x}$ es solución del problema.

Resolvemos de manera similar el resto de sistemas:

$$\left.\begin{aligned}(x^2-y^2)\log(xy) &= 0\\ (xy)^{x^2-y^2} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned}(x^2-y^2)\log(xy) &= 0\\ e^{(x^2-y^2)\log(xy)} &= 0\end{aligned}\right\}$$

Pero este sistema **no tiene solución** porque la función exponencial nunca corta el eje de las x.

$$\left.\begin{array}{ll}(x^2-y^2)\log(xy) & =0\\ (xy)^{x^2-y^2} & =1\end{array}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{array}{ll}(x^2-y^2)\log(xy) & =0\\ e^{(x^2-y^2)\log(xy)} & =1\end{array}\right\}$$

Ambas ecuaciones son equivalentes luego las soluciones son

$$y=x \qquad y=-x \qquad y=\frac{1}{x}$$

con $x\neq 0$ e $y\neq 0$ ya que si fuera alguno de los dos cero el $\log(xy)$ no estaría definido.

Y finalmente suponiendo que $x\neq 0$, e $y\neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll}3(x+y)^2-3x^2y^3 & =0\\ 3(x+y)^2-3x^3y^2 & =0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}(x+y)^2=x^2y^3\\ (x+y)^2=x^3y^2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}(x+y)^2=x^2y^3\\ x^2y^3=x^3y^2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}(x+y)^2=x^2y^3\\ y=x\end{array}\right\}$$

de manera que si $y=x$ en la primera ecuación obtenemos

$$(x+x)^2=x^2x^3 \;\Leftrightarrow\; 4x^2=x^5 \;\Leftrightarrow\; 4=x^3 \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt[3]{4}$$

siendo la solución

$$(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{4})$$

Por otra parte si $x=0$ tenemos que $y=0$, y si $y=0$ entonces $x=0$, de manera que la otra solución del sistema es

$$(0,0)$$

Problema resuelto 33.- Hallar todos los valores reales de p para los cuales las raíces de la ecuación

$$(p-3)x^2-2px+6p=0$$

son reales y positivas.

Mi solución: Para que sea una ecuación de segundo grado necesitamos que $p\neq 3$, ya que si $p=3$ la ecuación se convierte en

$$-6x+18=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=3$$

De manera que este es el primer valor solución del problema ya que para $p=3$, $x=3$ esto es, real y positiva. Veamos ahora el caso $p\neq 3$

$$x=\frac{2p\pm\sqrt{4p^2-24p(p-3)}}{2(p-3)}=\frac{p\pm\sqrt{18p-5p^2}}{p-3}$$

Para que los valores de x sean reales necesitamos que el discriminante de la raíz sea ≥ 0, esto es $18p - 5p^2 \geq 0$ así que calculamos sus raíces

$$18p - 5p^2 = p(18 - 5p) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad p = 0 \; p = \frac{18}{5}$$

De manera que $18p - 5p^2$ es una parábola con los brazos hacía abajo que corta el eje real en $p = 0$ y en $p = \frac{18}{5}$, de esta forma tendremos que las raices son reales si $p \in [0, \frac{18}{5}]$.

Para estudiar el signo de las raíces volvemos a la ecuación inicial

$$(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$$

y observamos que si $p = 0$ tenemos la parabola $-3x^2$ que tiene a $x = 0$ como raíz doble, si $p \in (0, 3)$ tendremos una parabola con los brazos hacia abajo y una raíz negativa, mientras que si $p = 3$ tenemos una única raiz real positiva como vimos antes, si $p \in (3, \frac{18}{5})$ tiene dos raices distintas reales positivas y si $p = \frac{18}{5}$ tenemos dos raices reales positivas iguales.

Problema 55.- Progresión geométrica. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas relativas a la suma y el producto de los términos de una progresión geométrica con razón $r \neq 1$:

$$(a) \sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$(b) \prod_{i=1}^{n} r^i = r^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Problema 56.- Binomio de Newton. a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

b) Encontrar una fórmula para $(a - b)^n$.

1.6. Funciones

1.6.1. Primeras definiciones

Definicion 33 *Definición de función Una **función** real de variable real es una colección de pares de números reales con al siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) entonces $b = c$*

Test de la línea vertical

Definicion 34 *Definición de dominio de una función Sea f una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f.*

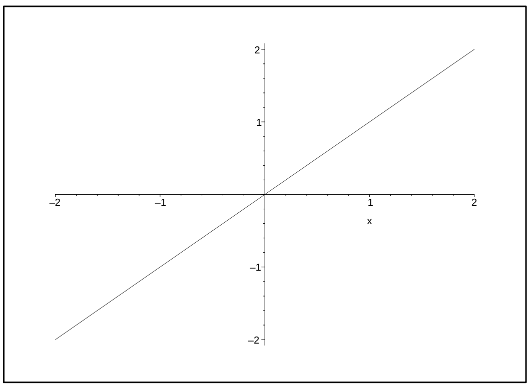
Definicion 35 *Definición de gráfica de una función Definimos la **gráfica** de f como el conjunto $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$*

Definicion 36 *Función real de variable real Diremos que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función real de variable real** con dominio I.*

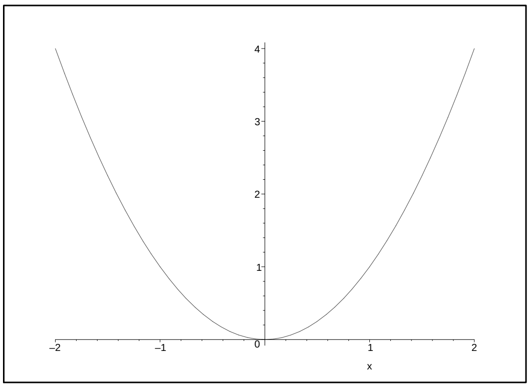
Algunos tipos de funciones Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que es:

- **Constante** si $f(x) = c$ para todo x en el dominio de f
- **Par** si $f(x) = f(-x)$
- **Impar** si $f(x) = -f(-x)$
- **Creciente** si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$
- **Decreciente** si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$
- **Periódica** si $f(x) = f(x + P)$ para todo $x \in I$

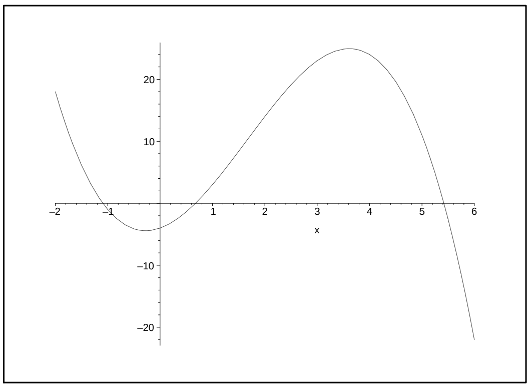
1.6.2. Ejemplos



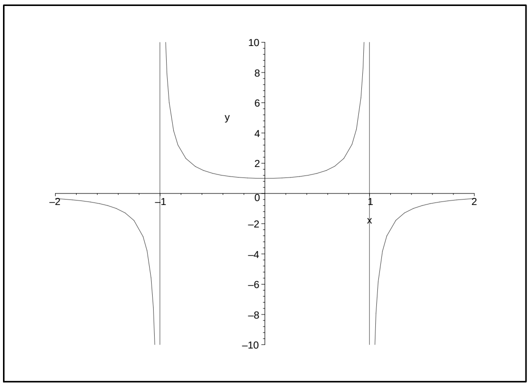
Función identidad, $f_1(x) = x$



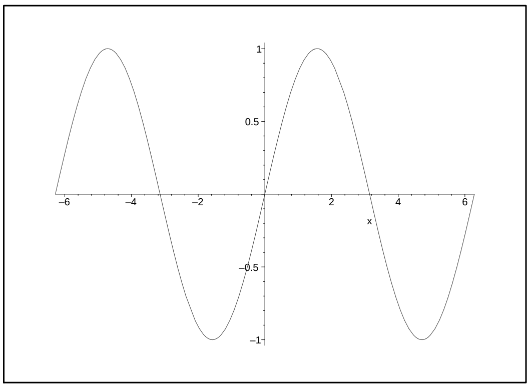
Parábola, $f_2(x) = x^2$



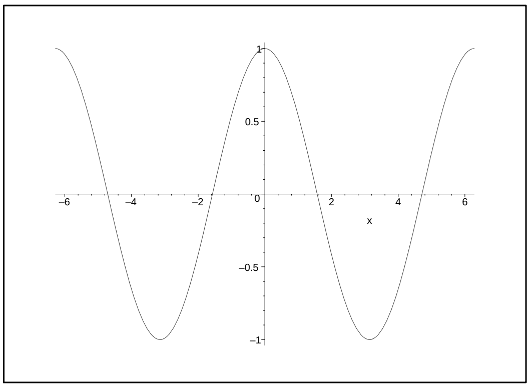
Cúbica, $f_3(x) = -4 + 3x + 5x^2 - x^3$



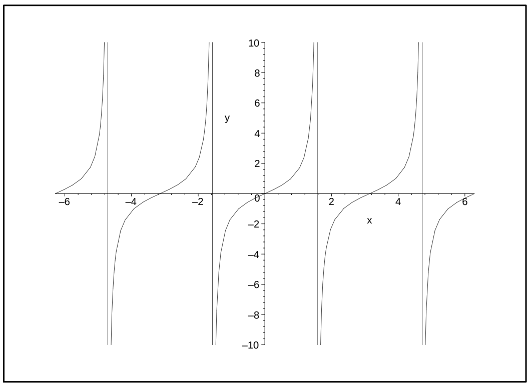
Función racional, $f_4(x) = \frac{1}{1-x^2}$



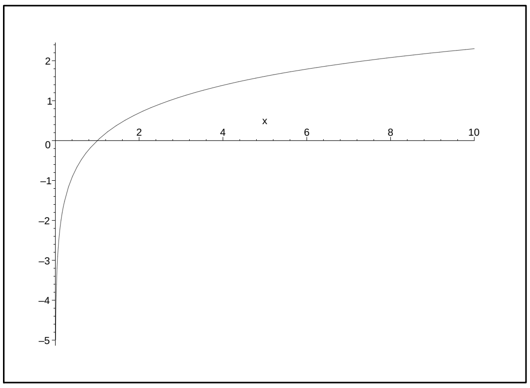
Función seno, $f_5(x) = \sin(x)$



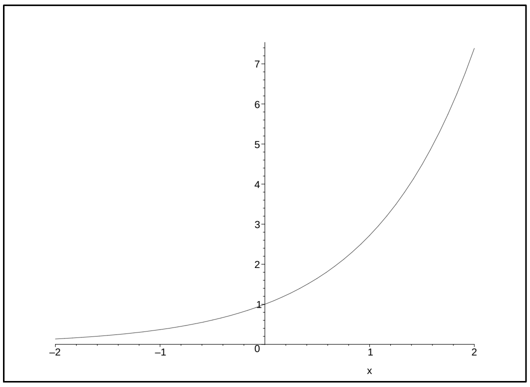
Función coseno, $f_6(x) = \cos(x)$



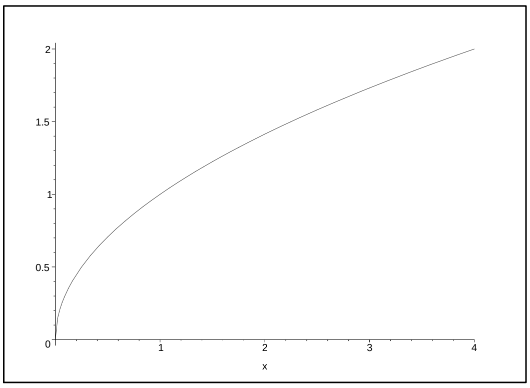
Función tangente, $f_7(x) = \tan(x)$



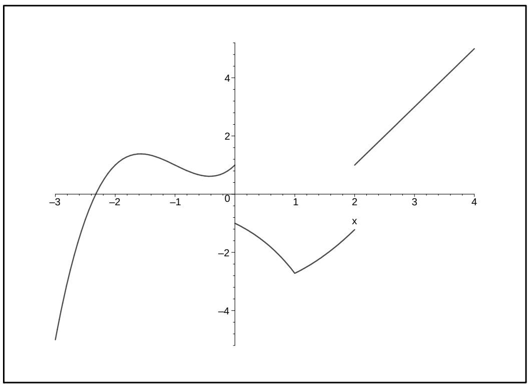
Función logaritmo, $f_8(x) = \log(x)$



Función exponencial, $f_9(x) = e^x$



Función raíz, $f_{10}(x) = \sqrt{x}$

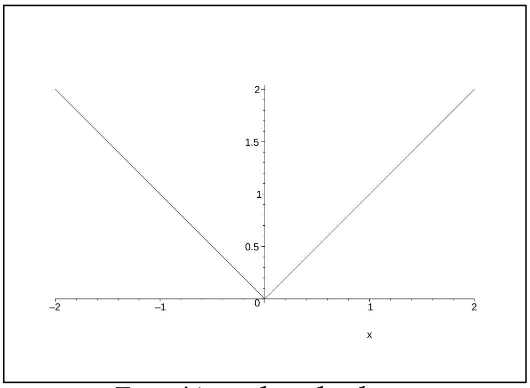


Función definida a trozos,

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x + 1, & x \leq 0; \\ -e^x, & x \in (0,1]; \\ x^2/2 - e - 1/2, & x \in (1,2]; \\ 2x - 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

1.6.3. Ejemplo importante: la función valor absoluto

Ejemplo 34.- **Función valor absoluto**



Función valor absoluto,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si}, x \geq 0 \\ -x & \text{si}, x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ($|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$)
2. $|x| < M,\ M > 0 \Leftrightarrow -M < x < M$ o bien $|x| \leq M,\ M > 0 \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$

3. $|x+y| \leq |x|+|y|$

4. $|xy| = |x||y|$

5. Si $y \neq 0$ entonces $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

6. $|-x| = |x|$

7. $|x-y| = |y-x|$

8. $|x|^2 = x^2$

9. $|x| = \sqrt{x^2}$

10. $|x-y| \leq |x|+|y|$

11. $||x|-|y|| \leq |x-y|$

12. $|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

1.6.4. Intervalos

Definicion 37 *Intervalos en la recta real Llamamos intervalo* ***abierto*** *a, b, y lo denotamos por (a,b) al conjunto de números reales x tales que $a < x < b$.*

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

De manera similar llamamos intervalo ***cerrado*** *a, b y lo denotamos por $[a,b]$ al conjunto de números reales tales que $a \leq x \leq b$*

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

Intervalos semiabiertos o semicerrados $(a,b]$, $[a,b)$ Intervalos infinitos.

Definicion 38 *Distancia en la recta real En la recta real, definimos la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ como $d(x,y) = |x-y|$.*

Ejemplo 35.- **Expresiones con valor absoluto**

- $|2x-5| = 3$
- $|2x-1| - |x+5| = 3$
- $|x| < M,\ M > 0 \ \Leftrightarrow\ x \in (-M,M)$

- $|x-5|<2$ (En general: $|x-c|<r$)
- $|3x+2|\geq 4$

Problema resuelto 36.- Determina el subconjunto de números reales que verifica $\{x:|x-3|<8\}$. Represéntalo. Idem con $\{x:|x-1|+|x+1|<2\}$.

Mi solución:

$$\{x:|x-3|<8\}=(-5,11)$$

$$\{x:|x-1|+|x+1|<2\}=\emptyset$$

Problema 57.- Determinad los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(1) $\{x\in\mathbb{R}:4-x<3-2x\}$ (2) $\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x}<x\}$ (3) $\{x\in\mathbb{R}:2x-x^2-2>0\}$
(4) $\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0\}$ (5) $\{x\in\mathbb{R}:\frac{x-1}{x+1}>0\}$ (6) $\{x\in\mathbb{R}:|x-1|\cdot|x+2|=3\}$
(7) $\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x-2}\}$ (8) $\{x\in\mathbb{R}:|x-1|\cdot|x+1|=0\}$ (9)$\{x\in\mathbb{R}:|\frac{x+5}{2-x}|=6\}$

Problema 58.- Probad que si $x,y\in\mathbb{R}$ se satisface:

$$\text{máx}(x,y)=\frac{x+y+|y-x|}{2};\qquad \text{mín}(x,y)=\frac{x+y-|y-x|}{2}\qquad .$$

1.6.5. Operaciones con funciones

Proposición 39 *Algebra de funciones Sean $f,g:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones*

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $(fg)(x)=f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Proposición 40 *Composición de funciones Sea $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de tal forma que $Im(f)\subseteq J$, entonces $g\circ f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ existe y*

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

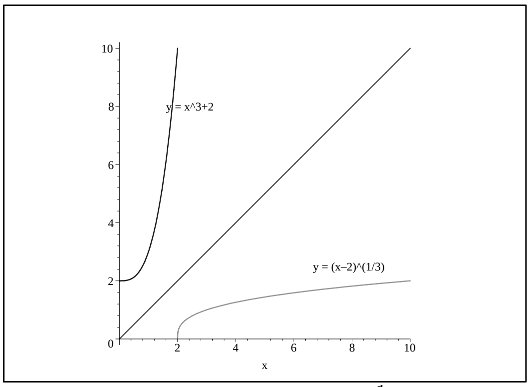
Definicion 41 *Función uno-uno Decimos que una función f es* ***uno-uno o inyectiva*** *si $f(x_1)\neq f(x_2)$ siempre que $x_1\neq x_2$*

Test de la linea horizontal.

Definicion 42 *Inversa de una función Sea f una función uno-uno, con dominio A e imagen B. Entonces definimos su función inversa como una función cuyo dominio es B e imagen A, la denotamos por f^{-1} y se tiene que*

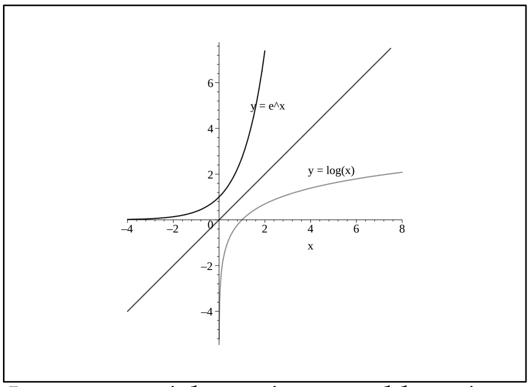
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \; \forall y \in B$$

Ejemplo 37.- $f(x) = x^3 + 2$, entonces $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$



f y su inversa, f^{-1}

Ejemplo 38.- $g(x) = e^x$, entonces $g^{-1}(x) = \log(x)$



La exponencial y su inversa el logaritmo

Problema 59.- Halla el dominio de las siguientes funciones: $f(x) = L|\sqrt{\frac{x^2-2}{x+1}}|$, y $g(x) = L[(x-3)(x-2)(x+2)]$

1.7. Funciones de varias variables

1.7.1. Entornos en $\mathbb{R}^n$

Definicion 43 *Discos en el plano Sea $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ un punto del plano y $r \in \mathbb{R}$ llamamos **disco** centrado en c y de radio r, y lo denotamos por $B(c, r)$, al conjunto de puntos del plano $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen la siguiente desigualdad:*

$$B(c, r) = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(X, c) \leq r\}$$

Definicion 44 *Bolas en el espacio Sea $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ un punto del espacio y $r \in \mathbb{R}$ llamamos **bola** centrada en c y de radio r, y lo denotamos por $B(c, r)$, al conjunto de puntos del espacio $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:*

$$B(c, r) = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, d(X, c) \leq r\}$$

Definicion 45 *Bolas en $\mathbb{R}^n$. Sea $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ un punto de $\mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ llamamos **bola** centrada en c y de radio r, y lo denotamos por $B(c, r)$, al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que cumplen la siguiente desigualdad:*

$$B(c, r) = \{X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, d(X, c) \leq r\}$$

- **Interior** de un conjunto en $\mathbb{R}^n$.
- **Borde** de un conjunto.
- Conjunto **abierto**.
- Conjunto **cerrado**.
- Conjunto **acotado**.
- Conjunto **compacto**.

1.7.2. Funciones vectoriales

Definicion 46 *Funciones vectoriales Decimos que una función es **vectorial** si su dominio es un conjunto de números reales y su imagen esta en $\mathbb{R}^n$:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

- Funciones **componentes**

- Representación gráfica.
- Curvas paramétricas.
- Derivadas e integrales.
- Vectores posición, velocidad y aceleración.

1.7.3. Funciones escalares

Definicion 47 *Funciones escalares Decimos que f es una función **escalar** de n variables si es una regla que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, un número real único denotado por: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. En una función escalar tenemos que su domino esta en un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y su imagen esta en un conjunto de la recta real.*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- Representación gráfica de funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Curvas de nivel.
- Secciones.
- Derivadas parciales: **gradiente**

1.7.4. Funciones de varias variables con valores vectoriales

Definicion 48 *Funciones de varias variables con valores vectoriales Decimos que F es una función de n variable con valores vectoriales de m variables, si es una regla que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, un vector único de $\mathbb{R}^m$ denotado por: $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$. En una función de este tipo tenemos que su domino esta en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y su imagen esta en un subconjunto de $\mathbb{R}^m$.*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

- Funciones componentes.

Capítulo 2

Cálculo Diferencial en una variable

Si las Matemáticas son el lenguaje en el que está escrita la Naturaleza (Galileo), el Cálculo Infinitesimal es una de las herramientas fundamentales para describirla. Y lo que distingue al Cálculo Infinitesimal de otras ramas de las Matemáticas es el concepto de límite.

Para poder utilizar en la realidad los cálculos que hacemos en matemáticas muchas veces tenemos que *conformarnos* con aproximaciones de nuestros resultados exactos. Por ejemplo, imaginemos que necesitamos construir una panel de madera de forma cuadrada de dos metros cuadrados de área. Sabemos, por el teorema de Pitágoras, que necesitaríamos que el lado midiera $\sqrt{2}$. Como vimos en el tema anterior, $\sqrt{2}$ es un número irracional, esto es, tiene infinitos decimales: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\cdots$. ¿Cómo medimos para que el lado tenga *exactamente* $\sqrt{2}$ metros? No podemos. No. No podemos. Ni aunque en vez de cortar con un serrucho cortemos con una sierra eléctrica, ni aunque cortemos con las más novedosas técnicas de cortado de madera por laser....Simplemente no está a nuestro alcance. ¿Y entonces qué hacemos? Construimos **una aproximación** tan buena como queramos y nos lo permita la técnica. Si construimos nuestro cuadrado con el lado de 1.4m tendremos un panel de 1.96m^2, o si lo construimos con lado 1.41m tendremos un panel de 1.9881m^2, o si lo construimos con lado 1.414m tendremos un 1.999396m^2 que quizá valga como aproximación dependiendo de nuestro contexto.

Para iniciarnos en el concepto de límite vamos a empezar con el concepto de límite de una sucesión de números.

2.1. Sucesiones y Series

La importancia de las series en el Cálculo viene desde Newton y su representación como sumas de series infinitas de muchas funciones. De hecho en Física y en otras ramas de la Ciencia, muchas veces se recurre al uso de series al analizar fenómenos como la óptica, la relatividad o el electromagnetismo. Para entender las series necesitamos empezar estudiando las sucesiones.

