

Espacios Vectoriales Euclídeos

Antonia González Gómez
Dep. de Matemáticas Aplicadas a los Recursos Naturales
ETSI de Montes
UPM

Índice

1. Espacios Euclídeos: producto escalar, normas, distancia y ángulos.	2
2. Ortogonalidad. Bases ortonormales. Gram-Schmidt.	6
3. Proyecciones ortogonales.	11
4. Aplicaciones Lineales adjuntas y autoadjuntas entre Espacios Euclídeos.	17
5. Aplicaciones ortogonales	21
6. Aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$	25

1. Espacios Euclídeos: producto escalar, normas, distancia y ángulos

Salvo que se diga lo contrario, a lo largo de este capítulo trabajaremos con espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, de dimensión n . Un producto escalar sobre V es una forma bilineal simétrica definida positiva.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\longrightarrow \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Corolario 1.1. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ un producto escalar. Entonces verifica las siguientes propiedades:

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$ (simetría)
- $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bilinealidad)
- $\langle u, u \rangle > 0 \quad \forall u \neq 0 \in V$ (def. positiva)

■ **Ejemplo 1.1.** La forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle &\longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

verifica que es simétrica

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle$$

y definida positiva

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

por tanto, es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplo 1.2.** La forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle f, g \rangle &\longrightarrow \int_a^b f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

verifica que es simétrica

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx = \langle g, f \rangle$$

y definida positiva

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx > 0 \quad \forall f \neq 0$$

por tanto, es un producto escalar sobre $\mathcal{C}([a, b])$.

■ **Ejercicio 1.1.** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $ac > b^2$. Se define:

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejercicio 1.2.** En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices 2×2 , se considera la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle A, B \rangle &\mapsto \langle A, B \rangle = \text{traza}(A^t \cdot B) \end{aligned}$$

Comprobar que la aplicación anterior define un producto escalar en $M_2(\mathbb{R})$

Definición 1.2. Un espacio vectorial euclídeo sobre $\mathbb{R}$ es un par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde V es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar.

■ **Ejemplo 1.3.** El par $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es un espacio euclídeo.

■ **Ejercicio 1.3.** Consideremos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que tiene por matriz asociada en la base canónica B_c la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & c \\ b & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Sea $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(u, v) = \langle u, T(v) \rangle$. Determina los valores de a, b, c para que F sea un producto escalar en $\mathbb{R}^3$

Definición 1.3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, se define la norma de $v \in V$ como

$$\|v\| = +\sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

■ **Ejemplo 1.4.** Consideramos en $\mathbb{R}$ el producto escalar $\langle x, y \rangle = xy$. En este espacio euclídeo tenemos que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

■ **Ejemplo 1.5.** Sea $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Entonces

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

■ **Ejemplo 1.6.** Sea $(\mathcal{C}([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$. Entonces

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

Proposición 1.1. *Propiedades de la norma*

1.- $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$

2.- $\|v\| = 0 \iff v = 0$

3.- $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V$

4.- *Desigualdad de Cauchy-Schwartz.-*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|w\| \cdot \|v\| \quad \forall v, w \in V$$

5.- *Desigualdad Triangular.-*

$$\|v + w\| \leq \|w\| + \|v\| \quad \forall v, w \in V$$

Demostración. Como $0 \leq \langle v + \alpha w, v + \alpha w \rangle$ tenemos entonces que la ecuación de segundo grado en α

$$\langle p(\alpha) = v + \alpha w, v + \alpha w \rangle = \alpha^2 \|w\|^2 + 2\alpha \langle v, w \rangle + \|v\|^2 \geq 0$$

y por tanto, el polinomio tiene una raíz o ninguna, es decir,

$$4 \langle v, w \rangle^2 - 4 \|v\|^2 \|w\|^2 \leq 0$$

■

Definición 1.4. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Un vector $v \in V$ es unitario si $\|v\| = 1$.

Definición 1.5. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Definimos la distancia entre dos vectores $u, v \in V$ como

$$\begin{aligned} d : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\longrightarrow d(u, v) = \|u - v\| \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.7.** Consideramos en $\mathbb{R}$ el producto escalar $\langle x, y \rangle = xy$. En este espacio euclídeo tenemos que

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|.$$

■ **Ejemplo 1.8.** Sea $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\| = \\ &= \sqrt{\langle (x_1 - y_1, x_2 - y_2), (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.9.** Sea $(\mathcal{C}([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$. Entonces

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle} = \sqrt{\int_a^b (f - g)^2 dx}$$

■ **Ejercicio 1.4.** En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices 2×2 , se considera la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle A, B \rangle &\mapsto \langle A, B \rangle = \text{traza}(A^t \cdot B) \end{aligned}$$

Calcular la distancia definida por este producto escalar en $M_2(\mathbb{R})$

Proposición 1.2. *Propiedades de la distancia*

- $d(u, v) = 0 \iff u = v$
- $d(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V$
- $d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in V$
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in V$

Definición 1.6. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz si sigue

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \quad \forall u, v \in V.$$

Definimos así el ángulo que forman dos vectores distinto de cero $u, v \in V$ como

$$\widehat{(u, v)} = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [0, \pi].$$

■ **Ejemplo 1.10.** Sea $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $u = (0, 1), v = (1, 1)$ Entonces

$$\widehat{(u, v)} = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

■ **Ejemplo 1.11.** Sea $(\mathcal{C}([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$. Sean $u = \cos x$ y $v = \sin x$ entonces

$$\widehat{(u, v)} = \arccos \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx} = \frac{\pi}{2}$$

observar que

$$\cos \widehat{(u, v)} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \implies \boxed{\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \widehat{(u, v)}}$$

2. Ortogonalidad. Bases ortonormales. Gram-Schmidt.

Definición 2.1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados $u, v \in V$ diremos que son ortogonales, $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.

