

**Problemas de Formas Bilineales y Cuadráticas
propuestos en exámenes**

8.1 Mayo 06. Se considera la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ mediante

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Se pide:

- a) **[5 Ptos.]** Diagonaliza Q según los valores del parámetro a .
- b) **[5 Ptos.]** Calcula una base de $\mathbb{R}^3$ en la cual la expresión de Q sea la correspondiente a la forma diagonal obtenida en el apartado anterior.

8.2 Septiembre 06.) Dada la forma cuadrática

$$Q(x, y, z, t) = ax^2 + xy + az^2 - 4zt + t^2$$

calcula su índice de positividad, negatividad y nulidad así como una base en la que la matriz de Q sea diagonal, según los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.

8.3 Mayo 05. Consideramos la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ siguiente:

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + z^2 + at^2 + 2axy + 2xz + 2yz + 2xt + 2yt + 2azt$$

Calcula la signatura (índices de positividad, negatividad y nulidad) en función del parámetro $A \in \mathbb{R}$.

8.4 (Jun 99.-) Sea $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, la forma cuadrática dada por

$$Q(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 + \alpha \\ 1 & -2 & 2 + \alpha & 2 + \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

- Calcular la signatura de Q en función de los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Para aquellos valores de α que hacen que Q sea definida positiva, encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de Q sea diagonal.

8.5 Jun 98.- Consideramos la forma cuadrática:

$$Q(x, y, z) = ax^2 - 2xy + ay^2 + 2yz + az^2 \text{ donde } a \in \mathbb{R}.$$

Calcular la signatura de la forma cuadrática Q en función de los valores de a .

8.6 Sep 98.- Sean $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal, cuyas matrices respecto de una base B coinciden, es decir, $A = M_B(Q) = M_B(T)$. Definamos $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 0\}$.

- i) (6 puntos) Demostrar que si Q es semidefinida, entonces $H = \ker T$

ii) (4 puntos) Encontrar una de tales matrices A para la que $\ker T \neq H$

8.7 **Mayo 97.-** Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma & \alpha \\ 1 & \gamma & \beta + 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

- a) Calcular una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de Q sea diagonal.
b) Determinar la signatura y el rango de Q en función de los parámetros α, β, γ .