2.1.1. Sucesiones

La idea de sucesión es bastante natural, tenemos una colección infinita de números dados en un determinado orden. La definición matemática es

Definicion 49 *Una **sucesión** infinita de números reales es una función cuyo dominio son los números naturales y su imagen está en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 39.- $\{1/n\}$, $\{n\}$, $\{n^2\}$, etc. Sucesión de los naturales pares $\{2n\}$, naturales impares $\{2n-1\}$, sucesión alternada $\{(-1)^n\}$. Represéntalas y comenta sus características.

Ejemplo 40.- Otras veces las sucesiones pueden estar bien definidas pero no venir dadas de una manera sencilla:

(a) El número de personas en la tierra en un momento determinado.

(b) El decimal enésimo del número e.

(c) O venir dada de forma recurrente, como la sucesión de Fibonacci.

Algunos tipo de sucesiones importantes son

Definicion 50 *Decimos que una sucesión esta **acotada superiormente** si existe C tal que $a_n \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*Decimos que una sucesión esta **acotada inferiormente** si existe C tal que $a_n \geq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*En general decimos que una sucesión esta **acotada** si existe K tal que $|a_n| \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*Si el menor es estricto, se llama **estrictamente creciente**.*

*Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*Si el menor es estricto, se llama **estrictamente creciente**.*

*En general decimos que una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.*

Ver con ejemplos que la gráfica de una sucesión acotada está contenida en la banda $(-M, M) \times \mathbb{R}$. Sucesiones **oscilantes** .

Definicion 51 *Definición del límite de una sucesión Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que **converge** a L*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

Observación 2 *Todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ salvo a lo sumo un número finito de ellos.*

Ejemplo 41.- $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ vamos a ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon, \qquad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \varepsilon, \qquad \frac{1}{\varepsilon} < N^2, \qquad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < N$$

Por ejemplo si $\varepsilon = 10^{-4}$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{10^{-4}}} = \frac{1}{10^{-2}} = 10^2 < N$$

Si elegimos $N = 101$ nos aseguramos que todos los términos a partir de este están a una distancia menor que $\varepsilon = 10^{-4}$.

Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** a $+\infty$ si $\forall k \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, x_n > k\, \forall n \geq N$.

Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** a $-\infty$ si $\forall k \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, x_n < k\, \forall n \geq N$.

Ejemplo 42.- Decidir si existe el límite o no de las sucesiones del ejemplo anterior.

Proposición 52 *Unicidad del límite El límite de una sucesión si existe es único*

Demostración: Supongamos que l_1 y l_2 son límites distintos de (a_n) entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \quad \forall\varepsilon > 0, \exists N_1 / |a_n - l_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 \quad \forall\varepsilon > 0, \exists N_2 / |a_n - l_2| < \varepsilon$$

Como l_1 y l_2 son distintos tenemos que $|l_1 - l_2| > 0$. Elegimos $\varepsilon = |l_1 - l_2|$ y elegimos N_1 de manera que $|a_n - l_1| < \varepsilon/2$ y N_2 de manera que $|a_n - l_2| < \varepsilon/2$. Ahora consideramos un $N = \max(N_1, N_2)$ de manera que para todos los n más grandes que N se cumplan las dos desigualdades anteriores, entonces

$$\varepsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| = |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

lo que nos da una contradicción al haber supuesto que existían dos límites distintos.

Las sucesiones al ser funciones se operaran de la misma manera.

Algebra de sucesiones $\equiv$ Algebra de funciones

Proposición 53 ***Operaciones con límites.*** *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes. Entonces*

- $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
- $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$
- $\lim(ca_n) = c \lim a_n$
- $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$
- $\lim(a_n/b_n) = \lim a_n/\lim b_n$*, si $b_n \neq 0$ para todo n y $\lim b_n \neq 0$*
- $\lim c = c$

Demostración: Demostremos que $a_n+b_n \to l+m$. Sea $\epsilon > 0$. Tomando $\epsilon/2$ en la definición de convergencia de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, sabemos que existen $n_1(\epsilon/2), n_2(\epsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon/2 \quad \forall n > n_1$ y $|b_n - m| < \epsilon/2 \quad \forall n > n_2$. Definiendo $n_0(\epsilon) = \max\{n_1, n_2\}$, se verifica que $|(a_n + b_n) - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \epsilon \quad \forall n > n_0$.

Ejemplo 43.- La suma (producto) puede converger, y aún así alguna de ellas no converge.

Ejemplo 44.- Comprobar que $\{\text{sen}(n)\}$ no tiene límite y que $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$.

Ejemplo 45.- Comprobar que la sucesión $(-1)^n$ diverge (no converge a 1 –los términos impares no están lo suficientemente próximos– ni a -1, ni a cualquier otro número real). También es divergente $\{\log n\}$.

Ejemplo 46.- Dados varios valores para ϵ, calcular el N a partir del cual los términos de las siguientes sucesiones distan del límite menos que ϵ.
$\{1/n\}, \quad \epsilon = 10^{-1},\ N = 10$
$\{1/2^n\}, \quad \epsilon = 10^{-2},\ N = 6;\ \epsilon = 10^{-4},\ N = 13$

Ejemplo 47.- Calcula el límite de las siguientes sucesiones, y dado un ϵ genérico calcula el n_0 asociado en la definición.

$$\{1/\sqrt{n}\}, \quad \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \quad \left\{\frac{1}{2^{3n}}\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

Teorema 54 *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración: Sea $a_n \longrightarrow l$. Tenemos que probar que está acotada. Por definición, dado $\epsilon = 1 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (l-1, l+1) \quad \forall n > N$. Se tiene que $a = \text{mín}\{a_1, a_2, \ldots, a_N, l-1\}$ es una cota inferior de la sucesión y $b = \text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_N, l+1\}$ es una cota superior.

La sucesión de los naturales es no convergente por no estar acotada. ¿El recíproco es cierto?

Proposición 55 *Indeterminaciones* 1^∞, 0^∞, ∞^0, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0∞, $\infty - \infty$.

Ejemplo 48.- **Algunos límites útiles:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \; \alpha > 0, \;\; \lim_{n\to\infty} x^n = 0, \;\; |x| < 1, \;\; \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0 \; \forall a, b > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \; \forall a \in \mathbb{R}$$

Proposición 56 *Teorema del Sandwich. Sean* (a_n), (b_n) *y* (c_n) *tres sucesiones tales que* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para todo* n *y además* $\lim a_n = \lim c_n = L$. *Entonces* $\lim b_n = L$.

Ejemplo 49.- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$.

Aplicamos el teorema de sandwich. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\underbrace{\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}}_{\frac{n^2}{n^2+n}} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \underbrace{\frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}}_{\frac{n^2}{n^2}}.$$

El límite pedido vale 1.

Proposición 57 *Teorema de las sucesiones monótonas. Toda sucesión monótona y acotada es convergente*

Demostración: Suponemos que (a_n) es no decreciente y acotada superiormente. Esto es $a_n \leq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Consideramos el conjunto de números reales $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea α_0 su cota superior mínima entonces por las propiedades del supremo tenemos que

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N \; / \; |\alpha_0 - a_N| < \varepsilon$$

entonces

$$\forall \, n > N, \; |\alpha_0 - a_n| \leq |\alpha_0 - a_N| < \varepsilon$$

de manera que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_0$$

Ejemplo 50.- Estudia si las siguientes sucesiones estan acotadas, son monótonas, convergen:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad a_n = \frac{n}{n^2+1}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6)\ n \geq 1, a_1 = 2$$

2.1.2. Series numéricas

Definicion 58 *Definición de serie Sea (a_n) una sucesión y consideramos la sucesión (s_n) de sumas parciales, definida como: $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Si la sucesión (s_n) converge, al* $\lim s_n$ *se le denota por* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que la serie es* ***convergente*** *y recibe el nombre de suma de la sucesión serie. Si no existiera el límite de las sumas parciales diremos que la serie es* ***divergente****.*

Algunos tipos de series importantes

- Series **geométricas** : $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}$ si $r < 1$, si $r \geq 1$ la serie geométrica diverge. Vamos a estudiar cómo es la suma parcial, tenemos:

  $$S_n = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n$$

  $$rS_n = a_0 r + a_0 r^2 + a_0 r^3 + \cdots + a_0 r^{n+1}$$

  Si restamos ambas expresiones

  $$(1-r)S_n = a_0(1-r^{n+1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$$

  si aquí hacemos tender $n \to \infty$ tenemos que si $r \geq 1$ la sucesión de sumas parciales diverge de manera que la serie geométrica diverge pero si $r < 1$ entonces la serie converge y su suma es

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}$$

- Series **aritmético-geométricas**

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_0 n r^{n-1} = \frac{a_0}{(1-r)^2}$$

- Series **telescópicas** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de manera que $a_n = b_{n+1} - b_n$, entonces

$$\sum_{n\geq 0} a_n \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (b_n - b_1)$$

Ejemplo 51.-

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

como

$$\frac{-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

tenemos que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1} = 1$$

Proposición 59 Condición del resto de Cauchy. *Una condición necesaria, aunque no suficiente, para la convergencia de una serie es que su término general tienda a cero, esto es:* $a_n \to 0$.

Demostración: Observar que

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

de manera que si la serie es convergente tenemos que tomando limites en la igualdad anterior llegamos a la condición deseada. Observar que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 52.- Estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$

Ejemplo 53.- **Ejemplo importante:** La serie p-armónica. La serie p-armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $0 < p \leq 1$

Recuerda el estudio de la familia de funciones $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$.

Proposición 60 Criterio de comparación. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales positivos tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que la serie si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Por otra parte si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge. En otros casos no podemos asegurar nada.*

Observación 3 Criterio de comparación en el infinito. *Si calculamos el límite del cociente de los términos generales de dos series y dicho número es finito y positivo entonces significa que su comportamiento en el infinito es similar. Las dos convergen o las dos divergen.*

Ejemplo 54.- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ converge ya que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ y $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge.
Ejemplo 55.- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n-2}$ diverge ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n-2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2} = \frac{1}{3}$ y por tanto esta serie tiene el mismo comportamiento en el infinito que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ que sabemos que diverge.
Ejemplo 56.- $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge ya que $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ para $n \geq 3$ y esta serie diverge.

Para acabar esta sección de series numéricas, añadimos un par de propiedades que nos vendrán bien cuando estudiemos las series de Taylor.

Definicion 61 Convergencia absoluta *Decimos que la serie $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum |a_n|$ converge.*

Teorema 62 *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

Proposición 63 *Prueba de la razón o del cociente Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ es tal que $L < 1$ entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente. Si en cambio, $L > 1$ o ∞ entonces la serie $\sum a_n$ diverge.*

2.2. Límites y continuidad

2.2.1. Limites de funciones

Definicion 64 *El límite de f es l cuando x tiende a a si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \,/\, \textit{si}\;\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ejemplo 57.- $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.
Ejemplo 58.- $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$.
Ejemplo 59.- La siguiente función es una función que no tiene límite en ningún punto.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ejemplo 60.- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$.

Teorema 65 *Unicidad del límite El límite de una función en un punto si existe es único.*

Lema 66 *Sean $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$*

1. *Si $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$*
2. *Si $|x - x_0| < \min(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)})$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)})$ entonces $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$*
3. *Si $|y - y_0| < \min(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2})$ entonces $y \neq 0$ y $|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}| < \varepsilon$*

Proposición 67 *Algebra de límites Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f + g)(x) = l + m$
2. $\lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(fg)(x) = lm$
3. *Si $m \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$*

Ejemplo 61.-

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 1} = 1.$$

Observación 4

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\{x_n\} \subset D(f),\; x_n \neq a,\; \lim_{n\to\infty} x_n = a, \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

Ejemplo 62.-

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\lim_{h\to 0}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Ejemplo 63.-

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

si elegimos

$$|x-1|<\delta_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-|x|\leq |x-1|=|x-1|<\delta_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-|x|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2>\frac{1}{|x|}$$

$$|x-1|<\delta_2=\frac{\varepsilon}{2}$$

entonces para $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{x}-1\right|=\left|\frac{1-x}{x}\right|=\frac{|1-x|}{|x|}<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Ejemplo 64.- El límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}$$

no existe ya que si elegimos

$$x_n=\frac{n}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=1\Rightarrow f(x_n)=\frac{1}{1-x_n}=\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+1-n}=n+1\Rightarrow\nexists\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

Ejemplo 65.- De forma similar vemos que este límite no existe

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$$

ya que si elegimos

$$x_n=\frac{3n}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=3\Rightarrow f(x_n)=\frac{1}{(x_n-3)^2}=\frac{1}{\left(\frac{3n}{n+1}-3\right)^2}=\frac{(n+1)^2}{9}\Rightarrow\nexists\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

Proposición 68 *Más propiedades de los límites*

1. *Si* $f(x)\leq g(x)$ *y* $\lim_{x\to a}f(x)=l,\ \lim_{x\to a}g(x)=m$, *entonces* $l\leq m$
2. *Si* $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ *y* $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=l$, *entonces* $\lim_{x\to a}h(x)=l$
3. *Si* $f(x)$ *esta acotada en* $0<|x-a|<\delta$ *y* $\lim_{x\to a}g(x)=0$, *entonces* $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$

Ejemplo 66.- Para calcular que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, utilizamos la propiedad 2 anterior y el hecho geométrico de que

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x \;\Rightarrow\; 1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Definicion 69 Límites laterales. *Límite por la derecha*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, si\;\; 0 < x - a < \delta \;\Rightarrow\; f(x) - l < \varepsilon$$

Límite por la izquierda

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, si\;\; 0 < a - x < \delta \;\Rightarrow\; l - f(x) < \varepsilon$$

Ejemplo 67.- Calcula los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos interesantes

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \geq 0; \\ 4, & x < 0. \end{cases}, \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^+} = -1, \text{ y } \lim_{x\to 0^-} = 4$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x-3}, & x \geq 3; \\ 4, & x < 3. \end{cases}, \;\Rightarrow\; \nexists \lim_{x\to 3^+}, \text{ y } \lim_{x\to 3^-} = 4$$

$$f(x) = |x|, \;\; \lim_{x\to 0^+} = 0, \text{ y } \lim_{x\to 0^-} = 0$$

Observación 5

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \exists \lim_{x\to a^+} f(x), \;\exists \lim_{x\to a^-} f(x), \;\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

Ejemplo 68.-

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \;\; \lim_{x\to 0^+} = 1, \text{ y } \lim_{x\to 0^-} = -1$$

Definicion 70 Límites en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{R} \,/\, |f(x) - l| < \varepsilon, \;\forall x > k$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{R} \,/\, |f(x) - l| < \varepsilon, \;\forall x < k$$

Ejemplo 69.-

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{3x^2+2} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{3x^2+2} = 0, \quad \nexists \lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} x$$

Definicion 71 Límite infinito

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 \,/\, si\;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > k$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 \,/\, si\;\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < k$$

Ejemplo 70.-

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x < 3; \\ \frac{3}{(x-3)^2}, & x > 3. \end{cases}$$

2.2.2. Funciones continuas

Definicion 72 Definición de una función continua en un punto *Decimos que una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua en el punto* a*,* $a \in D$ *si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
O equivalentemente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ / \ si \ \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ejemplo 71.- Los polinomios, las trigonométricas, la raíz, el logaritmo la exponencial. El valor absoluto.
Ejemplo 72.- La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

es discontinua en todos los puntos de su dominio.

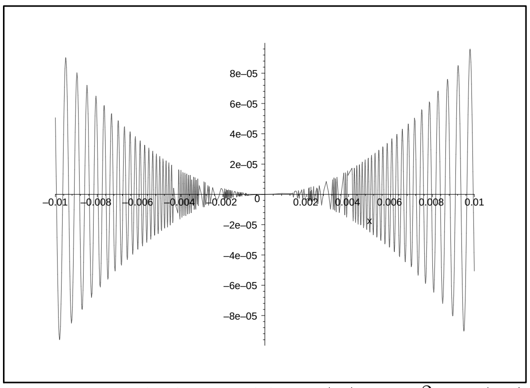
Definicion 73 Continuidad en intervalos *Decimos que* f *es continua en* (a, b) *si* f *es continua* $\forall x \in (a, b)$.
Decimos que f *es continua en* $[a, b]$ *si* f *es continua* $\forall x \in (a, b)$ *y* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *y* $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Ejemplo 73.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones

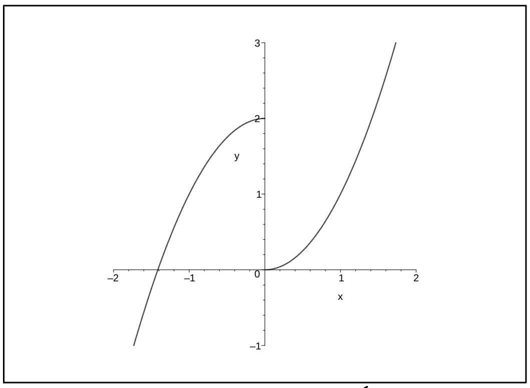
$$f_1(x) = [x], \qquad f_2(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2; \\ 1, & x = 2. \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2; \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

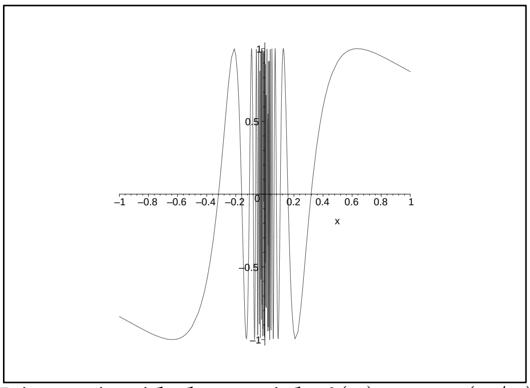
Definicion 74 Tipos de discontinuidad *Evitable, de salto y esencial.*



Discontinuidad evitable, $f(x) = x^2 sin(1/x)$



Discontinuidad de salto, $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 0; \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$



Discontinuidad esencial, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

Proposición 75 Algebra de funciones continuas *Si f, g son funciones continuas en a, entonces $f + g$, es continua en a, fg es continua en a y si $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{1}{g}$ es continua en a.*

Ejemplo 74.- Polinomios, racionales, etc.
Ejemplo 75.- Estudia donde es continua la función

$$f(x) = \frac{\ln x + \cos x}{x^2 - 1}$$

Proposición 76 Composición de funciones continuas *Sea f una función continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Ejemplo 76.- Estudia donde es continua la función $f(x) = \ln(1 + \cos x)$.

Proposición 77 Signo de la función en un intervalo

1. *Sea f continua en a y $f(a) > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todos los x en $|x - a| < \delta$*

2. *Sea f continua en a y $f(a) < 0$, entonces $\exists\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todos los x en $|x - a| < \delta$*

Demostración: Si f continua en a entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Si $f(a) > 0$, elijo $\varepsilon = f(a)$ de manera que por la continuidad de f en a tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon = f(a) \Leftrightarrow -f(a) < f(x)-f(a) < f(a) \Leftrightarrow 0 < f(x), \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Si $f(a) < 0$ elegimos $\varepsilon = -f(a)$.

Proposición 78 El operador límite conmuta con funciones continuas *Sean f, g tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y g es continua en l, entonces:*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(l)$$

2.2.3. Tres teoremas importantes

El teorema de Bolzano es el teorema fundamental para resolver ecuaciones del tipo $f(x) = 0$.

Teorema 79 Teorema de Bolzano *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.*

Demostración: Para el trabajo del axioma del supremo.

Ejemplo 77.- Encuentra una x tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$. Consideramos $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$, continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Observamos que $f(1) = \operatorname{sen} 1 > 0$ y $f(\pi) = 0 - \pi + 1 < 0$, de manera que por el teorema de Bolzano podemos asegurar que $\exists x \in [1, \pi]$ tal que $f(x) = 0$ y por tanto $\operatorname{sen} x = x - 1$.

Ejemplo 78.- Encuentra un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ con $x \in (n, n + 1)$ siendo $f(x) = x^3 - x + 3$. Observamos que f es continua en toda la recta real y además $f(-2) < 0$ y $f(-1) > 0$ de manera que por el teorema de Bolzano podemos asegurar que $n = -2$.

Ejemplo 79.- Un monje tibetano sale a las 7:00 am y toma sus sendero usual hasta la cima de la montaña, a la que llega a la 7:00 pm. A la mañana siguiente, parte a las 7:00 am de la cima, toma el mismo sendero y llega al monasterio a las 7:00 pm. Demuestra que existe un punto en el sendero que el monje cruzará exactamente en el mismo momento del día, en ambos días.

Ejemplo 80.- Admitamos que el polinomio $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$ posee cuatro raíces reales diferentes. Encuentra cuatro intervalos disjuntos $[a, b]$ de manera que en cada uno de ellos haya una sola raíz.

Mi solución:

$$p(-3) = 2,\ p\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{16},\ p\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{14}{81},\ p(-2) = 2$$

$$p(0) = 2,\ p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16},\ p\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{81},\ p(1) = 2$$

Corolario 80 Valores intermedios *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.*
Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

Demostración: Aplicamos Bolzano a la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Ejemplo 81.- Encuentra $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 10$ siendo $f(x) = x^3 - x^2 + x$. $f(3) = 20$, $f(2) = 6$ y como la función es continua para toda la recta real, entonces existe $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 10$.
Ejemplo 82.- Sea f una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \in \mathbb{Q}$ entonces ¿Qué podemos asegurar de la función f?. Que es continua.

Proposición 81 *Si f es continua en a, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f esta acotada superiormente en el $(a - \delta, a + \delta)$.*

Demostración: Si f continua en a, entonces para $\varepsilon = 1$ existe un δ de tal forma que para todos los $x \in (a - \delta, a + \delta)$

$$|f(x) - f(a)| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) - f(a) < 1 \Leftrightarrow f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$$

Teorema 82 Teorema de acotación *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f esta acotada superiormente. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f esta acotada inferiormente. Si una función es continua en $[a, b]$ entonces está acotada.*

Teorema 83 Teorema de Weierstrass *Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza máximo y mínimo.*

Observación 6 *¿Qué pasaría en estos teoremas si el intervalo fuese abierto?.*

Ejemplo 83.- De las siguientes funciones definidas en los intervalos indicados, decide cuáles están acotadas superior o inferiormente y si alcanzan máximos y mínimos y quién son estos.

- $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$, en $\mathbb{R}$, en $(0, \infty)$.
- $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$, en $(-1, 1]$, en $[-1, 1)$, en $[-1, 1]$.
- $f(x) = \frac{1}{x}$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 84.- Demuestra que si f es continua en $[a, b]$ entonces existe una función g continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Da un contraejemplo de que esto no es así si el intervalo es abierto.