■ **Ejemplo 2.1.** a) Teorema de Pitágoras

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

b) En el espacio $R_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, con el producto escalar (comprobar):

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: R_2[x] \times R_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x^2)dx \end{aligned}$$

tenemos que los vectores $p(x) = 2$ y $q(x) = x$ son ortogonales

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 2x(1-x^2)dx = \int_{-1}^1 (2x - 2x^3)dx = 0$$

Definición 2.2. Sean $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$, diremos que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un sistema ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$, es decir, si $v_i \perp v_j$ para todo $i \neq j$.

Definición 2.3. Diremos que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un sistema ortonormal si es ortogonal y además $\|v_i\| = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

■ **Ejemplo 2.2.** a) Sea $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. entonces la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es un sistema ortonormal.

b) En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se tiene que $\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, \sqrt{2}, 0), (0, 0, 0, 3)\}$ es un sistema ortogonal pero no ortonormal.

Proposición 2.1. *Todo sistema ortogonal de vectores no nulos es un sistema linealmente independiente. En particular todo sistema ortonormal de vectores no nulos es linealmente independiente*

Demostración. Sea $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ un sistema ortogonal de vectores no nulos y sean $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0 \implies$$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s \implies$$

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$$

■

Definición 2.4. Diremos que una base B de V es una base ortonormal si es base y además un sistema ortonormal.

Teorema 2.1. (*Método de ortogonalización de Gram-Schmidt*)

Sean $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ un sistema linealmente independiente. Entonces existe un sistema ortogonal $\{w_1, \dots, w_r\} \subset V$ tal que

$$L(\{v_1, \dots, v_r\}) = L(\{w_1, \dots, w_r\})$$

Demostración. Inducción sobre r .

- Si $r = 1$ es trivial.
- Si $r = 2$ entonces tomamos $w_1 = v_1$ y $w_2 = v_2 + \alpha w_1$ como queremos que $w_1 \perp w_2$ se sigue, puesto que $v_1 \neq 0$, que

$$0 = \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, v_2 + \alpha w_1 \rangle \implies \alpha = -\frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2}$$

- Supongamos que es cierto para $r = k$.
- Si $r = k + 1$, por hipótesis de inducción podemos elegir $\{w_1, \dots, w_k\}$ tales que sean ortogonales y $L(\{v_1, \dots, v_k\}) = L(\{w_1, \dots, w_k\})$. Si tomamos ahora $w_{k+1} = v_{k+1} + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k$ con

$$\alpha_i = -\frac{\langle w_i, v_{k+1} \rangle}{\|w_i\|^2} \quad \forall i = 1, \dots, k$$

entonces $\{w_1, \dots, w_{k+1}\}$ es un sistema ortogonal con $L(\{v_1, \dots, v_{k+1}\}) = L(\{w_1, \dots, w_{k+1}\})$ como queríamos.

■

Teorema 2.2. *Todo espacio vectorial euclídeo tiene bases ortonormales.*

- **Ejemplo 2.3.** a) En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, consideramos el producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x^2)dx \end{aligned}$$

vamos a calcular una base ortonormal, para este producto escalar, en $\mathbb{R}_2[x]$. Para ello tomamos la base $B = \{1, x, x^2\}$ y le aplicamos Gram-schmidt para obtener una base

ortogonal

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 + \alpha w_1 \quad \text{y} \quad w_1 \perp w_2 \implies \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, v_2 + \alpha w_1 \rangle = 0$$

$$\implies \alpha = -\frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2}$$

$$\alpha = -\frac{\langle 1, x \rangle}{\|1\|^2} = -\frac{\int_{-1}^1 x(1-x^2) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = 0 \implies w_2 = x$$

$$\left. \begin{array}{l} w_3 = v_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \\ \langle w_3, w_1 \rangle = 0 \\ \langle w_3, w_2 \rangle = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{\langle w_1, v_3 \rangle}{\|w_1\|^2} = -\frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\|1\|^2} \\ \alpha_2 = -\frac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\|w_2\|^2} - \frac{\langle x, x^2 \rangle}{\|x\|^2} \end{array} \right.$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{\int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = -\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8} \\ \alpha_2 = -\frac{\int_{-1}^1 x^3(1-x^2) dx}{\int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx} = 0 \end{array} \right. \implies w_3 = x^2 + \frac{1}{8}$$

obtenemos así que $B = \{1, x, x^2 + \frac{1}{8}\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$. Como

$$\|w_1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3} \implies \|w_1\| = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\|w_2\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx \implies \|w_2\| = \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$\|w_3\|^2 = \langle x^2 + \frac{1}{8}, x^2 + \frac{1}{8} \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 + \frac{1}{8})(1-x^2) dx = \frac{1}{10} \implies \|w_3\| = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

obtenemos así que $B = \{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{15}}{2}x, \sqrt{10}x^2 + \frac{\sqrt{10}}{8}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un producto escalar cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio generado por $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 0)\}$.

