

Diagonalización y Formas canónicas en la semejanza

Antonia González Gómez
Dep. de Matemáticas Aplicadas a los Recursos Naturales
ETSI de Montes
UPM

Índice

1. Introducción	2
2. Autovalores, autovectores y autoespacios	2
3. polinomio característico de un endomorfismo	5
4. Diagonalización de Endomorfismos y matrices cuadradas	7
5. Endomorfismos Nilpotentes	9
6. Autoespacios generalizados. Teorema de descomposición de Jordan	23
7. Forma canónica de Jordan de un endomorfismo	33
8. Polinomios de matrices y teorema de Cayley-Hamilton	36

1. Introducción

Dentro de las aplicaciones lineales nos vamos a interesar por los endomorfismos, es decir, las aplicaciones lineales donde el espacio vectorial inicial coincide con el espacio vectorial final: $f : V \rightarrow V$.

Nos preguntamos si existe alguna base de V en la que la expresión del endomorfismo sea más sencilla que respecto de otras, en concreto si existe una base B de V donde la expresión de $f : V \rightarrow V$ sea de la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base B y $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Cuando ocurre esto el endomorfismo recibirá el adjetivo de diagonalizable.

Definición 1.1. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que el endomorfismo $T : V \rightarrow V$ es diagonalizable si existe una base B de V tal que la representación de T en dicha base es una matriz diagonal D .

Si $A = M_B(T)$ diremos que A es diagonalizable si T es diagonalizable.

Definición 1.2. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. (A y D son semejantes).

2. Autovalores, autovectores y autoespacios

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo.

Definición 2.1. Decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **autovalor** del endomorfismo T si existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$.

■ Ejemplos 2.1.

- $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = 0$ para todo $v \in V$.
- $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = v$ para todo $v \in V$.
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(x, y) = (y, x)$.
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(x, y) = (y, -x)$.

Definición 2.2. Diremos que $v \in V$ es un **autovector** de T si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Se dice que v es un autovector asociado al autovalor λ .

■ Ejemplos 2.2.

- $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = 0$ para todo $v \in V$.
- $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = v$ para todo $v \in V$.
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(x, y) = (y, -x)$.

Observaciones

- a) 0 es siempre autovector para todo autovalor.
- b) Cada autovector $v \neq 0$ está asociado a un único autovalor.
- c) Cada autovalor está asociado a más de un autovector.
- d) 0 solo es autovalor si la aplicación no es inyectiva.

Proposición 2.1. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo.

1. Dado v autovector asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\alpha \in \mathbb{K}$ es autovector asociado al autovalor λ . Por tanto $L(v)$ queda invariante mediante T , es decir, $T(L(v)) = L(v)$.
2. λ es un autovalor de $T \iff$ el endomorfismo $T - \lambda i$ no es inyectivo, donde $i : V \rightarrow V$ es la aplicación identidad.
3. Si T no es inyectivo $\iff \lambda = 0$ es autovalor de T .

Definición 2.3. Llamamos **autoespacio** asociado al autovalor λ al conjunto

$$E(\lambda) = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}.$$

■ Ejemplos 2.3.

- $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = 0$ para todo $v \in V$.
- $T : V \rightarrow V$ con $T(v) = v$ para todo $v \in V$.
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(x, y) = (y, x)$.

Proposición 2.2. $E(\lambda)$ es un subespacio vectorial de V .

Proposición 2.3. Sea $T : V \rightarrow V$ una aplicación lineal y sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dos autovalores de T entonces $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{0\}$

Demostración. Reducción al absurdo:

Supongamos existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $v \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ entonces

$$\left. \begin{array}{l} v \in E(\lambda_1) \\ v \in E(\lambda_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T(v) = \lambda_1 v \\ T(v) = \lambda_2 v \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 !! \\ v = 0 !! \end{array} \right\}$$

■

Observar que

$$E(\lambda_i) = \ker(T - \lambda_i)$$

y que $0 \in E(\lambda)$

Proposición 2.4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalores de T todos distintos entre si. Sean $x_1, \dots, x_m$ autovectores de T asociados a los autovalores anteriores con $x_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, m$, entonces $\{x_1, \dots, x_m\}$ son linealmente independientes. ($m \leq n$)

Demostración. Hacemos inducción:

1. $n = 2$. Obvio por la proposición anterior.
2. Supongamos cierto para $n = k$
3. Sean ahora $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ autovectores de T asociados a los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ y $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, \dots, k+1$ tal que $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = 0$. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} T(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i) = 0 \\ \lambda_{k+1}(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i T(x_i) = 0 \\ \lambda_{k+1}(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \lambda_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \lambda_{k+1} x_i = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} -\alpha_1 \lambda_1 x_1 - \dots - \alpha_k \lambda_k x_k - \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} & = & 0 \\ \alpha_1 \lambda_{k+1} x_1 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} & = & 0 \\ \hline \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k & = & 0 \end{array}$$

Y usando la hipótesis de inducción llegamos

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \forall i = 1, \dots, k \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_{k+1}} \alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, k$$

Por tanto si

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, k+1$$

■

Corolario 2.1. Si V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo el número máximo de autovalores distintos que tiene T es n .

Definición 2.4. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Decimos $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A si existe una matriz columna no nula $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ tal que $AX = \lambda X$.

Definición 2.5. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Decimos que una matriz columna $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ es un autovector de la matriz A asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ si $AX = \lambda X$.