Podemos definir g de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(a), & x < a; \\ f(x), & a \leq x \leq b; \\ f(b), & x > b. \end{cases}, \qquad g(x) = \frac{1}{x-a}$$

Ejemplo 85.- Halla a para que f sea continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2; \\ a, & x = 2. \end{cases} \qquad a = 4.$$

2.3. Derivabilidad

2.3.1. Derivada: definición y primeras propiedades

Observación 7 Interpretación de la derivada

- *geométrico*
- *físico*
- *analítico*

Definicion 84 Definición derivada *Decimos que la función f es derivable en el punto $x = a$ si existe el siguiente límite, y en ese caso lo denotamos por $f'(a)$ y la llamamos derivada de f en el punto $x = a$,*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es derivable en todos los puntos de su dominio decimos que f es derivable.

Ejemplo 86.- Calcula la derivada de $f(x) = c$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Definicion 85 *Función derivada La función f' definida por $x \mapsto f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ se denomina función derivada de f.*

Ejemplo 87.- Observamos las gráficas de la f y de su derivada f'.

Definicion 86 Derivadas laterales *Derivada por la derecha $f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.*
Derivada por la izquierda $f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Observación 8 *Si existen $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ y coinciden entonces f es derivable en $x = a$ y $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$*

Ejemplo 88.- $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

Observación 9 *Notación de Leibnitz.*
Derivadas sucesivas.
Cálculo de la derivada n-ésima.

Ejemplo 89.- Calcula la derivada n-ésima de las siguientes funciones: $f_1(x) = c$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^n$, $f_5(x) = \operatorname{sen} x$, $f_6(x) = \frac{1}{x}$.

Teorema 87 *Si f es derivable en a entonces f es continua en a.*

Demostración: ¿$\lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a)) = 0$?. Si ya que

$$\lim_{h \to 0}(f(a+h)-f(a)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \frac{1}{h} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$$

2.3.2. Reglas de derivación

Proposición 88 Reglas de derivación *(1) Si $f(x) = c$ entonces $f'(x) = 0$.*

(2) Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$.

(3) Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en $x = a$ entonces $f + g$ es derivable en $x = a$ y tenemos que $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(4) Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en $x = a$ entonces fg es derivable en $x = a$ y tenemos que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(5) Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en $x = a$ y $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $x = a$ y tenemos que $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Ejemplo 90.- Calcula la derivada de las siguientes funciones: $f_1(x) = \frac{x^2-1}{3x+1}$, $f_2(x) = x^5 \operatorname{sen} x \cos x$.

Proposición 89 Regla de la cadena *Si f es derivable en $x = a$ y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en $x = a$ y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Ejemplo 91.- Calcula la derivada de $f_1(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$, $f_2(x) = \cos^{31}(x)$, $f_3(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{x+\operatorname{sen} x}}$, $f_4(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)}\right)$

Corolario 90 *Sea f una función y considero $f^m(x) = f(x) \cdots f(x)$ m veces, entonces $(f^m)'(a) = mf^{m-1}(a)f'(a)$.*

Aplicaciones de la Regla de la Cadena

Proposición 91 Derivación implícita *Supongamos que tenemos una expresión de la forma $f(x, y) = 0$ que define de manera implícita una cierta función $y(x)$ entonces derivamos la expresión utilizando la regla de la cadena.*

Ejemplo 92.- $x^2 + y^2 = 1$, Suponemos y en función de x: $x^2 + y^2(x) = 1$, derivamos con respecto a x tenemos: $2x + 2y(x)y'(x) = 0$ de manera que de aquí podemos obtener la derivada de y, $y'(x) = -\frac{x}{y}$ y si despejamos y de la expresión inicial: $y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ejemplo 93.- $5y^2 + \operatorname{sen}(y) = x^2$.
Ejemplo 94.- Folium de Descartes: $x^3+y^3 = 3xy$. Encuentra la recta tangente a esta curva en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. ¿En qué puntos del primer cuadrante la tangente es horizontal?.
Ejemplo 95.- Calcula la recta tangente a $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, en el punto $(-5, \frac{9}{4})$, $y = -\frac{5}{4}x - 4$.
Ejemplo 96.- Idem $y^2 = x^3(2 - x)$, en $(1, 1)$, $y = x$.

Observación 10 *Derivación de funciones inversas. Las inversas trigonométricas.*

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo 97.- Calcula la derivada de $\arcsin x$.

2.3.3. Máximos y mínimos

Una de las aplicaciones fundamentales en matemáticas son los problemas de optimización, esto es, problemas en los que nos interesa maximizar o minimizar funciones. En esta sección vamos a estudiar qué características tienen estos puntos y qué maneras tenemos de encontrarlos.

Definicion 92 Máximo y mínimo. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que x_0 es un* ***máximo local (relativo)*** *si $\exists \delta > 0 \ / \ f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. A $f(x_0)$ le llamamos valor máximo. (Similar con* ***mínimo****). Se dice que x_0 es un extremo local si es un máximo o un mínimo. Diremos que el máximo, mínimo,* ***extremo es absoluto*** *si se cumple la desigualdad correspondiente para todos los puntos del dominio de la función.*

Ejemplo 98.- Calculas máximos y mínimos de las siguientes funciones: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$, $f_3(x) = \sin(x)$.

Teorema 93 *Sea f una función definida sobre (a, b), si x_0 es un extremo local para f sobre (a, b) y f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración: Supongamos que en x_0 la función f alcanza un máximo. Esto es, para los x de en un entorno de x_0 tenemos que $f(x_0) \geq 0$. De manera que si calculamos las derivadas laterales de f en x_0 tenemos que:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

como estamos suponiendo que f es derivable en x_0, entonces sabemos que las dos derivadas laterales han de coincidir y la única posibilidad de que se den las dos desigualdades a la vez es que $f'(x_0) = 0$ como queríamos demostrar.

Observación 11 *El recíproco no es cierto. Por ejemplo $f_2(x) = x^3$ anterior.*

Definicion 94 Punto singular o crítico *Decimos que x_0 es un punto* ***singular o crítico*** *de f si $f'(x_0) = 0$, a $f(x_0)$ se le llama valor singular.*

Observación 12 Problema típico *Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función f en el intervalo $[a, b]$.*

(1) Si la función es continua sabemos por el teorema de Weierstrass que alcanzará máximo y mínimo en el intervalo.

(2) Lo buscaremos dentro de los puntos singulares de f, en los extremos y en los puntos donde la función no sea derivable.

(3) Evaluaremos la función, si es posible , en cada punto de los anteriores y ya con esta evaluación podremos decidir.

Ejemplo 99.- Calcula máximo y mínimos absolutos de $f_1(x) = x^3 - x$ en $[-1, 2]$. Máximo en $x = 2$ y mínimo en $x = \sqrt{3}/3$.
Ejemplo 100.- Calcula máximo y mínimos absolutos de $f_2(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en $(-1, 1)$. Mínimo en $x = 0$ y no alcanza máximo.
Ejemplo 101.- Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado.
Ejemplo 102.- De entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo halla el de menor superficie (incluyendo las dos tapas). Es aquel que tiene de radio, $r = \sqrt[3]{V/2\pi}$.

2.3.4. Teoremas importantes

Anteriormente hemos visto que si la función es derivable y tiene un máximo en x, $f'(x) = 0$. La pregunta ahora es la contraria. Sabiendo como es la derivada de una función ¿qué podemos decir de la función?.

Empezamos observamos un caso particular del teorema más importante para derivabilidad: el teorema del valor medio. El teorema de Rolle, es además, la herramienta necesaria para demostrar el teorema del valor medio.

Teorema 95 Teorema de Rolle *Si f es continua en $[a, b]$ y derivable (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ $/ f'(x_0) = 0$.*

Demostración: Por el teorema de Weiestrass sabemos que la función al ser continua en el cerrado va alcanzar máximo y mínimo en $[a, b]$. Las posibilidades es que el máximo se alcance en $x_0 \in (a, b)$, entonces como la función es derivable se tiene que $f'(x_0) = 0$ y ya lo habríamos demostrado. Por otra parte y de manera similar si el mínimo se alcanza en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. Sólo nos queda el caso en el que se alcancen ambos en a y b, de manera que como $f(a) = f(b)$ y son máximos y mínimos sólo puede ser porque $f(x) = c$ y en ese caso $f'(x) = 0$ para todos los $x \in (a, b)$.

Observación 13 *Observar la necesidad de la condición de derivabilidad en la hipótesis. Por ejemplo $|x|$ en $[-1,1]$.*

Ejemplo 103.- $f(x) = x^2$ en $[-1,1]$. $f(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$.

Teorema 96 **Teorema del valor medio** *Si f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demostración: Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

observamos que h es continua en $[a,b]$, h es derivable en (a,b). Además $h(a) = f(a)$ y $h(b) = f(a) = h(a)$. De manera que por el teorema de Rolle podemos asegurar que existe un $x \in (a,b)$ tal que $h'(x) = 0$, pero

$$h'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejemplo 104.- Imaginemos que vamos en coche durante una hora y hemos recorrido 90 km. El teorema del valor medio me dice que en algún momento del recorrido hemos ido exactamente a la velocidad de 90 km/h.

Corolario 97 *Si se define f sobre (a,b) y $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$ entonces $f = c$ en (a,b).*

Demostración: Si $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$. Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del intervalo, entonces $f'(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ para cualquier par de puntos del intervalo, entonces $f(x) = c$ en $[a,b]$.

Observación 14 *Atención si estamos en más de un intervalo.*

Corolario 98 *Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo entonces existe un c tal que $f - g = c$.*

Demostración: Aplicamos el corolario anterior a $h(x) = f(x) - g(x)$.

2.3.5. Crecimiento y decrecimiento

Nuestra principal aplicación del teorema del valor medio tiene que ver con el estudio del crecimiento de la función.

Definicion 99 Definición de crecimiento y decrecimiento *Se dice que f es una función **creciente** sobre el intervalo (a, b) si $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$ siendo $x, y \in (a, b)$.Se dice que f es una función **decreciente** sobre el intervalo (a, b) si $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$ siendo $x, y \in (a, b)$.*

Corolario 100 *Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.*

Si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Demostración: Si $f'(x) > 0$ y $a < b$ en el intervalo, entonces por el teorema del valor medio tenemos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) > 0$$

como $b - a > 0$, entonces necesariamente $f(b) > f(a)$.
Ejemplo 105.- Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones $f_1(x) = x^3 - x$, $f_2(x) = x^4 - 2x^2$, $f_3(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Teorema 101 *Sea $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$ entonces f tiene un máximo local en a.*

Teorema 102 *Supongamos que existe $f''(a)$. Si f tiene un mínimo local en a entonces $f''(a) \geq 0$. Similar con el máximo.*

Observación 15 *Observa la diferencia entre estos dos últimos teoremas. $f(x) = x^4$.*

Definicion 103 *Concavidad y Convexidad Se dice que f es **convexa** en $\mathcal{I}$ si para todo $a, b \in \mathcal{I}$ el segmento rectilíneo que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.*

También se puede definir de la siguiente manera: f es convexa en $\mathcal{I}$ si para todo $a, b, x \in \mathcal{I}$ con $a < x < b$ se tiene:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Proposición 104 *f convexa, si f derivable en x entonces la gráfica queda por encima de la tangente por $(a, f(a))$ excepto en $(a, f(a))$. Si $a < b$ y f es derivable en a y b entonces $f'(a) < f'(b)$. Es decir si f convexa entonces f' es creciente.*

Si f derivable y f' creciente, $a < b$ y $f(a) = f(b)$ entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para todo $x \in (a, b)$.

Si f derivable y f' creciente entonces f convexa.

Ejemplo 106.- (Junio 1990) $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$. Empezamos estudiando su dominio y vemos que $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, y la derivada $f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ no está definida para los mismos puntos donde la función no esta definida. Observamos que f es periódica de periodo 2π y por tanto, basta con que observemos lo que pasa en $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ este intervalo y el resto lo completamos utilizando la periodicidad. Observamos que el signo de la derivada de la función será en $(0, \pi)$ sera negativo, de manera que en ese intervalo la función es decreciente y por el contrario en el intervalo $(\pi, 2\pi)$, la función será creciente. Sin existir puntos de máximo o mínimo. Observemos cómo se comporta la función cuando nos acercamos a los bordes de los intervalos:

$$\lim_{x\to 0^+} \log\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = \infty, \qquad \lim_{x\to \pi^-} \log\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^+} \log\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2\pi^-} \log\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = \infty$$

También observamos que $f''(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, de manera que la concavidad y convexidad irá con el signo del $\cos(x)$. Tendremos puntos donde cambia en $f''(x) = 0$ esto es $\cos(x) = 0$ es decir, en nuestro intervalo en $\pi/2 y 3\pi/2$.

Ejemplo 107.- (Febrero 1991) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

Ejemplo 108.- La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 + 12x + 12$ $(x \in \mathbb{R})$ posee puntos cuyas rectas tangentes son paralelas. Encuentra dos de esos puntos e indica las ecuaciones de esas rectas tangentes.

Solución Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente. Como la pendiente de una recta tangente en un punto viene dada por el valor de la derivada en ese punto, lo que hacemos es buscar dos puntos en los que la derivada tenga el mismo valor.

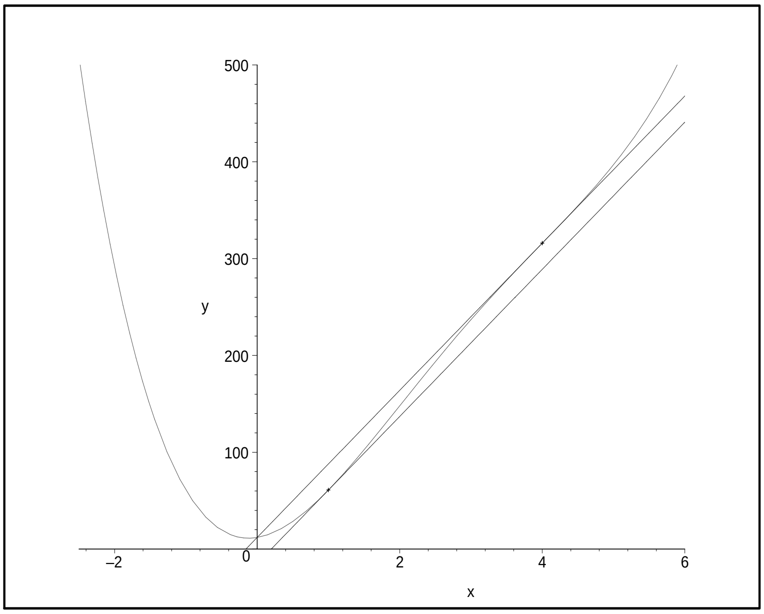
$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x + 12$$

Como la derivada es una cúbica con primer coeficiente positivo, sabemos que tendrá una forma de N viniendo desde $-\infty$ y yendo a ∞, la parte central de la N estará entre el máximo y mínimo de f', así que calculamos estos puntos:

$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96, \quad f''(x) = 0, \quad x^2 - 6x + 8 = 0, \quad x = 2 \text{ y } x = 4$$

Podemos elegir cualquiera de estos dos puntos o bien uno intermedio para asegurarnos de que la f' tiene al menos dos valores iguales, por ejemplo voy a escoger $x_1 = 4$, entonces buscamos un x_0 tal que $f'(x_0) = f'(4) = 76$, esto es $4x_0^3 - 36x_0^2 + 96x_0 + 12 = 76$, como ya sabemos que una raíz es 4 es fácil ver que $4x_0^3 - 36x_0^2 + 96x_0 - 64 = 0 = 4(x-4)^2(x-1)$, de manera que el otro punto es $x_0 = 1$. Siendo las rectas tangentes:

$$y = 76x - 15 \qquad y = 76x + 12$$



2.3.6. Regla de L'Hôpital

Teorema 105 *Teorema del Valor Medio generalizado Si f y g son continuas en $[a, b]$, y f y g diferenciables en (a, b) entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ tal que:*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

si $f(b) \neq f(a)$, $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x_0) \neq 0$ esta ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Demostración: Le aplicamos el teorema de Rolle a la función

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Observa que si $g(x) = x$ tenemos el teorema del Valor Medio.

Teorema 106 *Regla de l'Hôpital Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*, supongamos también que existe* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*. Entonces existe* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *y se tiene que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Proposición 107 *Otros casos de L'Hôpital*

1. *Si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*. Entonces* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$*. (Análogo para* a^-*).*

2. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$*. Entonces* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$*.*

3. *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$*. Entonces* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$*. (Análogo para* $-\infty$*).*

4. *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*. Entonces* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$*.*

Ejemplo 109.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Ejemplo 110.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x))}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} + \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 2 + 0 = 2.$$

Ejemplo 111.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = -1 \cdot 0 = 0.$$

Ejemplo 112.- ¿Dónde esta el error?

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3.$$

2.3.7. Método de Newton

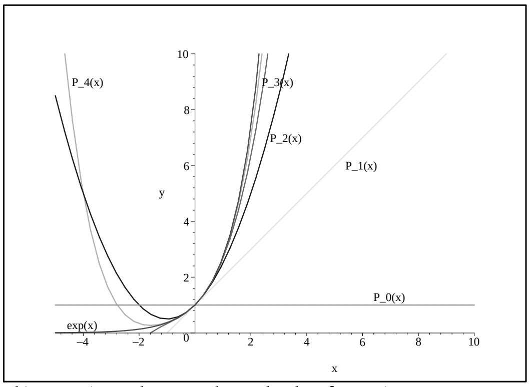
Método de Newton El método de Newton nos resuelve ecuaciones del tipo $f(x) = 0$ en un cierto intervalo $[a, b]$ utilizando un método de aproximación a la solución con derivadas. Vamos a obtener una sucesión de puntos que, si las condiciones son las adecuadas, convergerá a la solución del problema, la sucesión la damos de forma recurrente según la siguiente expresión, empezamos en un cierto $x_0 \in [a, b]$ y los siguientes los construimos con la siguiente fórmula:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}$$

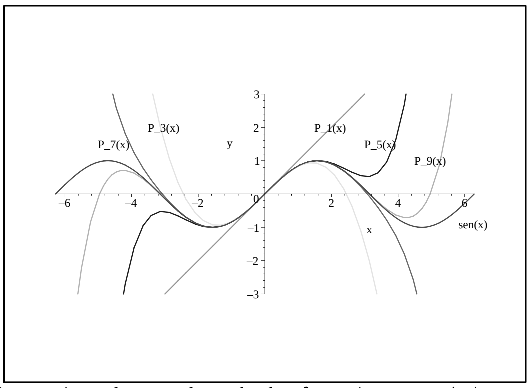
Interpretación geométrica.

2.4. Polinomios y series de Taylor

2.4.1. Polinomios de Taylor



Polinomios de Taylor de la función e^x en x=0



Polinomios de Taylor de la función sen(x) en x=0

Definicion 108 Polinomio de Taylor *Sea f una función tal que existen todos sus derivadas en el punto a desde 0 hasta n, definimos el **polinomio de Taylor de orden** n **en el punto** a **para la función** f como*

$$P_{n,a,f}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplo 113.- Polinomios de Taylor de $f(x) = e^x$ en $x = 0$.
Ejemplo 114.- Idem $f(x) = \sin(x)$ en $x = 0$.
Ejemplo 115.- Idem $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ en $x = 1$. ¿Y en $x = 0$?.
Ejemplo 116.- Idem $(1 + x)^m$ en $x = 0$.

Observación 16 *El caso especial de $a = 0$, que se da con mucha frecuencia, recibe el nombre especial de* ***polinomio de Maclaurin****.*

Teorema 109 *Supongamos que f es una función para la cual existen todas sus derivadas desde 0 hasta n y consideramos su polinomio de $P_{n,a}$, entonces:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Ejemplo 117.-

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{24}}{x^9}$$

Teorema 110 *Suponemos que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-2)}(a) = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$*

1. *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo en $x = a$.*

2. *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$ entonces f tiene un máximo en $x = a$.*

3. *Si n es impar entonces f no tiene ni máximo ni mínimo.*

Observación 17 *Hay funciones que todas sus derivadas en un punto son cero.* ***Ejemplo:*** $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Definicion 111 *Funciones iguales hasta el orden n Decimos que* ***dos funciones*** $\mathbf{f}$ ***y*** $\mathbf{g}$ ***son iguales hasta el orden*** $\mathbf{n}$ *si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = 0, \quad \forall k \leq n$$

Teorema 112 *Sean P y Q dos polinomios en $(x-a)$ de grado n y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a entonces $P = Q$.*

Definicion 113 Resto de Taylor *Sea f una función para la que existe su polinomio de Taylor de grado n en el punto $x = a$, $P_{n,a}(x)$ entonces definimos el* ***resto*** $\mathbf{R_{n,a}(x)}$ *como:*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Teorema 114 Teorema de Taylor *Supongamos que $f', f'', \cdots, f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$ y que $R_{n,a}(x)$ esta definido por*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$$

entonces

$$(1)\ R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a), \quad t \in (a,x)$$

$$(2)\ R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad t \in (a,x)$$

Y si $f^{(n+1)}$ continua en $[a,x]$, entonces

$$(3)\ R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Observación 18 *En el teorema anterior estamos suponiendo $a < x$, si tenemos $x > a$ tendríamos que modificar los resultados adecuadamente.*

Proposición 115 Desigualdad de Taylor *Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| < R$, entonces el resto de Taylor $R_n(x)$ satisface la desigualdad*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \ \textit{para}\ \ |x-a| < R$$

Ejemplo 118.- Calcula $\sin 2$ con un error menor que 10^{-3}.

2.4.2. Series de potencias y de Taylor

Definicion 116 *Una suma del tipo: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se le llama* ***serie de potencias*** *centrada en $x = 0$. Si en cambio tenemos una expresión del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ se le llama* ***serie de potencias*** *centrada en $x = a$. Si en cambio tenemos una expresión del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se le llama* ***serie de Taylor*** *de la función f en $x = a$.*

Observación 19 *Una serie de potencias convergente centrada en $x = 0$ es siempre la serie de Taylor en $x = 0$ de la función que define.*

Proposición 117 Convergencia de las series de potencias *Para una serie de potencias dada $\sum c_n(x-a)^n$, sólo hay una de tres posibilidades:*

1. *La serie sólo converge cuando $x = a$.*

2. *La serie converge para toda x.*

3. *Hay un número positivo, R, tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$*

Definicion 118 Radio e intervalo de convergencia *Al número R del teorema anterior se le llama* ***radio de convergencia****. Se llama* ***intervalo de convergencia*** *al conjunto de puntos donde la serie converge.*

Ejemplo 119.- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

Ejemplo 120.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$

Ejemplo 121.- $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

Proposición 119 Representación de funciones como series de potencias *Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tiene el radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es diferenciable en el intervalo $(a-R, a+R)$, y*

(a) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(b) $\int f(x)dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Ejemplo 122.- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$

Ejemplo 123.- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ para $|x| < 1$

Ejemplo 124.- $\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$ para $|x| < 2$.

Ejemplo 125.- $\frac{x^3}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$ para $|x| < 2$.

Ejemplo 126.- Calcula el desarrollo en serie de la derivada del primer ejemplo.

Ejemplo 127.- Utilizando el segundo ejemplo encuentra el desarrollo en serie del $\arctan(x)$.