Vamos a calcular una base ortogonal de S respecto al producto escalar f . Como $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ es un sistema de generadores de S podemos obtener de él

una base, por ejemplo $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. aplicamos G-S a está base para obtener una base ortogonal.

$$w_1 = v_1 = (1, 0, 0)$$

$$w_2 = v_2 + \alpha w_1 \quad y \quad w_1 \perp w_2 \implies \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, v_2 + \alpha w_1 \rangle = 0$$

$$\implies \alpha = -\frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2}$$

$$\alpha = -\frac{\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle}{\|(1, 0, 0)\|^2} = -\frac{(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$w_2 = (0, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

obtenemos así que $B = \{(1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 1, 0)\}$ es una base ortogonal de S . Como

$$\|w_1\|^2 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \implies \|w_1\| = \sqrt{2}$$

$$\|w_2\|^2 = \left(\frac{1}{2} \ 1 \ 0\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \implies \|w_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

entonces $B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)\}$ es una base ortonormal de S .

■ **Ejercicio 2.1.** Hallar una base ortonormal del subespacio

$$B = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AX - XA = 0\} \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

con respecto al producto escalar $\langle A, C \rangle = \text{Traza}(A^t C)$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar definido sobre V entonces por ser una forma bilineal simétrica definida positiva, su matriz respecto de una base B de V es

$$M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

■ **Ejemplo 2.4.** En el subespacio $E = L\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ de $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ se define el siguiente producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in E.$$

la matriz asociada a la base $B = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ es

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, \operatorname{sen} x \rangle & \langle 1, \cos x \rangle \\ \langle \operatorname{sen} x, 1 \rangle & \langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \rangle & \langle \operatorname{sen} x, \cos x \rangle \\ \langle \cos x, 1 \rangle & \langle \cos x, \operatorname{sen} x \rangle & \langle \cos x, \cos x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Proposición 2.2. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y B base ortonormal de V . Entonces la matriz del producto escalar en la base B es la matriz identidad.

Por tanto si $(u_1, \dots, u_n)$ y $(v_1, \dots, v_n)$ son las coordenadas de $u, v \in V$ en una base ortonormal se tiene que

- la expresión del producto escalar es

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

- la expresión de la norma es

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

- la expresión de la distancia es

$$d(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$$

■ **Ejemplo 2.5.** La base $B = \{(0, -1, 1), (0, -1, 0), (1, -1, 0)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con respecto a un producto escalar. Determinar la expresión de dicho producto con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Proposición 2.3. (Teorema de Prolongación de la Base Ortonormal)

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y $W \subset V$ un subespacio vectorial. Supongamos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de W tal que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un sistema ortonormal. Entonces existe una base ortonormal de V que contiene a este sistema.

■ **Ejercicio 2.2.** Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos y su producto escalar viene dado por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Se sabe que una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \right\}.$$

Sean $T, S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dos aplicaciones lineales dadas por

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Si denotamos por $d(p, q)$ la distancia existente entre los polinomios p y q y por $\widehat{(p, q)}$ el ángulo que forman dichos polinomios,

- calcular $d(1, x)$, $\cos(\widehat{(1, x)})$, $d(T(1), T(x))$, $\cos(\widehat{(T(1), T(x))})$,
- calcular $d(S(1), S(x))$, $\cos(\widehat{(S(1), S(x))})$.

3. Proyecciones ortogonales.

Definición 3.1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo y sean U, W subconjuntos de V . Diremos que U es ortogonal a W , y lo denotaremos $U \perp W$, si

$$\langle u, w \rangle = 0 \quad (u \perp w) \quad \forall w \in W \text{ y } \forall u \in U$$

Proposición 3.1. Sean U, W son subespacios vectoriales del espacio euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Si $U \perp W$ entonces $W \cap U = \emptyset$
- Sean $B_U = \{u_1, \dots, u_s\}$ base de U y $B_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ base de W . Si

$$\langle u_i, w_j \rangle = 0 \quad \forall u_i \in B_U \text{ y } \forall w_j \in B_W$$

entonces $U \perp W$.

Demostración. a) supongamos existe $v \in V$ tal que

$$v \in W \cap U \implies \begin{cases} v \in W \\ v \in U \end{cases} \implies \langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0$$

b) Sean $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_s u_s \in U$ y $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r \in V$ entonces

$$\langle u, v \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_s u_s, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r \rangle = \sum_{i=1}^s \alpha_i \left(\sum_{j=1}^r \beta_j \langle u_i, v_j \rangle \right) = 0$$

■

Definición 3.2. Dado U un subespacio de un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el conjunto

$$U^\perp = \{v \in V / \langle v, u \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}$$

recibe el nombre de complemento ortogonal de U .

