$\boxed{8.1}$ **Junio 06.** En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ dotado del producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$, se sabe que $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ es una base ortonormal. Se pide:

a) Halla la matriz de dicho producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ en la base B_c de $\mathbb{R}_2[x]$, siendo $B_c = \{1, x, x^2\}$.

b) Dado el subespacio $U = L\{(1 + 2x + 3x^2\}$, determina el espacio $U^\perp$ (complemento ortogonal de U). Obtén una base ortonormal de $U^\perp$.

c) Halla la mínima distancia del vector x^2) al subespacio $U^\perp$.

d) Se considera la aplicación $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por: $\forall p \in \mathbb{R}_2[x], T(w) =$ proyeccion ortogonal de p sobre $U^\perp$. Estudia si T es lineal y, en caso afirmativo, determina la matriz asociada a T en una base (de $\mathbb{R}_2[x]$) a elegir ¿Puede ser dicha matriz ortogonal?

$\boxed{8.2}$ **Mayo 06.** En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$, se sabe que $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es una base ortonormal. Se pide:

a) Halla la matriz de dicho producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ en la base B_c de $\mathbb{R}^3$, siendo $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

b) Dado el subespacio $U = L\{(1, 2, 3)\}$, determina el espacio $U^\perp$ (complemento ortogonal de U). Obtén una base ortonormal de $U^\perp$.

c) Halla la mínima distancia del vector $v = (0, 0, 1)$ al subespacio $U^\perp$.

d) Se considera la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por: $\forall w \in \mathbb{R}^3, T(w) =$ proyeccion ortogonal de w sobre $U^\perp$. Estudia si T es lineal y, en caso afirmativo, determina la matriz asociada a T en una base (de $\mathbb{R}^3$) a elegir ¿Puede ser dicha matriz ortogonal?

$\boxed{8.3}$ **feb. 06.** Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se define la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Se pide:
a) Determina el conjunto de valores de los parámetros α, β para los que f define un producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$. Representa dicho conjunto en el plano (α, β).

Para los tres apartados siguientes (todos ellos referidos al producto escalar definido por f), supondremos que $\alpha = 0$ y $\beta = 2$.
b) Calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.
c) Halla la mínima distancia del polinomio $p(x) = 1$ al subespacio $S = \mathcal{L}\{x, x^2\}$.
d) Obtén el ángulo entre el polinomio $p(x) = 1$ y el subespacio $S^\perp$

$\boxed{8.4}$ **Sep 05** En el espacio euclídeo de $M_2(\mathbb{R})$ dotado del producto escalar $< \cdot, \cdot >$, se sabe que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal. Se pide:

1) Hallar la matriz del producto escalar $< \cdot, \cdot >$, en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

2) Dado el subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, determinar su complementario ortogonal.

3) Hallar la distancia (mínima) de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ al subespacio S.

4) Hallar le ángulo entre la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y el subespacio S.

$\boxed{8.5}$ **Junio 05.** En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$, dotado del producto escalar usual, indica y razona si cada una de las aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definidas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, respectivamente por

$$f(x, y, z) = \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \right)$$

$$g(x, y, z) = (x.y + z, x - y - 2z, x + y + z)$$

$$h(x, y, z) = ((7x - 2y - 5z)/6, (-2x + 2y - 2z)/6, (-5x - 2y + 7z)/6)$$

es a) lineal, b) automorfismo, c) diagonalizable en $\mathbb{R}$, d) ortogonal y e) autoadjunta.

$\boxed{8.6}$ **Mayo 05.** En el espacio vectorial euclídeo real $(V, < \cdot, \cdot >)$ se considera la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y el subespacio $S = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3\}$.

La matriz del producto escalar $< \cdot, \cdot >$ en la base B es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Prueba que A, efectivamente, puede ser un producto escalar.
2. Halla una base ortonormal del subespacio S.
3. Halla la distancia del vector v_3 al subespacio S.
4. Determina $S^{\perp}$
5. Determina el ángulo que forman el vector v_3 y el subespacio S.