Capítulo 3

Cálculo Diferencial en varias variables

3.1. Límites y continuidad

3.1.1. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Definicion 120 Coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Ejemplo 128.- El punto $(2, \pi/3)$ en coordenadas polares es el $(1, \sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas.
Ejemplo 129.- El punto $(1, -1)$ en coordenadas cartesianas es el punto $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ en coordenadas polares (Cuidado, hay varias posibilidades).
Ejemplo 130.- ¿Qué curva esta representada por la ecuación polar $r = 2$?. (4) Dibuja la curva $\theta = 1$.
Ejemplo 131.- Dibuja la curva con ecuación polar $r = 2\cos(\theta)$. Encuentra una ecuación cartesiana para esta curva.

Observación 20 Derivación en coordenadas polares. *Si tenemos que $r = f(\theta)$ escribimos*

$$x = f(\theta)\cos(\theta) \qquad y = f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

de manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta)}$$

Definicion 121 Coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,\text{sen}(\theta) \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Ejemplo 132.- El punto $(2, 2\pi/3, 1)$ en cilíndricas corresponde al $(-1, \sqrt{3, 1})$ en rectangulares.

Ejemplo 133.- El punto $(3, -3, -7)$ en coordenadas rectangulares corresponde al punto $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ en cilíndricas, (una de las posibles elecciones).

Ejemplo 134.- Describe la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$.

Ejemplo 135.- Calcula la ecuación en coordenadas cilíndricas del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

Definicion 122 Coordenadas esféricas

$$\rho \geq 0\,, 0 \leq \phi \leq \pi,$$

$$z = \rho\cos(\phi)\; r = \rho\,\text{sen}(\phi)\; x = r\cos(\theta)\; y = r\,\text{sen}(\theta)$$

$$x = \rho\,\text{sen}(\phi)\cos(\theta) \qquad y = \rho\,\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta) \qquad z = \rho\cos(\phi)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Ejemplo 136.- El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ en coordenadas esféricas corresponde al punto $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ en coordenadas rectangulares.

Ejemplo 137.- El punto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ en coordenadas rectangulares corresponde al punto $(4, \pi/2, 2\pi/3)$ en coordenadas esféricas.

Ejemplo 138.- Describe las superficies definidas por: $\rho = c$, $\theta = c$ y $\phi = c$.

Ejemplo 139.- Halla una ecuación en coordenadas esféricas para el hiperboloide de dos hojas de ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

3.1.2. Límites en varias variables

Definicion 123 Límite de una función en un punto *Sea una función* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, donde* A *es un conjunto abierto no vacío. Sea* x_0 *un elemento de* A *o un punto frontera de* A*. Se dice que la función* f *tiene límite en el punto* x_0*, si existe* $l \in \mathbb{R}^m$ *con la siguiente propiedad:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ / \ \textit{si}\ 0 < ||x - x_0|| < \delta,\ x \in A, \quad \textit{entonces}\ ||f(x) - l|| < \epsilon.$$

Proposición 124 Unicidad del límite *El límite* l*, caso de existir, es único. Diremos que* l *es el límite de la función* f *en el punto* x_0*, y se escribe* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$*.*

Ejemplo 140.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$
Ejemplo 141.- $\lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2 = 0$
Ejemplo 142.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Proposición 125 Algebra de límites *Sean* $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*,* x_0 *un elemento de* A *o un punto frontera de* A*,* $\mathrm{l}_1, \mathrm{l}_2 \in \mathbb{R}^m$ *y* c *un número real. Si* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{l}_1$ *y* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = \mathrm{l}_2$*, entonces se tiene que:*

1. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} cf(x) = c\mathrm{l}_1$
2. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \mathrm{l}_1 + \mathrm{l}_2$
3. *Si* $m = 1$*, entonces* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \mathrm{l}_1\mathrm{l}_2$
4. *Si* $m = 1,\ \mathrm{l}_1 \neq 0$ *y* $f(x) \neq 0$ *en una bola abierta de centro* x_0*,* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\mathrm{l}_1}$
5. *Si* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ *, donde* $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *para* $i = 1, \ldots, m$ *son las funciones coordenadas de* f*, entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{l} = (\mathrm{l}_1, \ldots, \mathrm{l}_m) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \mathrm{l}_i \ \forall i = 1, \ldots, m$$

Ejemplo 143.- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2 + y^2 + 2 = 3$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+1} = 1/2.$
Ejemplo 144.- $\lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{y-x^3} = e$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,1)} \ln(\cos(y+z) + x^2) = 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$.
Ejemplo 145.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

Ejemplo 146.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 147.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Observación 21 *Si una función escalar f tiene límite 0 en un punto x_0 y otra función escalar g está acotada, entonces el producto tiende a 0 en dicho punto,* $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = 0$.

Ejemplo 148.- Estudiar el límite en cualquier punto del plano (x_0, y_0) de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y = x^2 \\ y & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

Definicion 126 *Límites iterados. Límites por caminos Podemos calcular los límites iterados:*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

O según un cierto camino C

$$\lim_{(x,y)\in C,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Si alguno de estos límites es distinto de los otros entonces diremos que $f(x,y)$ no tiene límite en (x_0, y_0).

Ejemplo 149.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Ejemplo 150.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Ejemplo 151.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^3+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 152.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 153.- Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 154.- No existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

3.1.3. Continuidad

Definicion 127 Definición de funciones continuas *Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice que es continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Diremos que f es continua en A si lo es en cualquier punto de A.*

Proposición 128 Algebra de funciones continuas *Si f, g son funciones continuas en x_0, entonces cf y $f + g$, es continua en x_0. Si además $m = 1$ entonces fg es continua en x_0. Si además $f(x_0) \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{f}$ es continua en x_0. Por otra parte $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$ es continua en x_0 si y sólo si $f_i(x)$ es continua para todo $i = 1 \cdots m$.*

Proposición 129 Composición de funciones continuas *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $x_0 \in Ay$ $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con $f(A) \subset B$ continua en $y_0 = f(x_0) \in B$ entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es continua en x_0.*

Teorema 130 de Weiestrass *Cualquier función continua sobre un compacto alcanza máximo y mínimo en el compacto.*

Ejemplo 155.- Estudia la continuidad de $f(x, y, z) = \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}$ en el origen.

Ejemplo 156.- Estudia la continuidad de $f(x, y, z) = \frac{x^2z+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ en el origen.

Ejemplo 157.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $L_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ y = \lambda x\}$. Demostrar

$$\lim_{\substack{(x,y) \in L_\lambda \\ (x,y) \to (0,0)}} f(x, y) = 0$$

Encuentra una curva que pase por el origen a lo largo de la cual, salvo en el (0,0), f tenga un valor constante. ¿Es continua f en el origen?

3.2. Diferenciabilidad

La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ (en $\mathbb{R}^n$) se complica algo más. Observaremos que la sola existencia de derivadas parciales en un punto no me da ni siquiera la continuidad en ese punto. Uno podría pensar, claro, en $\mathbb{R}^n$ tenemos muchas más direcciones por las que acercarnos al punto. En este sentido definiremos las derivadas direccionales, pero va a resultar de nuevo que la sola existencia de las derivadas direccionales en un punto tampoco me va a dar siquiera la continuidad de la función en ese punto. Lo que significa que el concepto de diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ (en $\mathbb{R}^n$) es algo más potente. Va a pasar por la existencia del plano tangente como aproximación lineal al punto. Si existe el plano tangente en un punto y este se aproxima a la función en ese punto, entonces estaremos en condiciones de decir que la función es diferenciable en ese punto. Empecemos definiendo las derivadas parciales, esto es, derivadas de la función con respecto a los ejes principales.

3.2.1. Derivadas parciales

Definicion 131 Derivadas parciales *Sean U un conjunto abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con valores reales. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, las derivadas parciales de f respecto a la primera, segunda,..., n-ésima variable son las funciones de n variables con valores reales que en el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ están definidas por*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}\end{aligned}$$

si existen los límites, donde e_j es el j-ésimo vector de la base canónica, $j = 1, \ldots, n$

Observación 22

- *La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es la derivada de f respecto a la variable x_j, manteniendo las otras variables fijas.*
- *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, entonces podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente de f, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.*

Diferenciación parcial implícita. También podemos derivar implícitamente cuando tenemos un función de varias variables, sin más que tener en cuenta la regla de la cadena. Por ejemplo, si suponemos que tenemos definida la función

$z(x,y)$ en un entorno del $(0,0,1)$ por la ecuación $x^2+y^2+z^2(x,y)=1$ tenemos que las derivadas parciales de z son

$$2x+2z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{z(x,y)}$$

Ejemplo 158.- Encuentra las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para z definida implícitamente como función de x e y mediante la ecuación

$$x^3+y^3+z^3+6xyz=1$$

Derivadas parciales de ordenes superiores.

Proposición 132 Lema de Schwarz. *Igualdad de las parciales mixtas de segundo orden.*

Ejemplo 159.- Calcula las derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x,y,z)=x^2y^3e^{2x+3z}$$

En el siguiente ejemplo vemos que la existencia de parciales no me asegura la continuidad de la función.

Ejemplo 160.- La función $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0 \text{ ó si } y=0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ es constante en los ejes x e y, luego tiene derivadas parciales en el origen y valen cero. Sin embargo, f no es continua en $(0,0)$ porque $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ¿podría ser diferenciable en $(0,0)$?

En el siguiente ejemplo vemos como existen las derivadas parciales, es continua pero, en cambio si nos restringimos a la dirección $x=y$ la función no es derivable.

Ejemplo 161.- Estudia las derivadas parciales de la función $f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$ en el origen ¿podría ser diferenciable en $(0,0)$?

Definicion 133 Derivada direccional *Derivada direccional de una función f en un punto a según un vector unitario v:*

$$D_v(f)(a)\equiv\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}.$$

Ejemplo 162.- Calcula la derivada direccional de $f(x,y)=x^2+y^2$ según las siguientes direcciones: $v_1=(1,0)$, $v_2=(0,1)$, $v_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Pregunta 1.-¿Qué relación existe entre la existencia de derivadas parciales y direccionales?

Ejemplo 163.- Calcula las derivadas parciales, derivadas direccionales y continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Pregunta 2.-¿Qué relación existe entre la existencia de las derivadas direccionales y la continuidad de la función?

Ejemplo 164.- Calcula las derivadas parciales, derivadas direccionales y continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & x=0 \text{ o } y=0\\ 1 & x\neq 0,\ y\neq 0\end{cases}$$

3.2.2. Plano tangente y aproximaciones lineales

Como apuntábamos al principio de esta sección, la diferenciabilidad de una función de dos variables en un punto determinado va a pasar por la existencia del plano tangente en ese punto como aproximación lineal a la función en ese punto.

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua en un punto (x_0,y_0). Calculemos cómo debería ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto dado, si éste existiese. En $\mathbb{R}^3$ un plano no vertical tiene una ecuación del tipo $z=ax+by+c$. Si el plano es tangente a la gráfica, las pendientes a lo largo de los ejes x e y deberían ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y \Rightarrow a=\partial f/\partial x(x_0,y_0)$ y $b=\partial f/\partial y(x_0,y_0)$. Determinamos la constante c imponiendo que $z=f(x_0,y_0)$.

Definicion 134 Definición de plano tangente *Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable en (x_0,y_0). El plano en $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

*se llama **plano tangente a la gráfica de** $\mathbf{f}$ **en el punto** $(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0})$.*

Llegados a este punto puede ser conveniente recordar como el polinomio de Taylor de una variable (la recta tangente) aproxima la función en ese punto, esto es:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_{1,x_0,f}(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0}=0$$

Siguiendo este razonamiento parece razonable pensar que si la función es diferenciable el plano tangente es una buena aproximación a la gráfica de la función. De manera que ya estamos en condiciones de definir la diferenciabilidad de una función de dos variables en un punto (x_0, y_0).

Definicion 135 Diferenciabilidad en dos variables *Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que f es* ***diferenciable en*** $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ *si existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ y*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$$

Ejemplo 165.- Probamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en $(0, 0)$ y calculamos el plano tangente en el origen.

Definicion 136 Gradientes *Si escribimos la matriz fila*

$$\nabla f(x_0, y_0) \equiv J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

(el correspondiente vector se llama ***gradiente*** *de f), la definición de diferenciabilidad nos da la* ***aproximación lineal*** *a f cerca de (x_0, y_0) :*

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + J_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Definicion 137 Definición de matriz jacobiana *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite todas las derivadas parciales en un punto a, llamamos* ***matriz jacobiana*** *de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en a, $Jf(a)$, a la matriz*

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j}$$

Ejemplo 166.- Calcula la matrix jacobiana de $f(x, y) = (xy, x^2 \operatorname{sen}(x), \cos(y))$ en $(1, 1)$ y en $(0, 0)$.

Definicion 138 Diferenciabilidad en un punto *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada, donde U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en $a \in U$ si $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\ \forall i, j$ y*

$$\lim_{x\to a} \frac{||f(x) - f(a) - T(x-a)||}{||x-a||} = 0, \tag{3.1}$$

donde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es $J_f(a)$.

Proposición 139 Unicidad de la aplicación diferencial *La aplicación T anterior se llama diferencial de f en a y si existe es única y se denota $Df(a)$. Si $h \in \mathbb{R}^n$,*

$$Df(a)(h) = J_f(a) \cdot h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 167.- Estudia la diferenciabilidad en $(0,0,0)$ de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2 \cos(yz)$.
Ejemplo 168.- Calcula las matrices jacobianas de: $f_1(x,y) = (e^{x+y}+y, y^2x)$, $f_2(x,y) = (x^2+\cos y, ye^x)$, $f_3(x,y,z) = (ze^x, -ye^z)$, $f_4(x,y,z) = xe^y$, $f_5(x,y) = e^{x+y}+\operatorname{sen}(xy)$.

Proposición 140 Diferenciabilidad de las componentes *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es diferenciable en a si y sólo si para cada $i = 1, \ldots, m$ f_i es diferenciable en a. En este caso, $Df(a)(h) = (Df_1(a)(h), \ldots, Df_m(a)(h))$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.*

Definicion 141 *Hiperplano tangente Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ f diferenciable en x_0. Llamamos hiperplano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ al hiperplano que tiene por ecuación*

$$x_{n+1} - f(x_0) =< \nabla f(x_0), x - x_0 >$$

Ejemplo 169.- Calcula el plano tangente de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,3)$.
Ejemplo 170.- Determina el plano tangente a la superficie $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 4$ en el punto (1,3,-1).

3.2.3. Propiedades de las funciones diferenciables

Proposición 142 Condición suficiente de diferenciabilidad *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que existen todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ y son continuas en alguna bola abierta de centro $a \in U$. Entonces f es diferenciable en a.*

Ejemplo 171.- Estudia la diferenciabilidad de $f(x,y,z) = ze^{xy}$.

Observación 23 *Parciales continuas $\Rightarrow$ Diferenciable $\Rightarrow$ Existen Parciales*

Proposición 143 *Si f diferenciable en a, entonces f es continua en a.*

Proposición 144 Relación entre la diferencial y la derivada direccional *Si f es diferenciable en a y v es un vector unitario, entonces existe $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v)$.*

Ejemplo 172.- Calcula la continuidad, la diferenciabilidad y las derivadas parciales de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Ejemplo 173.- Calcula la continuidad, la diferenciabilidad y las derivadas parciales de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ejemplo 174.- Calcula la continuidad, la diferenciabilidad y las derivadas parciales de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ejemplo 175.- Calcula la derivada direccional de $f(x,y)=(e^{x+y},\cos(xy),e^{\mathrm{sen}(x)})$ en la dirección (1,0) en el punto (0,0).

Proposición 145 Algebra de funciones diferenciables *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f+g$ y λf $(\lambda\in\mathbb{R})$ son diferenciables en a,*

$$D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a)\quad y\quad D(\lambda f)(a)=\lambda Df(a).$$

Si además, f y g son funciones con valores reales, $f\cdot g$ es diferenciable en a y f/g es diferenciable en a (siempre que $g(a)\neq 0$),

$$D(fg)(a)=g(a)Df(a)+f(a)Dg(a)$$

$$D(f/g)(a)=\frac{g(a)Df(a)-f(a)Dg(a)}{g^2(a)}.$$

Proposición 146 Regla de la cadena *Sean las funciones $f:V\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ y $g:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f(V)\subset U$. Si f es diferenciable en $a\in V$ y g es diferenciable en $f(a)\in U$, entonces $g\circ f$ es diferenciable en a y $D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\circ Df(a)$.*

Ejemplo 176.- Sea $f(x,y,z)=(3x^2yz,z^2-x^2)$ y $g(x,y)=x+y$. Calcula, si es posible $g\circ f$ y $f\circ g$. Y cuando sea posible la diferencial de la función compuesta.

Proposición 147 Fórmulas de Taylor de primer y segundo orden *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x_0 y con derivadas parciales continuas de 2º orden (3º orden), entonces:*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + R_1(h, x_0) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{R_1(h,x_0)}{||h||} = 0$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} h_i h_j \partial^2 f \partial x_j \partial x_i (x_0) + R_2(h, x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_2(h,x_0)}{||h||} = 0$$

Ejemplo: Calcula el polinomio de Taylor de 2º orden para $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$ en $x_0 = (0,0)$.

3.3. Máximos y mínimos

El objetivo de esta sección es resolver problemas de optimización formulados utilizando funciones escalares de varias variables. Empezaremos buscando máximos y mínimos de una función en todo su dominio.

Definicion 148 **Máximos y mínimos** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Decimos que $x_0 \in U$ es un* ***mínimo local*** *de f si $\exists V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in V$ y para todo $x \in V$ se tiene que $f(x) \geq f(x_0)$. Decimos que $x_0 \in U$ es un* ***máximo local*** *de f si $\exists V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in V$ y para todo $x \in V$ se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$. Decimos que x_0 es un* ***extremo local o relativo*** *si es máximo o mínimo. Decimos que x_0 es un* ***punto crítico*** *de f si $\nabla f(x_0) = 0$. Decimos que x_0 es un* ***punto silla*** *de es un punto crítico que no es extremo local. (¡Atención!).*

Teorema 149 *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $x_0 \in U$ es un extremo local, entonces $\nabla f(x_0) = 0$; esto es, x_0 es un punto crítico de f.*

Ejemplo 177.- Calcula los puntos de máximo y mínimo de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$
3. $f(x, y) = x^2y + y^2x$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Teorema 150 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 en U. Un punto (x_0, y_0) es un* ***mínimo local*** *de f siempre que se cumplan las tres condiciones siguientes:*

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$
3. $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ *en* (x_0, y_0)

Observación 24 *Si (x_0, y_0) es un* ***máximo*** *entonces en la segunda condición aparecerá < 0. Si (x_0, y_0) es un* ***punto silla*** *en la tercera condición tenemos $D < 0$ y si en la tercera aparece $D = 0$ no sabemos qué ocurre, tenemos que estudiarlo mediante métodos geométricos o analíticos. Se dice que es un* ***punto crítico degenerado****.*

Ejemplo 178.- Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones

1. Los ejemplos anteriores de esta sección.
2. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$
3. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$
4. $f(x, y) = 4y^2 - x^2y^2 - y^3$

3.3.1. Máximos y mínimos condicionados

El objetivo de esta sección es buscar máximos y mínimos de una función sujeta a una o varias restricciones.

Observación 25 Algunos métodos para resolver estos problemas

1. *Geométricos: estudio de las curvas de nivel.*
2. *Analíticos:*
   a Pasando a un problema de una variable cuando podamos.
   b Estudiando el crecimiento de la función.
3. *Multiplicadores de Lagrange.*

Ejemplo 179.-

1. Calcula máximos y minimos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la restricción siguientes: sobre $S = \{(x, y) \ : \ y - x - 1 = 0\}$.
2. Idem $f(x, y) = \frac{y}{x}$ sobre $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.
3. Idem $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ sobre $xy = 1$.
4. Idem $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ sobre $x^2 + y^2 = 1$.
5. Idem $f(x, y) = \frac{1}{y-x}$ sobre $x^2 + y^2 = 1$.

Proposición 151 Multiplicadores de Lagrange *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones* suaves *dadas. Sea $x_0 \in U$, $g(x_0) = c_0$ y sea S el conjunto de nivel de g con valor c_0. Supongamos que $\nabla g(x_0) \neq 0$. Si $f|_S$ tiene un máximo o un mínimo en x_0 entonces existe un número real λ tal que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

Proposición 152 *Varias restricciones Si S está definida por varias restricciones: $g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1$, $g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_2$, ... $g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_k$. Si f tiene un máximo o un mínimo en $x_0 \in S$ entonces existen λ_1,λ_2,...,λ_k tales que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \cdots \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

Ejemplo 180.- Los anteriores.
Ejemplo 181.- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las condiciones: $y + x = 1$ y $x + z = 1$
Ejemplo 182.- Dada la superficie $2x^2 - y^2 + 3z^2 + 4 = 0$. Determina el plano tangente a dicha superficie en el punto $(1, 3, -1)$. Encuentra el punto de dicho plano tangente que está más próximo al origen de coordenadas.

3.3.2. Máximos y mínimos absolutos

En esta sección vamos a calcular los máximos y mínimos absolutos en un determinado conjunto. Si el conjunto es compacto y la función continua por el teorema de Weiestrass estaremos seguros de que existan. En otro caso no.