■ **Ejemplo 3.1.** a) En el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 se considera el siguiente producto escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_{ij}), (b_{ij}) \longrightarrow \langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$$

Dado el subespacio $U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A = A^t\}$ vamos a calcular su ortogonal $U^\perp$. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U^\perp$, como $U = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ tenemos que

$$\begin{cases} \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies U^\perp = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / B = -B^t\}$$

b) Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices reales 2×2 , con el producto escalar $\langle A, B \rangle = \text{traza}(A^t B)$. Consideramos el subespacio V generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

y el subespacio W generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

vamos a calcular los complementarios ortogonales de V y W

Puesto que $V = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V^\perp$ entonces

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} < \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > = 0 \\ < \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > = 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} \text{traza} \left[\begin{pmatrix} a+c & -a+c \\ b+d & -b+d \end{pmatrix} \right] = 0 \\ \text{traza} \left[\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{cases} a-b+d+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ b=c \end{cases} \Rightarrow V^\perp = L \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

■ **Ejercicio 3.1.** Comprobar que en el ejemplo 3.4 b) se obtiene

$$W^\perp = L \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■ **Ejercicio 3.2.** Sea $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Sea W el subespacio generado por el vector $(1, 0, 1)$. Hallar una base ortonormal del subespacio $W^\perp$, el subespacio ortogonal de W .

Proposición 3.2. Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo y U, W subespacios vectoriales de V . Entonces

- 1) $V^\perp = 0$ y $0^\perp = V$.
- 2) $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V .
- 3) Si $U \subset W$ entonces $W^\perp \subset U^\perp$
- 4) $(U^\perp)^\perp = U$

Demostración. 2) $U^\perp \neq \emptyset$ ya que $0 \in U^\perp$. Además si $v_1, v_2 \in U^\perp$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces para todo $u \in U$ se tiene que $< \alpha v_1 + \beta v_2, u > = \alpha < v_1, u > + \beta < v_2, u > = 0$ así pues, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U^\perp$ y por tanto $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V .

- 3) Si $v \in W^\perp$ entonces para todo $w \in W$ se tiene que $< v, w > = 0$ en particular como $U \subset W$ se tiene que si $u \in U$ entonces $< v, u > = 0$, es decir, $v \in U^\perp$. ■

Proposición 3.3. Sea U un subespacio de un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo $(V, < \cdot, \cdot >)$ de dimensión finita. Entonces

$$V = U \oplus U^\perp$$

Demostración. Sea $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ una base ortonormal de U . Por el teorema de prolongación de la base ortonormal obtenemos a partir de B una base ortonormal $\overline{B} = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ de V . Es claro que $U \perp L(u_{r+1}, \dots, u_n)$ así que basta con verificar que $U^\perp \subset L(u_{r+1}, \dots, u_n)$.

■

Observar que $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.

Definición 3.3. Sea V un espacio euclídeo, U un subespacio de V y $v \in V$. Puesto que $V = U \oplus U^\perp$, entonces existen $v_1 \in U$ y $v_2 \in U^\perp$ tal que $v = v_1 + v_2$. Llamamos proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio U (resp. $U^\perp$) al vector v_1 (resp. v_2).

Observar que si v_1 es la proyección ortogonal de v sobre U entonces $v - v_1 \in U^\perp$.

■ **Ejemplo 3.2.** En el espacio Euclídeo del ejemplo 2.3 b)(página 7) vamos a calcular la proyección ortogonal, respecto a f , de $\vec{v} = (1, 0, 1)$ sobre $S = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

$$S^\perp = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} - \langle (a, b, c), (1, 0, 0) \rangle = 0 \\ - \langle (a, b, c), (0, 1, 0) \rangle = 0 \end{array} \right\}$$

$$0 = \langle (a, b, c), (1, 0, 0) \rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a - b$$

$$0 = \langle (a, b, c), (0, 1, 0) \rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a + 2b - c$$

Por tanto $S^\perp = L\{(1, 2, 3)\}$.

Como el vector $(1, 0, 1) = \underbrace{2/3(1, 0, 0) - 2/3(0, 1, 0)}_S + \underbrace{1/3(1, 2, 3)}_{S^\perp}$ entonces la proyección ortogonal de $\vec{v} = (1, 0, 1)$ sobre $S = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ es $v_1 = 2/3(1, 0, 0) - 2/3(0, 1, 0) = (2/3, -2/3, 0)$.

■ **Ejercicio 3.3.** En el espacio Euclídeo del ejercicio 3.2 (página 13) calcular la proyección ortogonal del vector $(1, 0, 1)$ sobre $W^\perp$.

Observar que la proyección ortogonal es única, puesto que $V = U \oplus U^\perp$.

Proposición 3.4. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo, U un subespacio de V y $v \in V$. Si $B = \{v_1, \dots, v_r\}$ es una base ortogonal de U entonces la proyección ortogonal de $u_1 \in U$ de v sobre el subespacio U es

$$u_1 = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad \lambda_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Demostración. Puesto que B es base de U y $u_1 \in U$ entonces $u_1 = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle u_1 + u_2, v_i \rangle = \langle u_1, v_i \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^r \langle \lambda_j v_j, v_i \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lambda_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

■

■ **Ejemplo 3.3.** En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$ se define el producto escalar $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0)$. Se pide encontrar la proyección ortogonal de $x^2 - x$ sobre $U = L(x, 1)$.