$\boxed{8.7}$ **Junio 04** Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, mediante

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overline{x}^t A \overline{y}$$

donde $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ son la expresión de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ por medio de sus coordenadas en la base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Se pide

1. Demostrar que f define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.
2. Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, respecto del producto escalar f
3. Halla la proyección ortogonal del vector $w = b_1 + b_2 + b_3$ sobre $S = L\{b_1 + b_2, b_2 - b_3\}$.
4. Halla la forma reducida de Jordan de A y una matriz regular P tal que $J = P^{-1}.A.P$

$\boxed{8.8}$ **Mayo 04** Sea $(E_n^{\mathbb{R}}, < \cdot, \cdot >$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n, con $n \geq 2$, sobre $\mathbb{R}$ y $f : E_n^{\mathbb{R}} \longrightarrow E_n^{\mathbb{R}}$ un endomorfiamo definido por

$$f(v) = < v, u > u - v$$

siendo $u \in E_n^{\mathbb{R}}$ un vector unitario dado.

1. Demostrar que $f(v) = 0$ sí y solo si $v = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Identifica $f \circ f$.
3. Interpreta geométricamente f si $n = 2$.
4. ¿Cuál es la forma reducida de Jordan de f si $n = 2$.
5. ¿Cuál es la matriz de f en la base ortonormal $B = \{e_1 = u, e_2, \ldots, e_n\}$
6. Si $E_n^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ y $< \cdot, \cdot >$ es producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$, probar que f es ortogonal o dar un contraejemplo que pruebe que no lo es.

$\boxed{8.9}$ **Feb. 01** Sea $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar definido por $\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Construir una aplicación lineal $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dando su matriz asociada en la base $\{1, x, x^2\}$, que cumpla las siguientes condiciones:

(i) S es autoadjunta

(ii) 1 es autovalor de S

(iii) $\ker S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ p \equiv \text{cte}\}$

(iv) $S \circ S = 3S$ para todo $v \in V$ donde V es el subespacio ortogonal al autoespacio asociado al autovalor 1

$\boxed{8.10}$ **Mayo. 01** Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(1) **(3 puntos)** Probar que la aplicación f define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

(2) **(4 puntos)** Calcula una base ortonormal, para este producto escalar, en $\mathbb{R}^3$.

(3) **(3 puntos)** Calcular la distancia $d(\vec{u}, H)$, según el producto escalar f, siendo $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $H = L\{(1, 2, 3)\}$.

$\boxed{8.11}$ **Sept. 01** En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que tres, se consideran los conjuntos

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \; p(x) = a + bx^3; \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \; p(x) = (\lambda - \mu) + \mu x + \mu x^2 + (\lambda + \mu)x^3; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Se pide:

a) (4 puntos) Probar que U y V son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$, y calcular una base de cada uno de ellos. Hallar una base de cada uno de los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

b) (6 puntos) Considerando en $\mathbb{R}_3[x]$ el producto escalar definido por

$$< a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

calcular la distancia (mínima) del polinomio $p(x) = 1 + 3x$ al subespacio V.

$\boxed{8.12}$ **Febrero 00** Sea $B = \{e^{-nx}, e^{-(n-1)x}, \cdots, e^{-x}, 1, e^x, \cdots, e^{(n-1)x}, e^{nx}\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ una base de un espacio vectorial real V con las operaciones usuales de suma, y producto por escalar, de funciones reales de variable real. Sea T

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \longrightarrow & V \\ & f & \longmapsto & f'' - f' - 2f \end{array}$$

(a) **(3 puntos)** Demuestra que T es lineal.

(b) **(3 puntos)** Halla la matriz asociada a T en la base B

(c) **(4 puntos)** Calcula una base ortogonal del $\ker T$ para el producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.