Observación 26 Calculo de máximos y mínimos absolutos *Para determinar los máximos y mínimos absolutos de una función f continua sobre un conjunto C Compacto:*

1. *Buscamos los puntos críticos de f en C.*
2. *Buscamos los valores extremos de f sobre la frontera de C*
3. *El más grande de los valores obtenidos en los pasos 1 y 2 es el máximo absoluto, el más pequeño el mínimo absoluto.*

Ejemplo 183.- Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = xy$ sobre el círculo unidad.
Ejemplo 184.- Determinar los puntos donde la función $f(x, y) = x^2+y^2-xy+x+y$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto compacto: $T = \{(x, y) \; : \; x \leq 0 \; y \leq 0 \; x + y \geq -3\}$
Ejemplo 185.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 3y$$

Calcula el máximo y mínimo absoluto de esta función en el compacto C definido por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + y^2 \leq 2 \;,\; y \leq -x\}$$

Capítulo 4

Integración en una variable

4.1. Integrales indefinidas. Métodos de integración

Algunas integrales inmediatas

- $\displaystyle\int adx = ax + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = log(x) + C$
- $\displaystyle\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
- $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

Proposición 153 Propiedades de las integrales *Si f y g son funciones continuas tenemos que*

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (af)(x)dx = a\int f(x)dx$$

Integración por descomposición

Ejemplo 186.-

$$\int \frac{2x^3-3x+5}{x}dx = \frac{2}{3}x^3 - 3x + 5L|x| + C$$

Ejemplo 187.-

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

Ejemplo 188.-

$$\int \cos^2(x)dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

Ejemplo 189.-

$$\int \tan^2(x)dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - xdx = \tan x - x + c$$

Ejemplo 190.-

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \int \frac{dx}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)} = \int \frac{4dx}{1-\cos^2 2x} = \int \frac{4dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = -2\cot 2x + c$$

Proposición 154 Integración por cambio de variable *Sea $x = g(t)$ un cambio de variable con f y g' continuas entonces*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Ejemplo 191.-

$$\int (u(x))^a u'(x)dx = \frac{u(x)^{a+1}}{a+1} + c$$

Ejemplo 192.-

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos(x)dx = \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{4} + c$$

Ejemplo 193.- En $\int \sqrt{1-x^2}dx$ hacemos el cambio $x = \operatorname{sen} t$, de manera que $dx = \cos tdt$. Finalmente deshacemos el cambio. Esto es:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 tdt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Ejemplo 194.- **Importante** Un cambio muy habitual y que suele resolver integrales trigonométricas es

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

en este caso tenemos que

$$x = 2\arctan x, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{3+5\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1}{4-t^2}dt = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{2-t} + \int \frac{dt}{2+t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln|2-t| + \ln|2+t|\right) + c = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\right) + c = \ln\sqrt[4]{\left|\frac{2+t}{2-t}\right|} + c$$

Proposición 155 Integración por partes *Sean u,v funciones con derivadas continuas entonces tenemos que*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 195.- En la siguiente integral elijo $u = \log(x)$ y $dv = dx$, de manera que $du = \frac{dx}{x}$ y $v = x$, entonces

$$\int \log(x)dx = x\log(x) - \int x\frac{dx}{x} = x\log(x) - x + c$$

Ejemplo 196.- En la siguiente integral elijo $u = x$ y $dv = \sin xdx$, (ya que el seno y el coseno son funciones periódicas) de manera que $du = dx$ y $v = -\cos x$, entonces

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c$$

Integración por reducción o recurrencia

Ejemplo 197.- Aquí tanto las funciones trigonométricas como la exponencial no me van a permitir simplificar la integrar fácilmente. De hecho, lo que me va a ocurrir es que voy a volver a la integral inicial y entonces lo que haremos será despejar la expresión. Elijo $x = u$ y $dv = \sin xe^x dx$. De manera que para resolver esta integral,

$$I_1 = \int x\sin(x)e^x dx$$

resuelvo primero

$$I_2 = \int \sin(x)e^x dx$$

para resolver esta elijo $u = \operatorname{sen}(x)$ y $dv = e^x dx$, de manera que $du = \cos(x)dx$ y $v = e^x$, entonces

$$I_2 = \int \sin(x)e^x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \cos x e^x dx$$

Así que me aparece una similar a la inicial que resolvemos con unas partes similares a las anteriores: $u = \cos(x)$ y $dv = e^x dx$, entonces

$$I_3 = \int \cos x e^x dx = \cos x e^x + \int \operatorname{sen}(x)e^x dx$$

que es mi integral anterior. Ponemos las dos expresiones juntas y obtenemos

$$I_2 = e^x \operatorname{sen} x - e^x - \cos x e^x - I_2$$

$$I_3 = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I_3$$

Despejando obtenemos

$$I_2 = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + c$$

$$I_3 = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$$

De manera que nuestra integral inicial es

$$I_1 = \int x\sin(x)e^x dx = x\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int \sin(x)e^x dx = \frac{x-1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + c$$

Proposición 156 *Integración de funciones racionales Suponemos que lo que tenemos que integrar es una del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ con el grado de $p(x)$ menor que el de $q(x)$ y sin raices comunes . (Si no, efectuamos la división y pensamos en el resto). Empezaremos encontrando los factores irreducibles del denominador y después expresamos la integral como integrales de fracciones simples.*

Ejemplo 198.-

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx = \int \frac{x^2+x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \ln|x-2| + \arctan x + C.$$

Ejemplo 199.-

$$\int \frac{5x^2-17}{x^4-3x^3+x-3}dx = \int \frac{5x^2-17}{(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}dx =$$

$$\int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{5-2x}{x^2-x+1}dx =$$

$$\int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + 4\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = (*)$$

Hacemos aparte esta última integral integral

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}dx =$$

$$\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}dx =$$

$$\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Resolviendo ahora todos los factores tenemos que la integral inicial es

$$(*) = \ln|x-3| + \ln|x+1| - \ln|x^2-x+1| + \frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + C$$

El objetivo del método de Hermite es simplificar el cálculo de integrales de funciones racionales

Proposición 157 Método de Hermite *El método de Hermite puede utilizarse para simplificar las cuentas en el caso en que $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ el denominador tiene una o varias raíces de multiplicidad mayor que uno, en ese caso descompondremos la integral en un primer sumando compuesto en el numerador por el polinomio desconocido $s(x)$ de un grado menor que el denominador que construyamos y en el denominador un polinomio que se ha obtenido de $q(x)$ rebajando el grado de todos sus factores una unidad. Los sumando restantes son los necesarios para completar $q(x)$.*

Ejemplo 200.-

$$\int \frac{dx}{x^5+4x^4+8x^3+8x^2+4x} = \int \frac{dx}{x(x^2+2x+2)^2}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^5+4x^4+8x^3+8x^2+4x} = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \int \frac{\tilde{A}}{x}dx + \int \frac{\tilde{B}x+\tilde{C}}{x^2+2x+2}dx$$

4.2. Integral de Riemann

Definicion 158 Particiones, sumas superiores e inferiores *Sea $a < b$. Recibe el nombre de **partición** del intervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b. Se suelen numerar $t_0, t_1, \cdots, t_n$ de manera que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Supongamos que f es acotada sobre $[a, b]$ $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Sea $m_i = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$. Definimos la **suma inferior de f para** P como*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

*Definimos la **suma superior de f para** P como*

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Pregunta 3.-

1. ¿Hace falta que la función sea continua?
2. ¿Qué relación hay entre la suma superior y la suma inferior para una partición dada?
3. ¿Qué relación hay entre las sumas superiores e inferiores para dos particiones que difieren sólo en un punto?
4. ¿Qué relación hay entre todas las sumas superiores e inferiores para cualquier partición?

Pregunta 4.-¿Qué relación hay entre el ínfimo de las sumas superiores ($\sup \mathcal{L}$) y el supremo de las sumas inferiores ($\text{ínf}\,\mathcal{U}$)?

Definicion 159 Definición de función integrable *Una función f acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si $\sup \mathcal{L} = \text{ínf}\,\mathcal{U}$. En este caso a este número se le llama **integral** de f sobre $[a, b]$ y se le denota por $\displaystyle\int_a^b f$.*

Observación 27 *Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f$ corresponde al **área** encerrada entre la función f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.*

Definicion 160 Definición alternativa de función integrable *Si f está acotada sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que*

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Ejemplo 201.- Utilizando particiones del intervalo y sumas superiores e inferiores estudia si la siguiente función es integrable: $\int_0^2 f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

Ejemplo 202.- Idem $\int_0^1 xdx$, $\int_0^b xdx$, $\int_a^b xdx$.
Ejemplo 203.- Idem $\int_0^1 x^2dx$.
Ejemplo 204.- Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k}$$

4.2.1. Propiedades de la integral de Riemann

Teorema 161 *Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$.*

Teorema 162 *Sea f una función integrable sobre $[a,b]$ entonces dado $c \in (a,b)$ tenemos que f es función integrable sobre $[a,c]$ e integrable sobre $[c,b]$. Recíprocamente si f es función integrable sobre $[a,c]$ e integrable sobre $[c,b]$ entonces f es una función integrable sobre $[a,b]$.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema 163 *Sean f y g funciones integrables sobre $[a,b]$ entonces $f+g$ es integrable sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 164 *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces cf es integrable sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 165 *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Teorema 166 *Dada una función integrable f sobre $[a,b]$ definimos una nueva función $F(x)$ sobre $[a,b]$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

F así definida es continua en $[a,b]$.

4.2.2. Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 167 Teorema Fundamental del Cálculo *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y definimos F sobre $[a,b]$ por $F(x) = \int_a^x f$. Si f es continua en $c \in [a,b]$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Corolario 168 Regla de Barrow *Si f continua en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Observación 28 *El corolario anterior se da también con f integrable.*

Ejemplo 205.- Sea $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$ con g, h derivables y f continua. Demuestra que F es derivable y calcula su derivada.
Ejemplo 206.- Calcula la derivada de $F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}(t)dt$.
Ejemplo 207.- Idem $G(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2t^2))dt$.

4.3. Integrales impropias

Definicion 169 Integrales en intervalos infinitos *Si $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo $t \geq a$, entonces*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Si $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo $t \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_t^b f(x)dx$$

*Se dice que las **integrales impropias** son **convergentes** si existen los límites y **divergen** si no existen.*

Observación 29 *En general $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$, valor principal*

Ejemplo 208.- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$.
Ejemplo 209.- $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.
Ejemplo 210.- $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$.
Ejemplo 211.- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.
Ejemplo 212.- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$.

Definicion 170 Integrales de funciones con discontinuidad *Si f es continua en $[a,b)$ y es discontinua en b, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Si f es continua en $(a,b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

*Se dice que las **integrales impropias** son **convergentes** si existen los límites y **divergen** si no existen.*

Observación 30 *Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$ y tanto $\int_a^c f(x)dx$ como $\int_c^b f(x)dx$ son convergentes entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo 213.- $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.
Ejemplo 214.- $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.
Ejemplo 215.- $\int_0^1 \ln x dx$.

Proposición 171 Criterio de comparación *Supongamos que f y g son funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.*

(1) Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ también lo es.

(2) Si $\int_a^\infty g(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ también lo es.

Ejemplo 216.- $\int_a^\infty e^{-x^2} dx$.
Ejemplo 217.- $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx$.

4.4. Aplicaciones de la integral

Problema: Volumen de un sólido de revolución El objetivo de este problema es encontrar una fórmula para el volumen de un sólido de revolución. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, con $f \geq 0$. Sea S el sólido que se obtiene al girar la gráfica de f alrededor del eje x.

(i) Dibuja S.

(ii) Con las nociones habituales de partición, de mínimo m_i y máximo M_i en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ que hemos visto, construye un cilindro C_i superior a partir de girar alrededor del eje x el rectángulo superior, R_i, con base de t_{i-1} a t_i y de altura M_i, y el otro inferior c_i, similar con el r_i correspondiente, de manera que C_i quede por fuera de S en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y c_i por dentro. Dibujalos.

(iii) Calcula los volúmenes de los cilindros anteriores c_i y C_i.

(iv) Da una estimación del volumen de S.

(v) Utiliza el resultado anterior para calcular el volumen de una esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y de radio r.

Problema: Longitud de arco El objetivo de este problema es encontrar una fórmula para la longitud de arco de una curva. Sea C una curva definida por las ecuaciones paramétricas $(x(t), y(t))$ sobre el intervalo $[a, b]$ con $x(t), y(t)$ funciones C^1.

(a) Considera una partición P del intervalo, con n subintervalos. Construye la poligonal formada por los puntos del plano $(x(t_i), y(t_i))$ siendo los $t_i \in P$. Dibuja la gráfica de la función y la poligonal.

(b) Calcula la suma de las longitudes de los tramos de la poligonal. Recuerda el teorema del valor medio.

(c) Calcula el límite de la suma anterior cuando n tiende a infinito.
(d) Da una fórmula para la longitud de la curva de a a b. Y aplica dicha fórmula para calcular la longitud de una circunferencia de radio 3.

Proposición 172 Area de figuras planas dada en coordenadas cartesianas

- *Sea $f \geq 0$ una función continua, entonces el área A encerrada entre $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por $A = \int_a^b f(x)dx$*
- *Sea $g \geq 0$ una función continua, entonces el área A encerrada entre $x = g(x)$, el eje y y las rectas $y = a$ y $y = b$ viene dada por $A = \int_a^b g(y)dy$*
- *En general, el área A encerrada entre $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ en $a \leq x \leq b$ viene dada por $A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx$*

Ejemplo 218.- Halla el área comprendido entre $y = x^2$, $x = 1$, $x = 3$ y el eje de abscisas.
Ejemplo 219.- Idem entre $x = 2 - y - y^2$ y el eje de ordenadas.
Ejemplo 220.- Area encerrada entre $f_1(x) = 2 - x^2$ y $f_2(x) = x^{2/3}$

Proposición 173 Area de figuras planas dada con ecuaciones paramétricas *Si la curva continua viene dada por las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$ Entonces el área A comprendida entre la curva el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por la expresión:*

$$A = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \psi(t)\varphi'(t)dt$$

Ejemplo 221.- Halla el área de la elipse dada por las ecuaciones $\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t), \end{cases}$

Proposición 174 Area de figuras planas dada en coordenadas polares *Si la curva continua viene dada en coordenadas polares por una ecuación de la forma $r = f(\theta)$, entonces el área A comprendida entre dos ángulos α y β y la curva $r = f(\theta)$ viene dada por la expresión:*

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta$$

Ejemplo 222.- Halla el área de la figura limitada por la lemniascata de Bernouilli, $r^2 = a^2\cos(2\theta)$

Proposición 175 Longitud del arco en coordenadas rectangulares *La longitud s del arco de una curva regular $y = f(x)$ comprendida entre dos puntos cuyas abscisas son $x = a$ y $x = b$ es igual a*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Ejemplo 223.- Halla la longitud del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Proposición 176 Volúmenes de revolución *Sea $y = f(x)$ con $f \geq 0$, $a \leq x \leq b$ y consideramos el área A encerrada entre la gráfica de la función, las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces el volumen V_x del sólido que se obtiene al girar el área A alrededor del eje x viene dada por la expresión*

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$

Por otra parte el volumen V_y del sólido que se obtiene al girar el área A alrededor del eje y viene dado por la expresión

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y(x) dx$$

Algunas aplicaciones físicas

La **distancia** s recorrida por un móvil que va a una velocidad $v(t)$ desde un tiempo t_0 a un tiempo t_f es $s = \int_{t_0}^{t_f} v(t)dt$.

El **Trabajo** W realizado al mover un objeto de peso f(x) de a hasta b viene dado por : $W = \int_a^b f(x)dx$

La **masa** m de una placa cuyo borde viene dado por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dado por $m = \int_a^b \rho f(x)dx$, siendo ρ la densidad.

Apéndice A

Examen Final Enero 2011

Problema 60.- Este primer ejercicio consta de 20 apartados. En cada uno de ellos se ofrecen varias opciones y solo una es correcta. Cada acierto se puntúa con $0,5$ puntos y cada error con $-0'25$ puntos. Los apartados que no sean contestados serán evaluados con 0 puntos. De este modo, la puntuación de este primer ejercicio se situará entre 10 puntos y -5 puntos.

$\boxed{1}$ El dominio de la función $f(x) = \log\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|$ es

✓ $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$ ☐ $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ ☐ $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

$\boxed{2}$ La recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en el punto $(1,\sqrt{2})$ es

☐ $y = 3(x-1)$ ✓ $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$ ☐ $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

$\boxed{3}$ Sea un sistema S de ecuaciones lineales $AX = b$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces el sistema es:

☐ compatible determinado ✓ compatible indeterminado dependiente de un parámetro

☐ incompatible ☐ compatible indeterminado dependiente de dos parámetros

$\boxed{4}$ Si A y B son dos matrices invertibles de tamaño n, entonces $A\cdot B$

✓ siempre es invertible ☐ nunca es invertible ☐ depende de n

$\boxed{5}$ La derivada de la función $f(x) = \log\left(\cos^2\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)$ es

☐ $\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}$ ✓ $-\dfrac{8x}{(x^2+1)^2}\tan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ ☐ $\dfrac{-\frac{8x}{(x^2+1)^2}}{\cos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}$

$\boxed{6}$ La derivada de la inversa de la función $f(x) = x^3$ en $x \neq 0$ es

☐ $3x^2$ ☐ $\sqrt[3]{x}$ ✓ $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$ ☐ $\dfrac{1}{3x^2}$

$\boxed{7}$ Consideramos la sucesión $\dfrac{5-n}{n+3}$. A partir de qué término a_N todos los siguientes términos de la sucesión distan menos que $0{,}25$ de su límite.

☐ $N = 5$ ✓ $N = 29$ ☐ $N = 10$

$\boxed{8}$ Si f es derivable en $x = a$ y g no es derivable en $x = a$ entonces

☐ $f + g$ es derivable en $x = a$ ✓ $f + g$ no es derivable en $x = a$ ☐ $f+g$ a veces es derivable en $x = a$ y otras no

$\boxed{9}$ Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

☐ $f(0) = 0$ ☐ $f'(0) = 3$ ✓ $f''(0) = 6$

$\boxed{10}$ La serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3n!x^n$ converge en

✓ $x = 0$ ☐ $(-3, 3)$ ☐ $(-\infty, \infty)$

$\boxed{11}$ El polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = x^3e^x$ en el punto $x = 0$ es

✓ $x^3 + x^4$ ☐ $P(x) = \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}$ ☐$P(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4$ ☐ ninguno de ellos

$\boxed{12}$ Sea $z(x, y)$ la función definida implícitamente en un entorno del punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Entonces la $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ es

☐ $\dfrac{1}{2}$ ✓ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ -1 ☐ ninguna de ellas

$\boxed{13}$ El $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ es

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ✓ no existe

$\boxed{14}$ La derivada direccional de $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ en la dirección $(1, 0)$ en el punto $(1, 1)$ es

☐ 0 ☐ 1 ✓ $2e^2$ ☐ ninguna de ellas

$\boxed{15}$ El plano tangente de $z = x^2 + y^3$ en el punto $(3, 1, 10)$ es

☐ $z = 6x + 3y + 21$ ☐ $z - 10 = 6x + 3y$ ✓ $6x + 3y - z = 11$ ☐ ninguno de ellos

$\boxed{16}$ La función $f(x, y) = y^4 + x^2 + 32y$ tiene en el $(0, -2)$

☐ un máximo ✓ un mínimo ☐ un punto silla ☐ $(0,-2)$ no es punto crítico de f

$\boxed{17}$ Las curvas de nivel de la función $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ son
✓ circunferencias ☐ parábolas ☐ rectas ☐ hipérbolas.

$\boxed{18}$ El límite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^5} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ es

☐ 1 ✓ $\dfrac{1}{5}$ ☐ ∞ ☐ 0

$\boxed{19}$ Si f es integrable en $[a,b]$ entonces f en $[a,b]$ es
☐ continua ✓ acotada ☐ derivable ☐ creciente

$\boxed{20}$ Sea $f : [-1,4] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $1 \leq f(x) \leq 3$, $x \in$ dominio de f, entonces
☐ $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(s)ds \leq 5$ ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(s)ds \geq 15$ ✓ $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(s)ds \leq 15$ ☐ ninguna de ellas

Problema 61.- a)(**2 puntos**) Probar que si una matriz $A \in M_{n\times n}$ verifica $A^2 - 3A + I = O$, entonces

$$A^{-1} = 3I - A.$$

b)(**3 puntos**) Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

c)(**5 puntos**) Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$

calcular una matriz $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $P \cdot A = B \cdot P$.

Solución a) Suponemos que existe la inversa de A, A^{-1}, entonces multiplicamos la igualdad que verifica A por A^{-1}

$$A^{-1}A^2 - 3A^{-1}A + A^{-1}I = A^{-1}O, \quad \Rightarrow \quad A - 3I + A^{-1} = O$$

de manera que despejando A^{-1} obtenemos la igualdad pedida

$$A^{-1} = 3I - A.$$

y comprobamos que es la inversa, esto es que: $A(3I - A) = I$ y $(3I - A)A = I$.

b) Dada una matriz cuadrada cualquiera M podemos escribirla como

$$M = \frac{M + M^t}{2} + \frac{M - M^t}{2}$$

donde M^t es la matriz traspuesta de M. Ahora comprobamos que $\dfrac{M + M^t}{2}$ es una matriz simétrica, esto es, coincide con su traspuesta. Utilizando las propiedades de las matrices traspuestas tenemos que

$$\left(\frac{M + M^t}{2}\right)^t = \frac{M^t + (M^t)^t}{2} = \frac{M + M^t}{2}$$

de manera similar

$$\left(\frac{M - M^t}{2}\right)^t = \frac{M^t - (M^t)^t}{2} = -\frac{M - M^t}{2}$$

y hemos expresado la matriz M como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

c) Si P es invertible entonces $A = P^{-1}BP$. Calculamos la inversa de P, P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que A será $A = P^{-1}BP$, esto es

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -13 & -9 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \\ 6 & 10 & 7 & -1 \\ -3 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 62.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que g esta definida por $g(x) = \displaystyle\int_1^x tf(t)\,dt$, y donde la función f es tal que $f(3) = 0$ y $f'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(i) Determina el signo de $g(3)$ y $g(0)$.

(ii) Justifica por qué g es una función dos veces derivable.

(iii) Calcula la recta tangente a la gráfica de g para $x = 3$.

(iv) Halla y clasifica los extremos relativos de g.

(v) Estudia razonadamente el número de soluciones de la ecuación $g(x) = 0$.

Solución Lo primero que observamos es el signo de la función f. Como $f'(t) > 0$ sabemos que f es creciente en $\mathbb{R}$ y como $f(3) = 0$ tenemos que f en el intervalo $(-\infty, 3)$ es negativa y positiva en $(3, \infty)$.

(i) Para determinar el signo de $g(3)$ observamos que $g(3) = \displaystyle\int_1^3 tf(t)\, dt$, como en el intervalo $(1, 3)$ tenemos que el producto $tf(t)$ es negativo tenemos que la integral en ese intervalo será negativa, de manera que $g(3) < 0$. Por otra parte observamos que

$$g(0) = \int_1^0 tf(t)\, dt = -\int_0^1 tf(t)\, dt$$

como en $(0, 1)$ el producto $tf(t)$ sigue siendo negativo la integral es negativa pero $g(0) > 0$.

(ii) Observamos que g es dos veces derivable ya que $g'(x) = xf(x)$ y $g''(x) = f(x) + xf'(x)$ que sabemos que existe por los datos del problema.

(iii) Tenemos que $g'(3) = 3f(3) = 0$ de manera que la tangente en $x = 3$ a la gráfica de la función g es una recta horizontal de altura $g(3)$, esto es, $y = g(3)$.

(iv) Calculamos los puntos críticos de g, esto es: $g'(x) = 0$ o lo que es lo mismo $xf(x) = 0$, esto es $x = 0$ o bien $f(x) = 0$. Como hemos visto al principio del problema, por ser f monótona, el único punto donde $f(x) = 0$ es en $x = 3$. Luego los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 3$. Para clasificarlos vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento de g:

en $(-\infty, 0)$ $g'(x) = xf(x) > 0$, luego g es creciente

en $(0, 3)$ $g'(x) = xf(x) < 0$, luego g es decreciente

en $(3, \infty)$ $g'(x) = xf(x) > 0$, luego g es creciente

de manera que en $x = 0$ la función g tiene un máximo y en $x = 3$ la función g tiene un mínimo.

También podemos clasificar los puntos críticos estudiando la segunda derivada esto es: $g''(0) = f(0) < 0$, entonces en $x = 0$ tenemos un máximo y por otro lado $g''(3) = 3f'(3) > 0$, entonces en $x = 3$ tenemos un mínimo. Además observando la segunda derivada tenemos que existe un único punto de inflexión x_i para g entre $(0, 3)$, de manera que la función g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, x_i)$ y cóncava hacia arriba en (x_i, ∞).

(v) Por ser la función g continua y con los intervalos de crecimiento y concavidad estudiados en el apartado anterior, tenemos que g viene de valores negativos cuando viene de $-\infty$ y que alcanza valores positivos cuando crece a $+\infty$, de manera que por el teorema de Bolzano vamos a tener 3 soluciones para la ecuación

$g(x) = 0$ una entre $(-\infty, 0)$, otra entre $(0, 3)$, esta se ve que está en $x = 1$ y la última entre $(3, \infty)$.