Podemos resolverlo de dos maneras diferentes

1) Calculamos el espacio ortogonal de $U = L(x, 1)$.

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{p = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] / \langle p, 1 \rangle = 0 \text{ y } \langle p, x \rangle = 0\} \implies \\ &\begin{cases} 0 = \langle p, 1 \rangle = a \langle x^2, 1 \rangle + b \langle x, 1 \rangle + c \langle 1, 1 \rangle \\ 0 = \langle p, x \rangle = a \langle x^2, x \rangle + b \langle x, x \rangle + c \langle 1, x \rangle \end{cases} \implies \\ &\begin{cases} 0 = \langle p, 1 \rangle = 2a \langle x^2, 1 \rangle + 3c \langle 1, 1 \rangle \\ 0 = \langle p, x \rangle = 2b \langle x, x \rangle \end{cases} \implies \\ &U^\perp = \{ax^2 - 2/3a \in \mathbb{R}_2[x] : a \in \mathbb{R}\} = L\{x^2 - 2/3\} \end{aligned}$$

Como $V = U \oplus U^\perp$ entonces $B = \{1, x, x^2 - 2/3\}$ es una base de V y puesto que $x^2 - x = \underbrace{u_1}_U + \underbrace{u_2}_{U^\perp}$ entonces

$$x^2 - x = \underbrace{2/3 \cdot 1 - x}_U + \underbrace{x^2 - 2/3}_{U^\perp} \implies u_1 = 2/3 - x$$

Por tanto $u_1 = 2/3 - x$ es la proyección ortogonal de $x^2 - x$ sobre U . Observar que $x^2 - 2/3$ será la proyección ortogonal de $x^2 - x$ sobre $U^\perp$.

b) Puesto que $B = \{x, 1\}$ es una base ortogonal de U utilizando la proposición tenemos que

$$u_1 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x \implies \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\langle x^2 - x, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{2}{3} \\ \alpha_2 = \frac{\langle x^2 - x, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \implies u_1 = 2/3 - x$$

■ **Ejercicio 3.4.** En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales 2×2 , se considera el producto escalar $\langle A, B \rangle = \text{traza}(A^t \cdot B)$. Obtener una base ortonormal del subespacio $\mathcal{S}$. Calcular la proyección ortogonal de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ al subespacio $\mathcal{S}$ formado por las matrices simétricas reales 2×2 .

Proposición 3.5. Sea V un espacio euclídeo, U un subespacio de V y $v \in V$ tal que $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in U$ y $v_2 \in U^\perp$. Entonces el vector $v_1 \in U$, proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio U , es el vector de U más próximo a v .

Demostración. Para cualquiera que sea $u \in U$ tenemos

$$\begin{aligned} d^2(v, u) - d^2(v, v_1) &= \|u - v\|^2 - \|v - v_1\|^2 = \|u - v_1 + v_1 - v\|^2 - \|v - v_1\|^2 = \\ &= \|u - v_1\|^2 + \|v_1 - v\|^2 + 2 \underbrace{\langle u - v_1, v_1 - v \rangle}_{\substack{\in U \\ \in U^\perp}} - \|v - v_1\|^2 = \|v_1 - u\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto

$$d(v, u_1) \leq d(v, u) \quad \forall u \in U$$

■

Definición 3.4. Sea V un espacio euclídeo, U un subespacio de V , $v \in V$ y $u_1 \in U$ la proyección ortogonal de v sobre U . Se define la distancia del vector v al subespacio U como

$$d(v, U) = \inf\{d(v, u) \text{ para todo } u \in U\} = \|v - u_1\| = \|u_2\|$$

■ **Ejemplo 3.4.** En el ejemplo 3.3 la distancia de $x^2 - x$ al subespacio $U = L(x, 1)$ es:

$$\begin{aligned} d(x^2 - x, U) &= \inf\{d(x^2, x, p) \text{ para todo } p \in U\} = \\ &= \|(x^2 - x) - (2/3 - x)\| = \|x^2 - 2/3\| = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

■ **Ejercicio 3.5.** En el ejercicio 3.4 calcular la distancia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ al subespacio $\mathcal{S}$.

Definición 3.5. Sea V un espacio euclídeo, U un subespacio de V . la aplicación

$$\begin{aligned} P^\perp : V &\longrightarrow U \\ v &\longrightarrow u_1 \end{aligned}$$

donde $u_1 \in U$ es la proyección ortogonal de v sobre U recibe el nombre de proyección ortogonal sobre un subespacio.

Proposición 3.6. La aplicación proyección ortogonal es una aplicación lineal.

Demostración. Sean $v = u_1 + u_2$ y $v' = u'_1 + u'_2$ vectores de V con $u_1, u'_1 \in U$ y $u_2, u'_2 \in U^\perp$

- $P^\perp(v + v') = P^\perp((u_1 + u'_1) + (u_2 + u'_2)) = u_1 + u'_1 + P^\perp(v) + P^\perp(v')$.
- $P^\perp(\alpha v) = P^\perp(\alpha u_1 + \alpha u_2) = \alpha u_1 = \alpha P^\perp(v)$

■

4. Aplicaciones Lineales adjuntas y autoadjuntas entre Espacios Euclídeos.

Definición 4.1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y $f : V \rightarrow V$ y $f^* : V \rightarrow V$ aplicaciones lineales. Entonces se dice que f^* es adjunta de f si para todo $u, v \in V$ se verifica que

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$$

Claramente si f^* es adjunta de f entonces f es adjunta de f^* .

■ **Ejemplo 4.1.** En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual si consideramos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y) = (x - y, 0)$ entonces su aplicación adjunta es $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f^*(x, y) = (x, -x)$ ya que

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), (x', y') \rangle &= \langle (x - y, 0), (x', y') \rangle = xx' - yy' = \\ &= \langle (x, y), (x', -x') \rangle = \langle (x, y), f^*(x', y') \rangle \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.2.** Sea $(\mathbb{P}_2(x), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0)$ y $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - 2/3) \right\}$ una base ortonormal de $(\mathbb{P}_2(x), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Consideramos las aplicaciones $f, g : \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x)$ tales que

$$f(a, b, c) = a \frac{\sqrt{6}}{3}(x^2 - 2/3) = (0, 0, a) \quad \text{y} \quad f^*(a, b, c) = \frac{c}{\sqrt{3}} = (c, 0, 0)$$

donde (a, b, c) son las coordenadas de un polinomio p en la base B .

Como

$$\begin{aligned} \langle f(a, b, c), (a', b', c') \rangle &= \langle (0, 0, a), (a', b', c') \rangle = ca' \\ \langle (a, b, c), g(a', b', c') \rangle &= \langle (a, b, c), (c', 0, 0) \rangle = ca' \end{aligned}$$

entonces obtenemos que $f^* = g$.

Lema 4.1. Sean $f : V \rightarrow V$, $g : V \rightarrow V$ dos aplicaciones lineales. Si para todo $u, v \in V$ se verifica que $\langle u, f(v) \rangle = \langle u, g(v) \rangle$ entonces $f = g$.

Demostración.

$$\langle u, f(v) \rangle = \langle u, g(v) \rangle \iff \langle u, f(v) - g(v) \rangle = \langle u, (f - g)(v) \rangle = 0 \quad \forall u, v \in V$$

en particular si tomamos $u = f(v) - g(v)$ obtenemos que $f(v) - g(v) = 0$ para todo $v \in V$.

■

Teorema 4.1. Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces existe una única aplicación lineal $f^* : V \rightarrow V$ tal que para todo $u, v \in V$ se cumple

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$$

Demostración. a) Unicidad. Supongamos que existiera $g : V \rightarrow V$ tal que para todo $u, v \in V$ también cumpliera que $\langle f(u), v \rangle = \langle u, g(v) \rangle$. Entonces

$$\langle u, g(v) \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle \implies \langle u, g(v) - f^*(v) \rangle = 0 \implies f^*(v) = g(v)$$

b) Existencia. Si $A = (a_{ij}) = M_B(f)$ donde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal entonces la aplicación f^* tal que $M_B(f^*) = A^t$ verifica la condición.

$$\left. \begin{aligned} \langle f(u), v \rangle &= (A(u))^t \cdot G \cdot v \\ \langle u, f^*(v) \rangle &= u^t \cdot G \cdot A^*(v) \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \langle f(u), v \rangle &= u^t A^t \cdot G \cdot v \\ \langle u, f^*(v) \rangle &= u^t \cdot G \cdot A^* v \end{aligned} \right\} \implies A^t \cdot G = G \cdot A^*$$

■

Corolario 4.1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo dimensión finita, $f : V \rightarrow V$ lineal y $A = (a_{ij}) = M_B(f)$ donde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal. Entonces $A^t = (a_{ij})$ es la matriz de la aplicación adjunta f^* en la base B .

■ **Ejemplo 4.3.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la aplicación adjunta de la aplicación lineal $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde $g(x, y, z) = (y, x + y, -z)$.

Lo primero que hacemos es calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ utilizando G-S y siguiendo el ejemplo 2.3 b) obtenemos $B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})\}$. Como

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces su adjunta es la aplicación $g^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

■ **Ejercicio 4.1.** Consideramos el espacio $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x^2)dx$. Calcular la aplicación adjunta D^* , según este producto escalar, de la aplicación derivada $D(p) = p'$.

Proposición 4.1. Dadas $f, g : V \rightarrow V$ aplicaciones lineales se tiene

1) Si $Id : V \rightarrow V$ es la aplicación identidad entonces $(Id)^* = I$

2) $(f + g)^* = f^* + g^*$

3) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

4) Si f es invertible entonces $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

5) $(f^*)^* = f$

Demostración. Basta con elegir la matriz de las aplicaciones en una base ortonormal, las propiedades de la matriz de la suma, composición de aplicaciones y las propiedades de la matriz transpuesta. ■

Definición 4.2. - Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ lineal. f es autoadjunta si $f = f^*$. Es decir, si para todo $u, v \in V$ se cumple

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle.$$

Corolario 4.2. Si f es un endomorfismo autoadjunto entonces $A = (a_{ij}) = M_B(f)$ donde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal entonces A es simétrica.