Problema 63.- Determina los puntos de la curva intersección de las superficies de $\mathbb{R}^3$ $S_1 : x^2 - y = 0$ y $S_2 : y + z = 1$ que distan menos del origen de coordenadas de $\mathbb{R}^3$.

Solución La función que tenemos que minimizar es la función distancia al origen, esto es:

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{consideramos} \quad f(x, y, z) = d^2(x, y, z)$$

sujeta a las restricciones:

$$g_1(x, y, z) = x^2 - y \qquad g_2(x, y, z) = y + z - 1$$

para calcular los posibles puntos de mínimo planteo las ecuaciones de multiplicadores de Lagrange como los gradiente de la funcion y las restriciiones son:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \qquad \nabla g_1(x, y, z) = (2x, -1, 0) \qquad \nabla g_2(x, y, z) = (0, 1, 1)$$

planteamos el sistema

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z)$$

que junto las restricciones $x^2 - y = 0$ y $y + z = 1$ nos da el sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda_1 2x \\ 2y = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2z = \lambda_2 \\ x^2 - y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y tenemos tres posibles soluciones:

$$(0, 0, 1) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \qquad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

evaluamos la función en estos puntos

$$f(0, 0, 1) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8} \qquad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

de manera que los puntos donde se alcanza el mínimo son dos

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \qquad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Problema 64.- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y monótona.

(A) Demuestra que

(A.1.) (2 *puntos*)

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \right] = 0$$

(A.2.) (2 *puntos*)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} < \infty$$

(B) (6 *puntos*) En particular, prueba que el siguiente límite existe y calcula su valor:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$$

Solución Para el desarrollo de la solución vamos a suponer que la función f es creciente. Si fuese decreciente se haría de forma similar.
(A.1) Observamos que si f es creciente entonces $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = U(f, P_n)$ donde P_n es una partición regular del intervalo $[0,1]$. Y que $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = L(f, P_n)$. Como f es una función continua entonces es integrable de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[U(f, P_n) - L(f, P_n)\right] = 0$$

(A.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$

que como f es continua es integrable y nos da un número $< \infty$.

(B)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(\frac{n}{n}+\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Apéndice B

Examen Final Julio 2011

Problema 65.- Este primer ejercicio consta de 20 apartados. En cada uno de ellos se ofrecen varias opciones y solo una es correcta. Cada acierto se puntúa con $0,5$ puntos y cada error con $-0'25$ puntos. Los apartados que no sean contestados serán evaluados con 0 puntos. De este modo, la puntuación de este primer ejercicio se situará entre 10 puntos y -5 puntos.

$\boxed{1}$ Describe el subconjunto de números reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|1-x|} > 0$

☐ $\emptyset$ ☐ $(-\infty, \frac{1}{2})$ ✓ $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

$\boxed{2}$ Si A y B son invertibles, entonces $A + B$

☐ siempre es invertible ✓ no siempre es invertible ☐ nunca es invertible

$\boxed{3}$ Sea un sistema S de ecuaciones lineales $AX = b$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces el sistema es:

☐ compatible determinado ☐ compatible indeterminado dependiente de un parámetro

✓ incompatible ☐ compatible indeterminado dependiente de dos parámetros

$\boxed{4}$ El dominio de la función $f(x) = \log \left| \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|$ es

✓ $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ ☐ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ☐ $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$\boxed{5}$ La recta tangente a la gráfica de $f(x) = \cos(x)$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ es

☐ $y = 1$ ☐ $y = \frac{\pi}{2}(x - 1)$ ✓ $2y + 2x = \pi$

$\boxed{6}$ El conjunto de números reales donde la función $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x^2+4)}$ es continua es

☐ $\mathbb{R}\setminus\{1,-1,2,-2\}$ ✓$\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ ☐ $\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ no es ninguno de ellos

$\boxed{7}$ Sea $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$. La derivada de la composición $f\circ g$ es

☐ $\cos\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ ☐ $\dfrac{1}{\cos(x)}$ ✓ $-\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $-\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos(x)$

$\boxed{8}$ La serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{5^n}$ converge en

✓ $(-1,9)$ ☐ $(-1,1)$ ☐ $(-4,5)$ ☐ ninguno de ellos

$\boxed{9}$ El polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x)=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ en el punto $x=0$ es

☐ $P(x)=\frac{1}{2}(1+x+x^2+x^3+x^4)$ ✓ $P(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$ ☐ $P(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$

$\boxed{10}$ El polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto $x=0$ es

☐ $p(x)=3+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ ☐ $p(x)=1+x-x^2+x^3$ ✓ $p(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$

$\boxed{11}$ El límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ es

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ✓ no existe

$\boxed{12}$ En coordenadas esféricas la superficie $\phi=c$, con $c\in\mathbb{R}$ constante, corresponde a

☐ una esfera ☐ un cilindro ✓ un cono ☐ un plano

$\boxed{13}$ El gradiente de la función $f(x,y,z)=ze^{x^2+y^2}$ en el punto $(0,0,1)$ es

✓ $(0,0,1)$ ☐ $(e,e,1)$ ☐ $(e,0,e)$ ☐ ninguno de ellos

$\boxed{14}$ La función $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{x+y}), & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$ es

✓ continua en $(0,0)$ ☐ discontinua en $(0,0)$ ☐ discontinua en $(1,1)$

$\boxed{15}$ La función $f(x,y)=xy-x^3y-xy^3$ tiene en el $(0,0)$

☐ un máximo ☐ un mínimo ✓ un punto silla ☐ $(0,0)$ no es punto crítico de f

$\boxed{16}$ La matriz jacobiana de la función $f(x,y,z)=(\log(xy),\operatorname{sen}(x-z))$ en el punto $(1,1,1)$ es

☐ $(0,0)$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ ninguna de ellas

(17) Las curvas de nivel de la función $f(x,y) = e^{x+y}$

☐ circunferencias ☐ parábolas ✓ rectas ☐ hipérbolas.

(18) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean P_1 y P_2 particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P_1 \subseteq P_2$. Entonces

☐ $U(f,P_1) \leq L(f,P_2)$ ☐ $U(f,P_2) \geq U(f,P_1)$ ✓ $U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$

(19) Sea $G(x) = \displaystyle\int_2^{1+x^2} \cos(3t)dt$ entonces

☐ $G'(x) = 6x \operatorname{sen} 3(1+x^2)$ ✓ $G'(x) = 2x \cos 3(1+x^2)$ ☐ $G'(x) = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} 3(1+x^2) - \operatorname{sen} 6\right]$

(20) Una $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}dt$ es

☐ $\arctan(e^t)$ ☐ $\dfrac{e^t}{(1+e^{2t})^2}$ ✓ $\dfrac{1}{2}\log(1+e^{2t})$ ☐ ninguna de ellas

Problema 66.- Discute y resuelve cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & +ax_2 & +ax_3 & +ax_4 & +ax_5 & = a \\ ax_1 & +x_2 & +ax_3 & +ax_4 & +ax_5 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +x_3 & +ax_4 & +ax_5 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & +x_4 & +ax_5 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & +ax_4 & +x_5 & = a \end{cases}$$

Solución. Escribimos el sistema en su forma matricial y a cada fila le restamos la anterior quedando el sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a & a \\ a & 1 & a & a & a & a \\ a & a & 1 & a & a & a \\ a & a & a & 1 & a & a \\ a & a & a & a & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a & a \\ a-1 & 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

Suponemos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$ de manera que dividimos por $a-1$ las filas de la 2 a la 5 y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De las ecuaciones 2 a 5 obtenemos que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, introduciendo esto en la ecuación 1 tenemos que $x_1(1+4a) = a$ de manera que si suponemos también que $\mathbf{a} \neq -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ tenemos que el **sistema es compatible determinado** y su solución es:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{a}{1+4a}$$

Por otra parte si $\mathbf{a} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ tenemos que en la ecuación 1 del sistema que $0 = -\frac{1}{4}$ de manera que el **sistema es incompatible**.

Y finalmente nos queda por estudiar el caso $\mathbf{a} = \mathbf{1}$. Si sustituimos este valor en el sistema inicial obtenemos la única ecuación: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ de manera que nos queda un **sistema compatible indeterminado dependiente de 4 parámetros**, siendo una posible parametrización de la solución:

$$x_5 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2, \quad x_3 = \lambda_3, \quad x_2 = \lambda_4 \qquad x_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$$

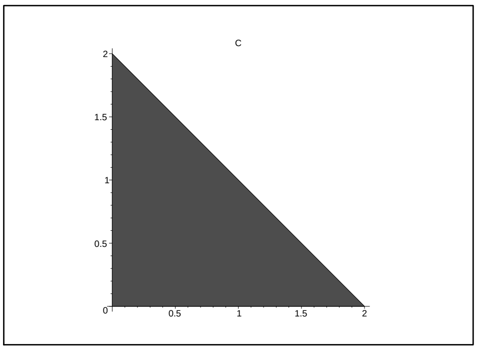
Problema 67.- Sea la función $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2\sqrt{y}$$

Obtén los puntos en los que f alcanza sus extremos absolutos sobre la región

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2\}$$

Solución. Tenemos que calcular los máximos y mínimos de la función f sobre el conjunto C.



De manera que como f es continua sobre C y C es un compacto, por el teorema de Weierstrass sabemos que f alcanzará máximo y mínimo en C. Empezamos calculando los puntos críticos de f en el interior de C.

$$\nabla f(x,y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)$$

de manera que resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x\sqrt{y} = 0 \\ \frac{x^2}{2\sqrt{y}} = 0 \end{cases}$, los puntos críticos están justamente en el borde de C. Son los puntos de la forma $(0,y)$. Estudiamos el hessiano:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ \frac{x}{\sqrt{y}} & \frac{x^2}{4\sqrt{y^3}} \end{pmatrix} \qquad H(0,y) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que el Hessiano no decide pero lo que observamos es que $f(0,y) = 0$, $f(x,0) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$. Vamos a estudiar ahora el borde que nos falta: $y = 2 - x$. Consideramos la función $g(x) = f(x, 2-x) = x^2\sqrt{2-x}$, la derivamos $g'(x) = \dfrac{8x - 5x^2}{2\sqrt{2-x}}$. Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = \dfrac{8}{5}$ para saber si son máximos o mínimos calculamos la segunda derivada: $g''(x) = \dfrac{32 - 48x + 15x^2}{4\sqrt{(2-x)^3}}$, de manera que $g''(0) = 2\sqrt{2} > 0$ luego es un mínimo relativo y $g''\left(\dfrac{8}{5}\right) = -2\sqrt{10} < 0$ luego es un máximo relativo. Resumiendo tenemos que en los bordes $(0,y)$ y $(x,0)$ con x e y variando entre 0 y 2 tenemos los valores mínimos absolutos de la función, mientras que en el punto $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ tenemos el máximo absoluto de f.

Problema 68.- a) Consideramos la serie de potencias siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+6}}{4n+6}$$

Encuentra su radio de convergencia y expresa su suma en términos de funciones conocidas.

b) Suma la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{4n+8}}{4^{2n+4}(2n+4)(4n+6)}$$

Solución a) Consideramos la serie de potencias siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+6}}{4n+6}$$

Utilizando el criterio del cociente obtenemos que $R = 1$. Por otra parte, observamos que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+5} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n = \frac{x^5}{1+x^4}$$

De manera que:

$$f(x) = \int \frac{x^5}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \arctan x^2\right)$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{4n+8}}{4^{2n+4}(2n+4)(4n+6)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^{2n+4}}{4^{2n+4}(2n+4)(4n+6)} = g\left(\frac{9}{4}\right)$$

con

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+4}}{(2n+4)(4n+6)}$$

de manera que

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(4n+6)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{x})^{4n+6}}{(4n+6)} = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right)$$

entonces

$$g(x) = \int \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right)dx = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2x\arctan(x) + \ln(x^2+1)\right)$$

Problema 69.- En el tiempo $t = 0$ un móvil empieza a moverse sobre el eje X con una velocidad $v(t) = \frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}$ $(t \geq 0)$. Determina:

1. (*4 puntos*) El espacio total recorrido por el móvil en $t = 2$.

2. (*3 puntos*) La posición a la que tenderá cuando $t \to \infty$.

3. (*3 puntos*) La velocidad media en el intervalo $[0, 2]$.

Solución Empezamos encontrando una primitiva de v, esto es, separando en fracciones simples:

$$\int \frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}dt = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{tdt}{1+t^2} = \ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + K$$

1. El espacio total recorrido en $t = 2$, como v es positiva para $t \in (0, 1)$ y negativa en $t \in (1, 2)$, vendrá dado por

$$s = \int_0^1 \frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}dt - \int_1^2 \frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}dt = \left(\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)_0^1 -$$

$$-\left(\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)_1^2=\frac{1}{2}\ln 2-(\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 2)=\ln 2-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 5=\ln\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$$

2. La posición final en un tiempo infinito vendrá dada por la integral impropia:

$$P_\infty=\int_0^\infty \frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}dt=\lim_{b\to\infty}\left(\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln(1+b)-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)=\ln\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}\right)=\ln 1=0$$

Es decir, en un tiempo infinito se vuelve al origen.

3. La velocidad media viene dada por la expresión:

$$v_m=\frac{1}{2}\int_0^2 v(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1-t}{t^3+t^2+t+1}dt=\left(\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln 5-\ln 3\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Apéndice C

Examen Final Enero 2012

Problema 70.- Este primer ejercicio consta de 20 apartados. En cada uno de ellos se ofrecen varias opciones y solo una es correcta. Cada acierto se puntúa con $0{,}5$ puntos y cada error con $-0{,}25$ puntos. Los apartados que no sean contestados serán evaluados con 0 puntos. De este modo, la puntuación de este primer ejercicio se situará entre 10 puntos y -5 puntos.

1 Marca el intervalo que coincide con el subconjunto de números reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-7| < 11$:

☐ $(4, 18)$ ☐ $(-11, 11)$ ✓ $(-4, 18)$ ☐ $(-7, 11)$ ☐ no es ninguno de ellos

2 Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $t(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces $(S \circ t \circ P)(x)$ es

☐ $2^{\operatorname{sen}^2 x}$ ☐ $\operatorname{sen} 2^{2x}$ ✓ $\operatorname{sen}^2 2^x$ ☐ $x^2 \operatorname{sen} x 2^x$

3 La recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$ en el punto $(2, 1)$ es

☐ $y = x + 1$ ☐ $y = 1 - x$ ☐ $y + x - 3 = 0$ ✓ $y - x + 1 = 0$

4 El dominio de la función $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

☐ es $(-1, 1)$ ✓ es $\mathbb{R}$ ☐ es $(-\infty, -1)$ ☐ es $(0, +\infty)$ ☐ Ninguno de los anteriores.

5 Sea un sistema S de ecuaciones lineales $AX = b$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ y $b =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces el sistema es:

☐ compatible determinado ✓ compatible indeterminado dependiente de un parámetro

☐ incompatible ☐ compatible indeterminado dependiente de dos parámetros

6 Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, entonces su derivada lateral por la derecha en $x = 3$ es

✓ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $-\infty$ ☐ 6

7 El límite de la sucesión de término general $a_n = \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{2n+1}{4n-3}\right)\right)$ es

☐ 0 ☐ $\operatorname{sen}(\ln 2)$ ✓ $-\operatorname{sen}(\ln 2)$ ☐ no tiene límite.

8 En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$.

☐ $x = 2$ ✓ $x = \ln 2$ ☐ $x = 0$ ☐ No existe ningún punto así.

9 El conjunto de números reales donde la función $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2-4)}\right)$ es continua es

☐ $\mathbb{R} \setminus \{1, -1, 2, -2\}$ ☐$(2, \infty)$ ✓ $(-2, 1) \cup (2, \infty)$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ no es ninguno de ellos.

10 Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

☐ Existe ☐ 0 ☐ ∞ ✓ Depende de f y g.

11 El polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = e^x - e^{-x}$ en el punto $x = 0$ es

☐ $P(x) = 1+x+x^2+x^3$ ✓ $P(x) = 2x + \frac{2x^3}{3!}$ ☐ $P(x) = 2 + x^2$ ☐ Ninguno de ellos.

12 La serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n$ converge en

✓ $x = 0$ ☐ $(-1, 1)$ ☐ $(-\infty, \infty)$

13 La función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es

☐ discontinua en $(1,2)$ ✓ discontinua en $(0,0)$ ☐ continua en $(0,0)$

14 La derivada direccional de $f(x,y) = 2x - 2xy + 3y^2$ en la dirección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en el punto $(1,0)$ es

☐ 1 ✓ 0 ☐ 2 ☐ ninguna de ellas.

15 El gradiente de la función $f(x,y,z) = y\ln(x+y+z)$ en el punto $(-3,4,0)$ es

☐ $(1,1,1)$ ✓ $(4,4,4)$ ☐ $(1,-1,2)$ ☐ ninguno de ellos

16 Sea $F(x) = \int_{-2}^{x^2} e^t dt$ entonces

☐ $F'(x) = -e^{x^2}$ ✓ $F'(x) = 2xe^{x^2}$ ☐ $F'(x) = e^{x^2} - e^{-2}$

17 Una $\int \frac{2x dx}{x^2+5}$ es

☐ $x^2\ln(x^2+5)$ ✓ $\ln(x^2+5)$ ☐ $\arctan\frac{x}{\sqrt{5}}$ ☐ ninguna de ellas

18 Si f es positiva en $[a,b]$ entonces f en $[a,b]$

☐ es continua ☐ es integrable ☐ es acotada ✓ no tiene porqué ser nada de lo anterior

19 La función $f(x,y) = 10x - 2xy + 10 - 2y$ tiene en el $(-1,5)$

☐ un máximo ☐ un mínimo ✓ un punto silla ☐ $(-1,5)$ no es punto crítico de f

20 Las curvas de nivel no nulas de la función $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$ son

☐ circunferencias ☐ rectas ✓ hipérbolas ☐ parábolas.

Problema 71.- Discute el siguiente sistema lineal de ecuaciones en función de los parámetros $b, t \in \mathbb{R}$ y da la o las soluciones cuando las haya:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = t \\ x - y + 2z = 1 + t^2 \\ 3x + 7y - 4z = -1 - t - t^2 - t^3 \\ 2x + y + bz = t^3 \end{cases}$$

Mi solución: Empezamos escribiendo el sistema lineal matricialmente y haciendo operaciones elementales para obtener sistemas equivalentes

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & t \\ 1 & -1 & 2 & 1+t^2 \\ 3 & 7 & -4 & -1-t-t^2-t^3 \\ 2 & 1 & b & t^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1+t^2 \\ 0 & 5 & -5 & -3+t-3t^2 \\ 0 & 10 & -10 & -4-t-4t^2-t^3 \\ 0 & 3 & b-4 & -2-2t^2t^3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1+t^2 \\ 0 & 5 & -5 & -3+t-3t^2 \\ 0 & 0 & 0 & -(t-1)(t^2-t+2) \\ 0 & 3 & b-4 & -2-2t^2t^3 \end{pmatrix}$$

Salvo que $\mathbf{t = 1}$ el sistema anterior es un **sistema incompatible**.

Estudiamos el caso $\mathbf{t = 1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & b-4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora estudiamos dos casos posibles. Si $\mathbf{b \neq 1}$, el **sistema es compatible determinado** y sus soluciones son

$$x = 1 \qquad y = -1 \qquad z = 0$$

Si $\mathbf{b = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

el **sistema es compatible indeterminado dependiente de un parámetro** λ, con soluciones

$$x = 1 - \lambda \qquad y = \lambda - 1 \qquad z = \lambda$$

Problema 72.- La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 + 12x + 12$ $(x \in \mathbb{R})$ posee puntos cuyas rectas tangentes son paralelas. Encuentra dos de esos puntos e indica las ecuaciones de esas rectas tangentes.

Mi solución: Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente. Como la pendiente de una recta tangente en un punto viene dada por el valor de la derivada en ese punto, lo que hacemos es buscar dos puntos en los que la derivada tenga el mismo valor.

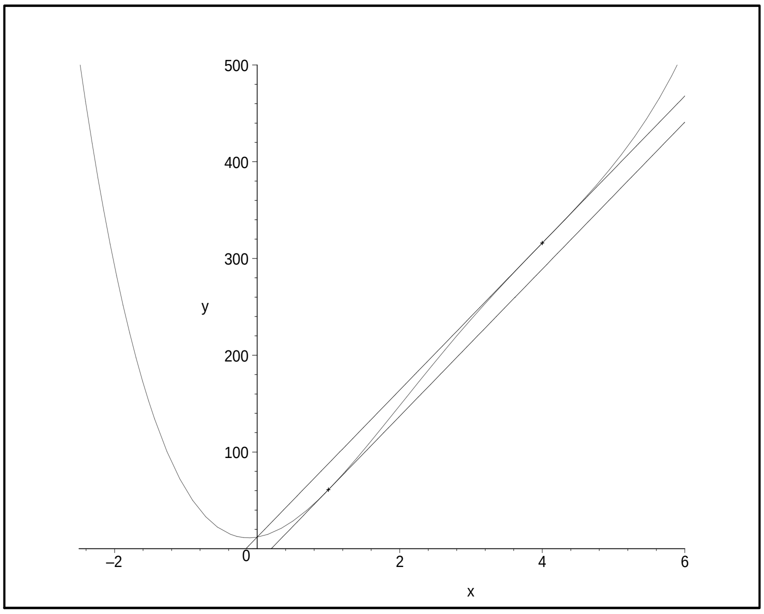
$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x + 12$$

Como la derivada es una cúbica con primer coeficiente positivo, sabemos que tendrá una forma de N viniendo desde $-\infty$ y yendo a ∞, la parte central de la N estará entre el máximo y mínimo de f', así que calculamos estos puntos:

$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96, \quad f''(x) = 0, \quad x^2 - 6x + 8 = 0, \quad x = 2 \text{ y } x = 4$$

Podemos elegir cualquiera de estos dos puntos o bien uno intermedio para asegurarnos de que la f' tiene al menos dos valores iguales, por ejemplo voy a escoger $x_1 = 4$, entonces buscamos un x_0 tal que $f'(x_0) = f'(4) = 76$, esto es $4x_0^3 - 36x_0^2 + 96x_0 + 12 = 76$, como ya sabemos que una raíz es 4 es fácil ver que $4x_0^3 - 36x_0^2 + 96x_0 - 64 = 0 = 4(x-4)^2(x-1)$, de manera que el otro punto es $x_0 = 1$. Siendo las rectas tangentes:

$$y = 76x - 15 \qquad y = 76x + 12$$



Problema 73.- Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$$

a) **7 puntos.** Calcular su radio de convergencia y su suma f

b) **3 puntos.** Sumar la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

Mi solución: a) Utilizaremos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n\right|}{\left|\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}\right|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = |x|.$$

La serie es convergente, $\forall x$ tal que $|x| < 1$.

El radio de convergencia de la serie es 1, y al menos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$ converge en $(-1, 1)$.

Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$$

entonces integrando término a término tenemos

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2} x^n$$

y de manera similar

$$h(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} x^{n+1}$$

y esta serie es una geométrica que sabemos sumar

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} x^{n+1} = \frac{x^2}{2(1-x)}$$

Para obtener la f basta que derivemos dos veces h, esto es

$$h'(x) = g(x) = \frac{2x - x^2}{2(1-x)^2}$$

$$h''(x) = g'(x) = f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$$

b) aplicando el apartado anterior tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

Problema 74.- Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + (y - x) + \alpha(y - x)^2$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) **6 puntos.** Halla y clasifica los puntos críticos de f en términos del parámetro α.

b) Para el caso $\alpha = 0$:

i) **2 puntos.** Representa las curvas de nivel de f.

ii) **2 puntos.** Esboza la gráfica de f.

Mi solución:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 - 2\alpha(y - x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2\alpha(y - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 - 2\alpha(y - x) = 0 \\ 1 + 2\alpha(y - x) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad y = -\frac{1}{2\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0$$

Los puntos críticos son $(0, -\frac{1}{2\alpha})$ siempre que $\alpha \neq 0$.

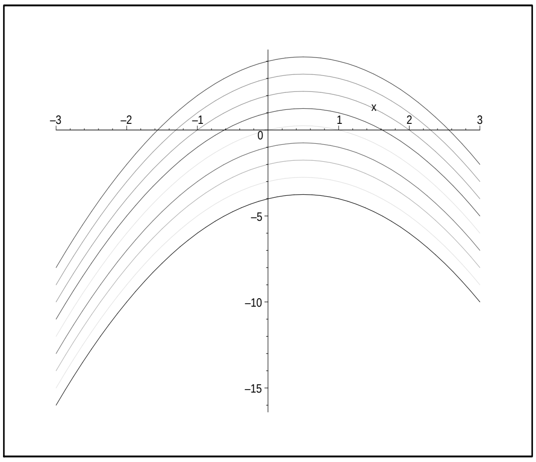
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2\alpha & -2\alpha \\ -2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |Hf(x, y)| = 4\alpha$$

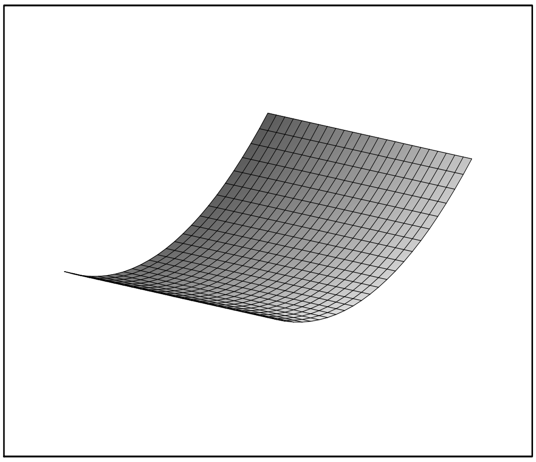
De manera que

Si $\alpha < 0$ los puntos críticos son puntos silla.

Si $\alpha > 0$ como $2 + 2\alpha > 0$ tenemos mínimos.

Si $\alpha = 0$ no hay puntos críticos.





Problema 75.- Una partícula que empieza a moverse en $t = 0$ a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t\cos(t)e^{-t}$ m/s.

(1) **5 puntos** ¿Cuánta distancia habrá recorrido al cabo de T segundos?

(2) **2 puntos** ¿Dónde se encuentra al cabo de T segundos?

(3) **3 puntos** ¿Qué espacio recorrería en tiempo infinito?

Mi solución: Calculamos la integral indefinida de la velocidad, integrando por partes $u = t\cos(t)$ y $dv = e^{-t}dt$ tenemos

$$I = \int t\cos(t)e^{-t}dt = -t\cos(t)e^{-t} + \int \cos(t)e^{-t}dt - \int t\sin(t)e^{-t}dt$$

Volvemos a integrar por partes la última integral con $u = t\sin(t)$ y $dv = e^{-t}dt$ y llamamos $I_1 = \int \cos(t)e^{-t}dt$ y $I_2 = \int \sin(t)e^{-t}dt$ quedando

$$I = \int t\cos(t)e^{-t}dt = -t\cos(t)e^{-t} + I_1 + t\sin(t)e^{-t} - I_2 - I$$

De manera que despejando I y resolviendo I_1 e I_2 de nuevo por partes obtenemos

$$I_1 = \int \cos(t)e^{-t}dt = -\cos(t)e^{-t} - I_2 = -\cos(t)e^{-t} + \sin(t)e^{-t} - I_1$$

Despejando

$$I_1 = \frac{1}{2}e^{-t}(\sin(t) - \cos(t)) \qquad I_2 = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin(t) + \cos(t))$$

$$I = \frac{1}{2}(-t\cos(t)e^{-t} + t\sin(t)e^{-t} + I_1 - I_2) = \frac{1}{2}(-t\cos(t)e^{-t} + t\sin(t)e^{-t} + \sin(t)e^{-t})$$

Es decir

$$\boxed{\int t\cos(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2}((t+1)\sin(t) - t\cos(t))e^{-t} + C}$$

De manera que

(1) Al cabo de π segundos la partícula se encuentra a

$$\int_0^{\pi} t\cos(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2}((t+1)\sin(t) - t\cos(t))e^{-t}]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}e^{-\pi}$$

metros del origen.

(2) Ha recorrido

$$\int_0^{\pi/2} t\cos(t)e^{-t}dt - \int_{\pi/2}^{\pi} t\cos(t)e^{-t}dt = (\frac{\pi}{2}+1)e^{-\pi/2} - \frac{\pi}{2}e^{-\pi}$$

metros al cabo de π segundos.

(3)

$$\int_0^{\infty} t\cos(t)e^{-t}dt = 0$$

En tiempo infinito volvería al punto de partida.

Apéndice D

Examen Final Julio 2012

Problema 76.- Este primer ejercicio consta de 20 apartados. En cada uno de ellos se ofrecen varias opciones y solo una es correcta. Cada acierto se puntúa con $0{,}5$ puntos y cada error con $-0{,}25$ puntos. Los apartados que no sean contestados serán evaluados con 0 puntos. De este modo, la puntuación de este primer ejercicio se situará entre 10 puntos y -5 puntos.

21 Describe el subconjunto de números reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x^2+x-6| > 0$

☐ $\emptyset$ ☐ $(-\infty,-3) \cup (2,\infty)$ ✓ $\mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$ ☐ $(-3,2)$

22 El dominio de la función $f(x) = \sqrt{3-\sqrt{4-x^2}}$ es

☐ $(-\infty,-3) \cup (-3,2) \cup (2,\infty)$ ✓ $[-2,2]$ ☐ $\emptyset$ ☐ $[3,\infty)$

23 Sea $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = x^2$. Entonces La función $h(x) = \cos^2 x$ es

☐ $f \circ g$ ✓ $g \circ f$ ☐ $f \cdot g$ ☐ Nada de lo anterior.

24 Sean $A \in M_{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ y considero el sistema S de ecuaciones lineales $AX = b$, siendo b el vector nulo. Entonces el sistema es

✓ compatible ☐ incompatible ☐ depende del tamaño de A.

25 Sean $A, B \in M_{n\times n}$ invertibles, entonces A^2B

✓ siempre es invertible ☐ no siempre es invertible ☐ nunca es invertible

26 Si (a_n) es una sucesión monótona entonces:

☐ (a_n) es acotada. ☐ (a_n) es convergente. ☐ (a_n) es positiva. ✓ (a_n) Nada de lo anterior.

27 La serie $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{9}{7}\right)^{n-2}$

✓ Diverge ☐ Suma $-\frac{9}{16}$ ☐ Suma $\frac{9}{2}$ ☐ Nada de lo anterior.

28 La derivada n-ésima de $f(x) = xe^x$ es

☐ $f^{(n)}(x) = x^n e^x$ ☐ $f^{(n)}(x) = nxe^x$ ✓ $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$

29 Calcula la recta tangente a $y^2 = x^3(2-x)$ en $(1,1)$

☐ $y = 3x - 2$ ✓ $y = x$ ☐ $y = 2x - 1$

30 Sea $f : (e, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$. Entonces la derivada de la inversa, con respecto a la composición, de la función f es

✓ $2xe^{x^2+1}$ ☐ $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}}$ ☐ No tiene inversa. ☐ No es derivable.

31 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}x^n$, entonces

☐ $f(0) = 2$ ☐ $f'(0) = 1$ ✓ $f''(0) = 4$ ☐ Nada de lo anterior.

32 El polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ en el punto $x = 0$ es

☐ $1 + x + x^2 + x^3$ ☐ $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ ✓ $x^2 - x^3$ ☐ Ninguno de ellos.

33 De la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sabemos que tiene todas las derivadas direccionales en $(x_0, y_0) \in U$ entonces la función en (x_0, y_0)

☐ es continua. ☐ es diferenciable. ✓ no tiene porqué ser continua en (x_0, y_0).

34 El límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$ es

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ✓ no existe

35 El plano tangente de $z = xe^{-y}$ en el punto $(1, 0, 1)$ es

☐ $z = x + y + 2$ ☐ $z - 1 = x + y$ ✓ $x - y - z = 0$ ☐ ninguno de ellos

36 Sea $G(x, y) = \int_{x^2}^{3y} \cos(t)dt$ entonces

☐ $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 3\operatorname{sen} y \cos x^2$ ✓ $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = -2x\cos x^2$ ☐ $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen} 3y - \cos x^2$

37 Una $\displaystyle\int \frac{e^t}{4+e^{2t}}dt$ es

☐ $\ln(4+e^{2t})$ ☐ $\dfrac{-e^t}{(4+e^{2t})^2}$ ✓ $\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{e^t}{2}\right)$ ☐ ninguna de ellas

38 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean P_1 y P_2 particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P_1 \subseteq P_2$. Entonces

✓ $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$ ☐ $U(f,P_2) \leq L(f,P_1)$ ☐ $U(f,P_1) \leq U(f,P_2)$

39 La función $f(x,y) = e^{-x^2-y^2+2x-2y-2}$ tiene en el $(1,-1)$

✓ un máximo ☐ un mínimo ☐ un punto silla ☐ $(1,-1)$ no es punto crítico de f

40 Las curvas de nivel de la función $f(x,y) = \sqrt[3]{y-x^2}$ son

☐ circunferencias ☐ rectas ☐ hipérbolas ✓ parábolas.

Problema 77.- Discutir y resolver, según los valores del parámetro a el sistema:

$$\begin{cases} 1/x + 3/y - 1/z = 0 \\ 1/x + 2/y + 1/z = 2 \\ a/x + 1/y - 1/z = 1 \end{cases}$$

Solución Problema 2. Consideramos $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$ ya que si alguna de las variables fuera 0 el sistema no tendría sentido. Renombramos las variables de la siguiente manera:

$$u = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{1}{y} \qquad w = \frac{1}{z}$$

y reescribimos el sistema:

$$\begin{cases} u + 3v - w = 0 \\ u + 2v + w = 2 \\ au + v - w = 1 \end{cases}$$

Este sistema ya es un sistema lineal que podemos resolver utilizando el método de Gauss por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-3a & a-1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & 3-6a \end{pmatrix}$$

De manera que si $a = \frac{1}{5}$ la última fila nos daría que el sistema es incompatible. Por otra parte si $a \neq \frac{1}{5}$ el sistema es compatible determinado, quedando la solución

$$u = \frac{9}{5a-1} \qquad v = \frac{2(a-2)}{5a-1} \qquad w = \frac{3(2a-1)}{5a-1}$$

Ahora al deshacer el cambio observamos que el sistema en x, y, z tampoco tiene solución si $a = 2$ y $a = \frac{1}{2}$ ya que para estos valores no esta definida, pero para el resto tendremos que la solución es

$$x = \frac{5a-1}{9} \qquad y = \frac{5a-1}{2(a-2)} \qquad z = \frac{5a-1}{3(2a-1)}$$

Problema 78.- Considera la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & [0,5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \sigma(t) = \big(-t-3t^2,\, t+2t^2,\, t+t^2 \big) \end{array}$$

a) (**4 puntos**) De los puntos $A = (-2,1,0)$, $B = (-14,10,6)$ y $C = (1,1,1)$ únicamente uno de ellos es un punto de la curva $\mathcal{C}$. Determina cuál es y halla la recta tangente a la curva en ese punto.

b) (**3 puntos**) Comprueba que $\mathcal{C}$ es una curva simple.

c) (**3 puntos**) Demuestra que $\mathcal{C}$ es una curva plana.

Solución Problema 3. (i) Se comprueba fácilmente que $B \in \mathcal{C}$ para $t = 2$. Como $\sigma'(t) = (-1-6t, 1+4t, 1+2t)$ tenemos que el vector tangente en ese punto es $\sigma'(2) = (-13, 9, 5)$ quedando la recta tangente como $\frac{x+14}{-13} = \frac{y-10}{9} = \frac{z-6}{5}$.

(ii) Se puede comprobar que la curva es simple observando que cada una de las componentes que define la curva es monótona.

(iii) Para ver la curva es plana basta calcular el plano al que pertenece. Consideramos los puntos de la curva $O = \sigma(0) = (0,0,0)$, $D = \sigma(1) = (-4,3,2)$ y el B anterior, calculamos el vector normal $OD \times OB = (-2,-4,2)$, construimos un plano que tenga este vector normal y pase por el punto O y obtenemos $z = x+2y$. Se comprueba fácilmente que cualquier punto de C cumple esta ecuación.

Problema 79.- a) (*1 punto*) Escribe el desarrollo en serie de Taylor, con centro $x = 0$, de las funciones $\cos x$ y $\cosh x$.

b) (*5 puntos*) Consideremos la serie de potencias siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(2n)!}$$

Encuentra su radio de convergencia y expresa su suma en términos de funciones elementales.

c) (*1 punto*) Suma la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n\, \pi^{2n-2}}{2^{2n-2}\,(2n)!}$$

d) (*3 puntos*) Obtén el valor de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}\, 3^{2n+2}}{(n+1)\, 2^{4n+4}\,(2n)!}$$

Solución Problema 4

a)

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \cosh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

b) El Radio de convergencia es infinito. A la vista del apartado a) observamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \frac{(-1)^n(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}, & \text{si } x \geq 0; \\ \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!}, & \text{si } x < 0. \end{cases} = \begin{cases} \cos\sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0; \\ \cosh\sqrt{-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

c) Si observamos esta serie y la comparamos con el apartado anterior vemos que si derivamos para $x \geq 0$ positivos tenemos

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{(2n)!}$$

si ahora evaluamos en $\frac{\pi^2}{4}$, y vemos que, para $x \geq 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen}(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$ tenemos

$$f'(\frac{\pi^2}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n \pi^{2n-2}}{2^{2n-2}(2n)!} = -\operatorname{sen}(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}})\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}} = -\frac{1}{\pi}$$

d) De manera similar observamos ahora la parte correspondiente a los $x < 0$ y vemos que si integramos $f(x)$ tenemos

$$g(x) = \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(2n)!} = \int \cosh\sqrt{-x}dx = 2\cosh\sqrt{-x} - 2\sqrt{-x}\sinh\sqrt{-x} - 2$$

si ahora evaluamos en $-\frac{9}{16}$ tenemos que

$$g(-\frac{9}{16}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}3^{2n+2}}{(n+1)2^{4n+4}(2n)!} = 2\cosh\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sinh\frac{3}{4} - 2$$

Problema 80.- Dada la superficie $2x^2 - y^2 + 3z^2 + 4 = 0$. Determina el plano tangente a dicha superficie en el punto $(1, 3, -1)$. Encuentra el punto de dicho plano tangente que está más próximo al origen de coordenadas.

Solución Problema 5 Sea $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 + 4 = 0$. Determinamos el plano tangente:

$$\nabla f(x, y, z) = (4x, -2y, 6z) \qquad \nabla f((1, 3, -1)) = (4, -6, -6),$$

de manera que el plano tangente cumplirá la ecuación:

$$(4, -6, -6) \cdot (x - 1, y - 3, z + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 6y - 6z + 8 = 0$$

Para calcular la distancia mínima al origen utilizamos multiplicadores de Lagrange. Consideramos la función:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(4x - 6y - 6z + 8)$$

Han de cumplirse las siguientes ecuaciones:

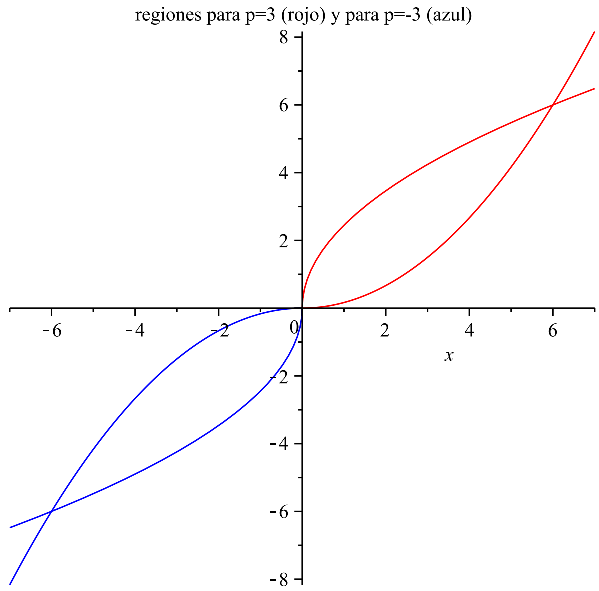
$$2x - 4\lambda = 0, \quad 2y + 6\lambda = 0, \quad 2z + 6\lambda = 0, \quad 4x - 6y - 6z + 8 = 0$$

Quedando el punto donde se alcanza el mínimo

$$(-\frac{4}{11}, \frac{6}{11}, \frac{6}{11})$$

Problema 81.- Halla el área encerrada por $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$ con $p \in \mathbb{R}$.

Solución Problema 6.



Lo primero que observamos es que las dos curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 2p$. Si $p > 0$ tenemos que ambas curvas se cortan en el primer cuadrante como se puede observar en la gráfica. El área de esa región es

$$\int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \sqrt{2p} \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^{2p} - \frac{1}{2p} \left(\frac{x^3}{3} \right]_0^{2p} = \frac{8}{3}p^2 - \frac{4}{3}p^2 = \frac{4}{3}p^2$$

Si $p < 0$ tenemos que las curvas se cortan en el tercer cuadrante.

$$\int_{2p}^{0} \left(\frac{x^2}{2p} - \sqrt{2px} \right) dx = \frac{4}{3}p^2$$

Apéndice E

Examen Final Enero 2013

Problema 1 (i) (**3 puntos.**) Calcula $\cos(2)$ con 3 cifras decimales exactas.

Solución.- Para calcular $\cos(2)$ con 3 cifras decimales exactas, aplicamos el teorema de Taylor a la función $\cos(x)$ y tenemos que

$$\cos(2) = P_{n,\cos(x),x=0}(2) + R_n \quad \text{con} \quad R_n < 10^{-3}$$

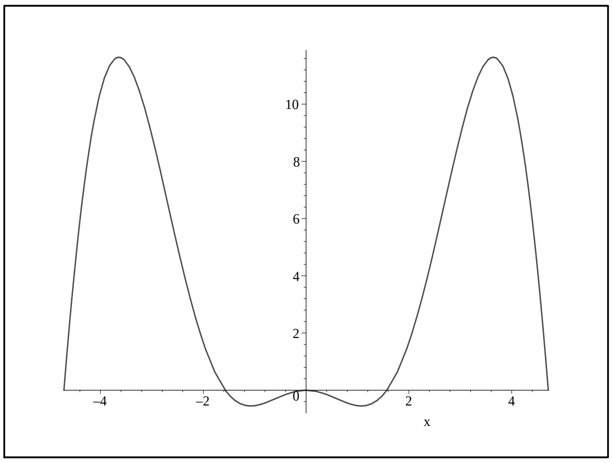
Debido a que todas las derivadas de la función $\cos(x)$ en cualquier punto de su dominio son menores o iguales que 1 tenemos que

$$R_n \leq \frac{1}{(n+1)!}2^{n+1} < \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n > 9$$

Esto nos indica que tendremos que calcular el polinomio de Taylor hasta el grado 10, ya que en su desarrollo de Taylor solo aparecen las potencias pares. De manera que

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} = -0{,}416$$

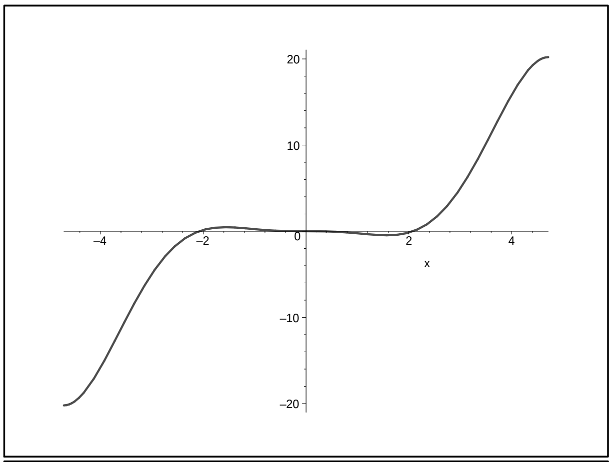
(ii) (**4 puntos.**) Sea $f : [-3\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable, de la que sabemos que $f(0) = 0$ y que la siguiente figura representa la gráfica de su función derivada, f'.

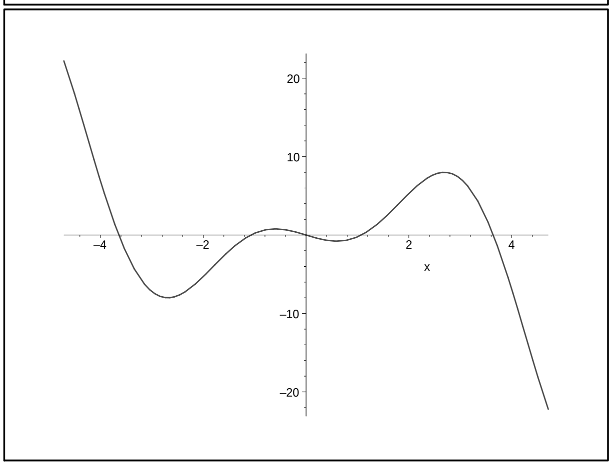


Notese que la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Esboza la gráfica de la función f y la de su segunda derivada, f''.

Solución.- Las gráficas de las funciones f y f'' respectivamente





(iii) (**3 puntos.**) Sean $c > 0$ y $h : [-c, c] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que $h(0) = 0$. Demuestra que si h' es una función par entonces h y h'' son funciones impares.

Solución.- Si h' es una función par, entonces

$$h'(x) = h'(-x)$$

Si derivamos esta igualdad tenemos

$$h''(x) = -h''(-x)$$

esto es, h'' es una función impar. Por otra parte tenemos que la función

$$h(x) = \int_0^x h'(t)dt = \int_0^x h'(-t)dt = -\int_0^{-x} h'(s)ds = -h(-x)$$

es decir, h es una función impar.