■ **Ejemplo 4.4.** Consideremos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$. Se sabe que una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \right\}.$$

Sean $T, S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dos aplicaciones lineales dadas por

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_B(S) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Tenemos entonces que la aplicación T es autoadjunta y la adjunta de S viene dada por

$$M_B(S^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

■ **Ejercicio 4.2.** 1) Comprobar que si f y g son autoadjuntas entonces $f + g$ es autoadjunta

2) En el espacio $E = L\{1, \sin x, \cos x\}$ de $C[0, 2\pi]$ se define el siguiente producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \quad \forall f, g \in E$$

Consideramos la aplicación:

$$D_k: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & f^{(k)} \end{array}$$

siendo k) la derivada k -ésima de la función f . Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{N}$ para los que D_k es autoadjunta.

■ **Ejemplo 4.5.** Sean f y g autoadjuntas.

1. Como $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = g \circ f$ entonces $(f \circ g)$ es autoadjunta si y sólo si f y g conmutan.
2. Si f es invertible entonces (f^{-1}) es autoadjunta.

$$\langle f^{-1}(u), f(v) \rangle = \langle f^*(f^{-1}(u)), v \rangle = \langle u, v \rangle$$

Teorema 4.2. Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita y $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Supongamos que el subespacio W es invariante por f entonces $W^\perp$ es invariante por f^*

■ **Dem.** Para todo $w \in W$ tenemos que $f(w) \in W$ y $\langle f(w), u \rangle = 0$ para todo $u \in W^\perp$. Entonces

$$\langle f(w), u \rangle = \langle w, f^*(u) \rangle = 0 \quad \forall w \in W \implies f^*(u) \in W^\perp$$

Obtenemos así que $f^*(W) \subset W$.

Proposición 4.2. Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita y $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal y autoadjunta. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de f y v_1, v_2 son autovectores asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces v_1 y v_2 son vectores ortogonales.

Demostración. Como v_1, v_2 son autovectores asociados a λ_1 y λ_2 tenemos

$$\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle \iff (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Obtenemos así que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

■

Proposición 4.3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces todas las raíces del polinomio característico de $P_f(\lambda)$, son reales. (Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica son reales.)

Teorema 4.3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces existe una base ortonormal B de V tal que la matriz $M_B f$ es diagonal.

Demostración. Como f es autoadjunto existe una base ortonormal B' en la que la matriz de f es simétrica y por lo tanto diagonalizable. Si f tiene un autovalor λ con $m_G(\lambda) = k$ entonces tiene k autovectores linealmente independientes. Usando el método de G-S obtenemos una base ortonormal del autoespacio generalizado para λ . Al repetir el proceso para cada autovalor de f obtenemos una base ortonormal de autovectores. ■

5. Aplicaciones ortogonales.

Definición 5.1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. El endomorfismo $f : V \rightarrow V$ tal que para todo $u, v \in V$ verifica que

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

es decir, conserva el producto escalar, recibe el nombre de aplicación ortogonal.

■ **Ejemplo 5.1.** En el espacio $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = (x, -y)$ es una aplicación ortogonal, ya que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica:

$$\langle f(x, y), f(x', y') \rangle = \langle (x, -y), (x', -y') \rangle = xx' + yy' = \langle (x, y), (x', y') \rangle$$

■ **Ejemplo 5.2.** Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. En este espacio tenemos un producto escalar canónico dado por

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

donde

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3.$$

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ lineal, definida por $T(p) = xp' + p$, donde p' es la derivada de p , es decir, $T(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 4a_3x^3 + 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$. Como

$$\begin{aligned} \langle T(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0), T(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \rangle &= 16a_3b_3 + 9a_2b_2 + 4a_1b_1 + a_0b_0 \neq \\ &\neq a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \langle a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle \end{aligned}$$

T no es una aplicación ortogonal.

■ **Ejercicio 5.1.** Demostrar que si $f : V \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow V$ son aplicaciones ortogonales entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ también son ortogonales y sin embargo su suma ni lo es.

Proposición 5.1. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y f un endomorfismo de V . Sea $A = M_B(f)$, donde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V . Entonces

$$f \text{ es ortogonal} \iff \boxed{A^{-1} = A^t}$$

Demostración. $\implies$)

$$\left. \begin{array}{l} \langle f(u), f(v) \rangle = (A(u))^t \cdot G \cdot A(v) \\ \langle u, v \rangle = u^t \cdot G \cdot v \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \langle f(u), f(v) \rangle = u^t A^t \cdot G \cdot Av \\ \langle u, v \rangle = u^t \cdot G \cdot v \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies A^t \cdot G \cdot A = G$$

y como $G = I$ obtenemos que $A^t A = I$ y por tanto $A^{-1} = A^t$.