Problema 2 (i) **4 puntos.** Calcula los extremos absolutos de la función $f : [0, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen} t^2 dt$$

Solución.- Calculamos la derivada de f, esto es

$$f'(x) = e^{-x^2} \operatorname{sen} x^2 \ \geq \ 0 \, \forall \, x \in [0, \sqrt{\pi}]$$

de manera que f es creciente en el intervalo, por tanto alcanzará los valores máximo y mínimo en los extremos del intervalo, en concreto, el mínimo en $x = 0$ y el máximo en $x = \sqrt{\pi}$.

(ii)**3 puntos.** Estudia la derivabilidad de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$g(x) = \int_0^{\int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen} t^2 dt} e^{-t^2} \operatorname{sen} t^2 dt$$

Solución.- g es una función derivable en todo $\mathbb{R}$ por la regla de la cadena ya que es la composición de la función f del apartado anterior, consigo misma. La función f es derivable por el teorema fundamental del cálculo ya que $e^{-t^2} \operatorname{sen} t^2$ es una función continua. De manera que su derivada es:

$$g'(x) = e^{-\left(\int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen} t^2 dt\right)^2} \operatorname{sen} \left(\int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen} t^2 dt\right)^2 e^{-x^2} \operatorname{sen} x^2$$

(iii)**3 puntos.** Estudia la convergencia de la integral impropia.

$$\int_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}}^{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}} e^{-x}|\operatorname{sen}(x^2)|dx$$

Solución.- Lo primero que hacemos es sumar las series para saber en que integral estamos. El extremo inferior es una serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1-0=1$$

Para calcular el extremos superior observamos que $\log n < n$ para toda $n \geq 2$ de manera que por el criterio de comparación tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n} > \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que diverge a infinito de manera que ya tenemos los extremos

$$\int_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}}^{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}} e^{-x}|\operatorname{sen}(x^2)|dx = \int_1^{\infty} e^{-x}|\operatorname{sen}(x^2)|dx$$

como $e^{-x}|\operatorname{sen}(x^2)|$ son funciones positivas aplicamos el criterio de comparación y tenemos

$$\int_1^{\infty} e^{-x}|\operatorname{sen}(x^2)|dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

es decir, nuestra integral impropia converge.

Problema 3 (i) **2 puntos.** Estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales para la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución.- La función f, para cualquier punto $(x,y)\neq(0,0)$ tenemos que es una función continua. Estudiamos en $(0,0)$, para ello calculamos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

que pasando a polares se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\theta}{r^2} = \cos\theta$$

de manera que no existe el límite ya que depende del ángulo, entonces f no va a ser continua en $(0,0)$.

Primero estudiamos las derivadas parciales en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \quad \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

De manera que las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(ii) **3 puntos.** Dar la expresión del plano tangente a la superficie: $x^2+y^3+e^{xy}-z=4$, en el punto $(2,0,1)$.

Solución.- Consideramos la función $g(x,y,z) = x^2+y^3+e^{xy}-z-4=0$, entonces

$$\nabla g(x,y,z) = (2x+ye^{xy}, 3y^2+xe^{xy}, -1)$$

$$\nabla g(2,0,1) = (4,2,-1)$$

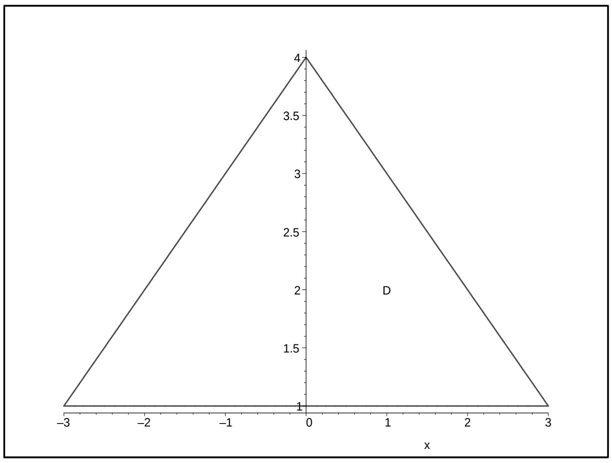
De manera que el plano tangente viene dado por la expresión

$$\langle (4,2,-1),(x-2,y,z-1)\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x+2y-z=7$$

(iii) **5 puntos.** Estudiar los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = x^2-6x+y^2-6y+4$, sobre el compacto D, definido por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y \leq 4,\ y-x \leq 4,\ y \geq 1\}$$

Solución.- Empezamos dibujando el compacto.



como la función es continua y el conjunto un compacto podemos asegurar que va alcanzar máximo y mínimo absoluto. Buscamos los candidatos a extremos:

$$\nabla f(x,y) = (2x-6, 2y-6), \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (3,3)$$

que no pertenece al compacto D, por tanto no lo consideramos. Estudiamos los bordes. al ser rectas pasamos a estudiar funciones de una variable:

$$b1(x) = f(x, 4-x) = x^2 - 6x + (4-x)^2 - 6(4-x) + 4 = 2x^2 - 20x + 44$$

derivamos y hallamos el/los candidato/s

$$b1'(x) = 4x - 20, \quad 4x - 20 = 0, \quad x = 5$$

que no pertenece al compacto. De manera similar

$$b2(x) = f(x, 4+x) = x^2 - 6x + (4+x)^2 - 6(4+x) + 4 = 2x^2 - 4x - 4$$

$$b2'(x) = 4x - 4, \quad 4x - 4 = 0, \quad x = 1, \quad \Rightarrow \quad (1,5)$$

que tampoco pertenece al compacto. Finalmente

$$b3(x) = f(x,1) = x^2 - 6x + 1 - 6 + 4 = x^2 - 6x - 1$$

$$b3'(x) = 2x - 6, \quad 2x - 6 = 0, \quad x = 3, \quad \Rightarrow \quad (3,1)$$

justo uno de los vértices de nuestro compacto. Estudiamos además los otros dos y tenemos que:

$$f(0,4) = -4, \qquad f(-3,1) = 26, \qquad f(3,1) = -10$$

De manera que tenemos que el máximo absoluto se alcanza en el punto $(-3,1)$ y el mínimo absoluto en el $(3,1)$.

Apéndice F

Examen Final Julio 2013

Ejercicio 1

Sea f la función definida por $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|$. Se pide:

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

b) Representa la gráfica de f, obteniendo previamente los elementos necesarios.

Solución: (a) Lo primero que observamos es que el dominio de la función f es $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Ya que en $x = 1$ no esta definido el logaritmo y en $x = 3$ no está definido el cociente. Por tanto f es continua y derivable en todos los puntos de su dominio por ser cociente y composición de funciones continuas y derivables en su dominio.

(b) Estudiamos el comportamiento de la función entorno de los puntos en los que la función no esta definida. Obtenemos

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

entonces en $x = 1$ y $x = 3$ tenemos asíntotas verticales. Observamos el comportamiento en el infinito y tenemos

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0^+.$$

El corte con los ejes nos dice que

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x-1}{x-3}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = -\ln 3$$

Otra manera de describir la función f quitando el valor absoluto es

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1-x}{3-x}, & \text{si } x < 1; \\ \ln \frac{x-1}{3-x}, & \text{si } 1 < x < 3; \\ \ln \frac{x-1}{x-3}, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

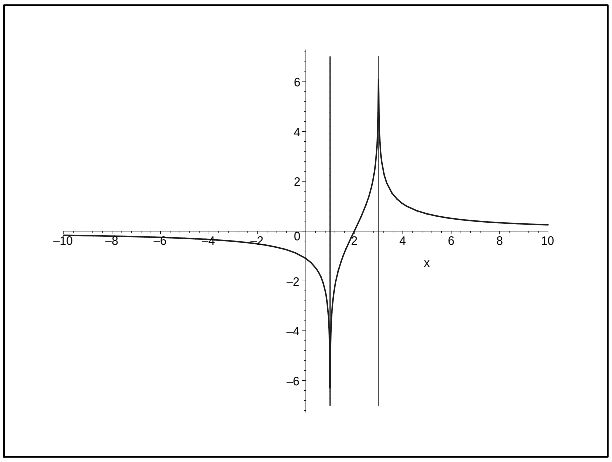
de aquí es fácil calcular

$$f'(x) = \begin{cases} \ln \frac{-2}{(1-x)(3-x)}, & \text{si } x < 1; \\ \ln \frac{2}{(x-1)(3-x)}, & \text{si } 1 < x < 3; \\ \ln \frac{-2}{(x-1)(x-3)}, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

de manera que la función f es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y creciente en $(1, 3)$. Para estudiar la concavidad tenemos

$$f''(x) = \begin{cases} \ln \frac{4(x-2)}{(1-x)^2(3-x)^2}, & \text{si } x < 1; \\ \ln \frac{4(x-2)}{(x-1)^2(3-x)^2}, & \text{si } 1 < x < 3; \\ \ln \frac{4(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

entonces el único punto de inflexión es en $x = 2$ quedando la gráfica como



Ejercicio 2

Discute y resuelve en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} (4\alpha - 8)x_1 + 3\alpha x_2 + 2\alpha x_3 + (2 - \alpha)x_4 = 2\alpha, \\ (3\alpha - 6)x_1 + 3\alpha x_2 + 2\alpha x_3 + (2 - \alpha)x_4 = 3\alpha, \\ (2\alpha - 4)x_1 + 2\alpha x_2 + 2\alpha x_3 + (2 - \alpha)x_4 = 3\alpha, \\ (\alpha - 2)x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + (2 - \alpha)x_4 = 2\alpha. \end{cases}$$

Solución: Utilizamos el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 4\alpha-8 & 3\alpha & 2\alpha & 2-\alpha & 2\alpha \\ 3\alpha-6 & 3\alpha & 2\alpha & 2-\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha-4 & 2\alpha & 2\alpha & 2-\alpha & 3\alpha \\ \alpha-2 & \alpha & \alpha & 2-\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha & \alpha & 2-\alpha & 2\alpha \\ 4\alpha-8 & 3\alpha & 2\alpha & 2-\alpha & 2\alpha \\ 3\alpha-6 & 3\alpha & 2\alpha & 2-\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha-4 & 2\alpha & 2\alpha & 2-\alpha & 3\alpha \end{pmatrix}$$

hacemos ceros debajo debajo del primer elemento de la primera columna

$$\begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha & \alpha & 2-\alpha & 2\alpha \\ 0 & -\alpha & -2\alpha & 3\alpha-6 & -6\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 2\alpha-4 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & -\alpha \end{pmatrix} \sim (*)$$

quedando directamente triangular. Observando el sistema vemos que los casos que tenemos que estudiar van a ser:

Si $\alpha = \mathbf{2}$ la última fila del sistema se convierte en $0x_4 = -2$ que no tiene solución, por tanto el **sistema es incompatible**.

Si $\alpha = \mathbf{0}$ el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir un **sistema compatible indeterminado** dependiendo de dos parámetros cuya solución general es de la forma $(0, \lambda, \nu, 0)$ con $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$.

Finalmente si $\alpha \neq \mathbf{2}$ y $\alpha \neq \mathbf{0}$ el sistema es **compatible determinado** y su solución es

$$(*) \sim \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -2\alpha & 0 & -3\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & -\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & -\alpha \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_4 = \frac{\alpha}{2-\alpha}, \quad x_2 = x_3 = 1$$

Ejercicio 3

Se considera la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudia la diferenciabilidad de f. Obtén la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,0)$.

b) Determina los extremos absolutos de f sobre el compacto K definido mediante

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1 \right\}.$$

Solución: a) Debido a la definición de la función f podemos asegurar que es diferenciable en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$ ya que es cociente de polinomios. Estudiamos la diferenciabilidad en $(0,0)$ utilizando la definición, para ello empezamos calculando las derivadas parciales en en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

De manera que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

que pasando a polares obtenemos

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\rho^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{5/2} \cos^2\theta \sin^2\theta = 0$$

ya que es el producto de algo acotado por algo que tiende a cero. De manera que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

La ecuación del plano tangente:

$$z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \qquad \Rightarrow \qquad z = 0$$

b) Empezamos calculando los puntos críticos de la función

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

entonces

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=0,\\ \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2xy^4=0,\\ 2x^4y=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \text{ó} \quad y=0$$

de manera que los puntos críticos de esta función coinciden con los ejes de coordenadas. En particular como $f(x,y)>0$ fuera de los ejes y $f(x,0)=f(0,y)=0$ tenemos que los ejes son los puntos de **mínimos absolutos**.

Estudiamos ahora lo que pasa en el compacto K, que es el cuadrado de vértices $(1,1),\ (1,-1),\ (-1,-1)$ y $(-1,1)$. Como las restricciones son rectas consideramos las funciones de una variable

$$f(x,1)=\frac{x^2}{1+x^2}=f(x,-1)=g(x) \qquad \Rightarrow \qquad g'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

De manera que en $(0,1)$ y (0,-1) tenemos mínimos que ya habíamos detectado antes. De manera simétrica nos ocurre con $f(1,y)$ y $f(-1,y)$.

Los únicos puntos que nos quedan por estudiar son los vértices del compacto y aquí tenemos que

$$f(1,1)=f(1,-1)=f(-1,-1)=f(-1,1)=\frac{1}{2}$$

de manera que es en los cuatro vértices donde se alcanza los **máximos absolutos**.

Ejercicio 4

Sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x)=\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}dt$$

(a) **(8 puntos.)** Calcula:

(i) $F(0)$

(ii) $F(\ln(\sqrt{3}))$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

(b)**(2 puntos.)** Sean $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{y} \qquad h(x)=e^{-x}$$

Describe la función F' en términos de las funciones g y h.

Solución: (a)

$$F(x)=\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}dt=\frac{\pi}{4}-\arctan e^{-x}$$

(i) $F(0)=0$

(ii)

$$F(\ln(\sqrt{3}))=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}dt=\frac{\pi}{4}-\arctan e^{-\ln\sqrt{3}}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

(iii)

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{4}-\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{4}$$

(b) Por el Teorema fundamental del cálculo y utilizando la definición de g y h una posible manera de describir F' en función de g y h es

$$F'(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=g(h(x))h(x)$$

Bibliografía

[1] Alonso, M. y Finn E.J. *Física (vol 1) Mecánica.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. Méjico. 1976.

[2] Alonso, M. y Finn E.J. *Física (vol 2) Campos y ondas.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. Méjico. 1976.

[3] Alonso, M. y Finn E.J. *Física (vol 3) Fundamentos cuánticos y estadísticos.* Addison-Wesley Iberoamericana. U.SA. 1986.

[4] Amillo J. et. al. *Cálculo. Conceptos, Ejercicios y Sistemas de Computación Matemática.* McGraw-Hill. Madrid. 1996.

[5] Anton, H. *Calculus: a new horizon.* 6th ed. John Wiley & Sons. New York, 1999.

[6] Anton, H. *Cálculo y Geometría analítica (vol 2).* Limusa. México. 1994.

[7] Apostol, T.M. *Calculus (2 vols.)* Reverté. Barcelona. 1982.

[8] Apostol, T.M. *Análisis Matemático.* Reverté. Barcelona. 1982.

[9] Arnol'd, V.I. *Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag. Nueva York. 1992.

[10] Atkinson K. *Elementary Numerical Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1993.

[11] Atkinson K. *An Introduction to Numerical Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1989.

[12] Bartle, R.G. *Introducción al análisis matemático.* Limusa.

[13] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. y Shetty, C.M. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1993.

[14] Bombal, F., Rodríguez, L y Vera, G. *Problemas de análisis matemático (3 vol.)* AC. Madrid, 1987

[15] Boyer, C.B. *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1991.

[16] Bradley, G.L. y Smith, K.J. *Cálculo de una variable.* Prentice Hall. Madrid. 1998.

[17] Bradley, G.L. y Smith, K.J. *Cálculo de varias variable.* Prentice Hall. Madrid. 1998.

[18] Bronson R. *Matrix Methods. An introduction.* Academic Press, inc. Londres. 1991.

[19] Burgos, J. *Curso de álgebra y geometría.* Ed Alhambra. Madrid, 1980.

[20] Burgos, J. *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw-Hill. Madrid 1994.

[21] Burgos, J. *Cálculo infinitesimal de varias variables.* McGraw-Hill.

[22] Carrillo de Albornoz, A. y Llamas I. *Maple V, aplicaciones matemáticas para PC.* Ra-ma. Madrid. 1995.

[23] Castillo, F. *Análisis Matemático II.* Alhambra. Madrid. 1980.

[24] Cembranos, P. y Mendoza, J. *Límites y derivadas.* Anaya. Madrid. 2004.

[25] Conway, J.B. *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlag. Nueva York, 1978.

[26] Cuadras, C.M., *Problemas de Probabilidades y Estadística (vol. 1.* 6ª edición. PPU 1985.

[27] De la Villa, A.*Problemas de Álgebra.* CLAGSA. Madrid. 1994.

[28] Demidovich, B.P. *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Paraninfo. Madrid. 1991.

[29] Demidovich, B.P. y Maron I.A. *Cálculo numérico fundamental.* Paraninfo. Madrid. 1985.

[30] Dodson, C.T.J. y Gonzalez E.A. *Experiments in Mathematics Using.* Springer-Verlag. Alemania. 1995.

[31] Dorronsoro, J. y Hernández E. *Números, grupos y anillos.* Addison-Wesley, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. 1996.

[32] Fernández Viña, J.A. *Lecciones de análisis matemático I.* Tecnos. Madrid. 1976.

[33] Fernández Viña, J.A. y Sánchez Mañes E. *Ejercicios y complementos de análisis matemático I.* Tecnos. Madrid. 1979.

[34] Fisher, E. *Intermediate real analysis.* U.T.M. Springer Verlag. Berlin, 1980.

[35] Fuertes García, J. y Martínez Hernández, J. *Problemas de Cálculo Infinitesimal.* McGraw-Hill, Interamericana de España, S.A.U. Madrid. 1997.

[36] Fraleigh, J. B. y Beauregard, R. A. *Algebra lineal.* Ed Addison-Wesley Iberoamericana. Mexico, 1989.

[37] Gamboa, J.M. y Rodriguez, M.B. *Álgebra matricial.* Anaya. Madrid. 2003.

[38] Gantmacher F.R. *Théorie des matrices (tome I).* Dunod.

[39] García, A. y otros. *Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático de una variable.* Clagsa. Madrid. 1993.

[40] García, A. y otros. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables.* Clagsa. Madrid. 1996.

[41] Grossman, S.I. *Álgebra Lineal.* McGraw-Hill. Méjico. 1996.

[42] Guzman M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Alhambra. Madrid. 1975.

[43] Guzman M. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* Pirámide. Madrid. 2001.

[44] Godunov, S.K. *Ecuaciones de la Física Matemática.* Mir. Moscú. 1978.

[45] Golovina, L.I. *Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones.* Ed. Mir. Moscú, 1983.

[46] Hirsch, M. y Smale, S. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal.* Ed. Alianza Universidad. Madrid, 1983.

[47] Infante J.A. et al. *Métodos numéricos.* 1a ed. Pirámide. 1999.

[48] John, F *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag. Nueva York. 1980.

[49] Kiseliov A., Krasnov M. y Makarenko G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Mir. Moscú. 1984.

[50] Katz, V.J. *A History of Mathematics.* Addison-Wesley. U.S.A. 1998.

[51] Lang, S. *Algebra lineal.* Fondo educativo Interamericano. Bogotá, 1976.

[52] Lang, S. *Cálculo (2 vols.)* Fondo Educativo Interamericano. Bogotá. 1976.

[53] Lipschutz. *Algebra Lineal.* Ed Schaum- Mc Graw-Hill. Madrid.

[54] Marsden, J.E. y Tromba, A.J. *Calculo Vectorial.* 4a ed. Addison-Wesley Longman de México. Naucalpán de Juárez, 1998.

[55] Marsden, J.E. y Tromba, A.J. *Calculo Vectorial. Problemas resueltos.* Addison-Wesley Iberoamericana. 1993.

[56] Mathews J.H. y Fink K.D *Métodos Numéricos con MATLAB.* Prentice Hall. Madrid. 1999.

[57] Merino, L. y Santos, E. *Álgebra lineal con métodos elementales.* Universidad de Granada. 1997.

[58] Munkres, J.R. *Topología.* Prentice Hall. Madrid. 2002.

[59] Spiegel M.R., Liu J. y Abellanas, L. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada.* McGraw-Hill. Madrid. 2000.

[60] Pérez, C. *Métodos matemáticos y programación con Maple V.* 1a Ra-ma. Madrid, 1998.

[61] Polya G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos S.A. Madrid. 1966.

[62] Proskuryakov, I.V. *Problemas de álgebra lineal.* Ed Reverté.

[63] Ribenboim P. *My Numbers, My Friends.* Springer-Verlag. Nueva York. 2000.

[64] Roanes, E. et al. *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5.* 1a ed. Rubiños-1860, S.A. Madrid, 1999.

[65] Rorres, C. y Anton, H. *Aplicaciones del álgebra lineal.* Limusa. Mexico, 1979.

[66] Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático.* McGraw-Hill. 1966.

[67] Sanz-Serna J.M. *Diez lecciones de cálculo numérico.* Universidad de Valladolid. 1998.

[68] Spivak, M. *Calculus : cálculo infinitesimal.* Reverté. Barcelona, 1990.

[69] Simmons G.F. y Robertson J.S *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* McGraw-Hill, Interamericana de España, S.A.U. Madrid. 1993.

[70] Stein S.K. y Barcellos, A. *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw-Hill. Santafé de Bogotá. 1995.

[71] Stewart I. *De aquí al infinito.* Grijalbo Mondadori. Barcelona. 1998.

[72] Stewart, J. *Cálculo: conceptos y contextos.* International Thomson Editores. Mexico D.F., 1999.

[73] Strang, G. *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Ed Adisson- Wesley Latinoamericana.

[74] Taha, H.A. *Investigación de Operaciones.* Alfaomega. Méjico. 1995.

[75] Vivaldi F. *Experimental Mathematics with Maple.* Chapman and Hall, CRC Mathematics. U.S.A. 2001.

[76] Weinberger H.F. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales.* Reverté. Barcelona. 1988.

[77] Wilson W. *Simulating Ecological and Evolutionary Systems in C.* Cambridge University Press. Cambridge. 2000.

[78] http://www.bne.es/

[79] http://www.cervantesvirtual.com/index.shtml

[80] http://www.cut-the-knot.org/index.shtml

[81] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/

[82] http://www.indexnet.santillana.es/home.htm

[83] http://www.maa.org/pubs/mathmag.html

[84] http://www.maplesoft.com/

[85] http://matematicas.montes.upm.es/

[86] http://mathworld.wolfram.com/

[87] http://www.maths.tcd.ie/

[88] http://web.mit.edu/

[89] http://planetmath.org/

[90] http://platea.pntic.mec.es/ csanchez/olimmain.htm

[91] http://portal.isiknowledge.com/

[92] http://www.rae.es/

[93] http://www.research.att.com/ njas/

[94] http://www.uam.es/

[95] http://www.ucm.es/info/ucmp/index.php

[96] http://www.uc3m.es/

[97] http://www.upm.es/

[98] http://www.urjc.es/

[99] http://www.ugr.es/

[100] http://www.uv.es/ jaguilar/