$\Leftarrow$) Sea $A^{-1} = A^t$ y $A = M_B(f)$, donde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V , entonces

$$\left. \begin{array}{l} \langle f(u), f(v) \rangle = (A(u))^t \cdot A(v) \\ \langle u, v \rangle = u^t \cdot v \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \langle f(u), f(v) \rangle = u^t A^t \cdot Av \\ \langle u, v \rangle = u^t \cdot v \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

■

■ **Ejemplo 5.3.** En $\mathbb{R}^2$ las simetrías respecto de una recta que pasa por el origen $r \equiv ax + by = 0$ son transformaciones ortogonales ya que la matriz de f en la base ortonormal $B = \{(-b, a), (a, b)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies (M_B(f))^t = (M_B(f))^{-1}$$

Definición 5.2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diremos que A es una matriz ortogonal si es invertible y $A^{-1} = A^t$. Observar que $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.

Proposición 5.2. Sea V un espacio euclídeo y f un endomorfismo ortogonal. Entonces existe f^{-1} y es una aplicación ortogonal. Además

$$f^* = f^{-1}$$

Demostración. Como f es un endomorfismo ortogonal entonces $|M_B(f)| \neq 0$, por tanto, existe f^{-1} .

Puesto que

$$\langle u, v \rangle = \langle f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v)) \rangle = \langle f^{-1}(u), f^{-1}(v) \rangle \implies f \text{ es ortogonal}$$

Además, teniendo en cuenta que la inversa es única, obtenemos

$$\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle f^*(f(u)), v \rangle \implies f^* \circ f = id$$

■

Proposición 5.3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Entonces

$$f \text{ es ortogonal} \iff \|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$$

es decir, si f es una aplicación ortogonal entonces f conserva las longitudes de los vectores.

Demostración. $\implies$) Se sigue de la definición de aplicación ortogonal.

$\impliedby$) Tomamos el vector $u - v \in V$. Como f conserva la norma se sigue:

$$\begin{aligned} \langle f(u - v), f(u - v) \rangle &= \langle u - v, u - v \rangle \\ \langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle - 2\langle f(u), f(v) \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2\langle u, v \rangle \\ -2\langle f(u), f(v) \rangle &= -2\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

y por tanto, f es ortogonal. ■

Corolario 5.1. Si $f : V \rightarrow V$ es una aplicación ortogonal entonces conserva ángulos, normas y distancias.

Proposición 5.4. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Entonces f es ortogonal si y sólo si transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

Demostración. $\implies$) Se concluye de la proposición anterior.

$\impliedby$) Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ bases ortonormales de V con $f(v_i) = v'_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle f(u), f(v) \rangle &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right), f\left(\sum_{j=1}^n y_j v_j\right) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle v'_i, v'_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

y por tanto, f es ortogonal. ■

■ **Ejemplo 5.4.** Los giros en $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y ángulo α en sentido contrario a las agujas del reloj son transformaciones ortogonales ya que transforma la base de $\mathbb{R}^2$ en la base $B = \{(\cos \alpha, \sin \alpha), (-\sin \alpha, \cos \alpha)\}$ y ambas son ortonormales con respecto al producto escalar usual.

Corolario 5.2. *La matriz del cambio de bases ortonormales es ortogonal.*

Teorema 5.1. *Teorema espectral Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Si f es autoadjunto entonces f es diagonalizable en una base ortonormal (diagonalizable a la vez por semejanza y por congruencia).*

■ **Ejemplo 5.5.** Diagonalizar ortogonalmente la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos los autovalores, los autovectores y una base que diagonalize:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 &\implies \begin{cases} \ker(A + 2\lambda I) = L\{(1, 1, 1)\} \\ \ker(A - \lambda I) = L\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \end{cases} \\ &\implies B_V = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

y aplicando G-S obtenemos

$$B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$$

que es una base ortonormal que diagonaliza a la vez por congruencia y por semejanza.

Proposición 5.5. *Los autovalores reales de una aplicación ortogonal son 1 o -1.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de f y $v \neq 0 \in V$ un autovector asociado a λ , es decir, $f(v) = \lambda v$. Entonces como f es ortogonal tenemos:

$$\|f(v)\| = |\lambda| \|v\| \implies \begin{cases} |\lambda| = 1 \\ \text{o} \\ |\lambda| = -1 \end{cases}$$

■

6. Aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación ortogonal cuya matriz respecto de una base ortogonal es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puesto que $A^t = A^{-1}$, se sigue entonces que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} d = a|A| \\ b = -c|A| \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} a & -c|A| \\ c & |A| \end{pmatrix}$$

Como además $|A| = \pm 1$ distinguimos dos casos:

1. Si $|A| = 1$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad a^2 + c^2 = 1$$

Por tanto, existe un único $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos \alpha$ y $c = \sin \alpha$. Luego la aplicación es un giro centrado en el origen y de ángulo α

2. Si $|A| = -1$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} \quad a^2 + c^2 = 1$$

En este caso la matriz A es simétrica y por tanto diagonalizable. Sus autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, (ya que $|A| = -1$). Por tanto, la base formada por los autovectores $v_1 \in \ker(A - I)$ y $v_2 \in \ker(A + I)$ es una base ortogonal

$$\langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle u_1, -u_2 \rangle = -\langle u_1, u_2 \rangle \implies \begin{cases} \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \\ \langle f(u_1), f(u_2) \rangle = 0 \end{cases}$$

Luego la aplicación es una simetría respecto de la recta $L\{u_1\}$.