3. polinomio característico de un endomorfismo

Teorema 3.1. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo y $A = M_B(T)$. Entonces

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ es un autovalor de } T \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $T \iff \exists v \in V, v \neq 0$ tal que

$$T(v) = \lambda v \iff (T - \lambda i)(v) = 0 \iff v \in \ker(T - \lambda i) \iff \text{rag}(T - \lambda i) < n$$

■

Proposición 3.1. $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $A \in M_n(\mathbb{K}) \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Definición 3.1. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , $T : V \rightarrow V$ y $A = M_B(T)$. Se llama **polinomio característico** de T al polinomio

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_0$$

Observaciones

- La definición del polinomio característico no depende de la matriz asociada al endomorfismo elegida, es decir, si $C = M_{B'}(T)$ se tiene que $C = P^{-1}AP$ donde $P = M_{B'B}C$ y por tanto

$$p_T(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

- el termino independiente del polinomio característico es $P_T(0) = \det A$
- El coeficiente de λ^{n-1} es la traza de la matriz A : $c_{n-1} = \text{tr} A$.

- $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $T \iff \lambda_0$ es una raíz del polinomio característico de T , es decir si y solo si $p_T(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 I) = 0$.

■ **Ejercicios 3.1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y autoespacios del siguiente endomorfismo

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x, y) = (x + y, y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (x + y - z, x + y + z, -x + y + z)$
3. $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ con $f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + (3a + b + 6c)x + (a + b + 3c)$

Definición 3.2. Se llama multiplicidad algebraica de un autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, y lo denotamos por $M_A(\lambda_0)$, a su multiplicidad como raíz del **polinomio característico**.

Definición 3.3. Se llama **polinomio característico** de la matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ al polinomio $p_A = \det(A - \lambda I)$.

Proposición 3.2. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ Entonces:

$$\lambda_0 \text{ es autovalor de } A \iff P_A(\lambda_0) = 0$$

■ **Ejercicios 3.2.** ■ Calcular los autovalores, autoespacios y polinomio característico de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- sabemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$$

admite como autovectores $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 2)$ y $(0, 1, -1)$. Hallar los elementos de dicha matriz así como sus autovalores.

Proposición 3.3. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n , $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo y $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ un autovalor de T . Si la multiplicidad de λ_0 como raíz de $p_T(\lambda)$ (multiplicidad algebraica) es $M_A(\lambda_0) = k$, entonces

$$1 \leq \dim E(\lambda_0) \leq k$$

Demostración. Es evidente que al ser $E(\lambda_0)$ un subespacio vectorial entonces $1 \leq \dim E(\lambda_0)$.

Para el otro lado de la desigualdad supongamos que $\dim E(\lambda_0) = p$. Tomamos $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de $E(\lambda_0)$ y la prolongamos a $B' = \{v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_n\}$ hasta obtener base de V . Entonces

$$p_T(\lambda_0) = |\mathcal{M}_{B'}(T - \lambda_0)| = \left| \begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & & & 0 & \end{array} \right| = (\lambda - \lambda_0)^p q(\lambda)$$

■

4. Diagonalización de Endomorfismos y matrices cuadradas

Teniendo en cuenta la definición 1.1 se tiene que

Proposición 4.1. *Un endomorfismo T de V es diagonalizable $\iff$ existe $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V formada por autovectores de T .*

De la proposición 2.4 se deduce

Proposición 4.2. *Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalores de T todos distintos entre si. Entonces la suma de los autoespacios es directa, es decir,*

$$E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_m) = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m) \subseteq V$$

Teniendo en cuenta las definiciones 1.1 y 1.2

Proposición 4.3. *Si T es un endomorfismo diagonalizable y A es la matriz de T en un base B de V , $A = M_B T$, entonces A es diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$ y D una matriz diagonal tal que $D = P^{-1}AP$. Recíprocamente si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es una matriz diagonalizable, cualquier endomorfismo cuya matriz en una base B de V se represente por A es diagonalizable.*

Definición 4.1. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor del endomorfismo $T : V \rightarrow V$. Llamamos multiplicidad geométrica de $\lambda \in \mathbb{K}$, $M_G(\lambda)$, a la dimensión de su autoespacio.

$$\dim(E(\lambda_i)) = M_G(\lambda)$$

Teorema 4.1. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con $\dim V = n \geq 1$. Un endomorfismo $T : V \rightarrow V$ es diagonalizable si y solo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- i) El polinomio característico $P_T(\lambda)$ tiene n raíces (autovalores) en el cuerpo $\mathbb{K}$, iguales o distintas. Es decir, si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son las raíces de $P_T(\lambda)$ entonces

$$\sum_{i=1}^m M_A(\lambda_i) = n$$

- ii) Para todo $i = 1, \dots, m$ se verifica que

$$m_A(\lambda_i) = m_G(\lambda_i)$$

Corolario 4.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con $\dim V = n$, si T tiene n autovalores distintos dos a dos entonces T es diagonalizable.

■ Ejercicios 4.1.

- 1.- Estudiar si el endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definido por

$$T(x, y, z, p) = (2x, 2y, -x - y + z, p)$$

es diagonalizable.

- 2.- Estudiar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

- 3.- Estúdiese según los valores de α la posibilidad de diagonalizar las siguientes matrices en $\mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 - \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha + 2 & -\alpha & \alpha - 1 \\ \alpha + 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4.- Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + ax_2, x_2, ax_3 + x_4, -x_3 - ax_4)$$

¿Para qué valores de a , T es diagonalizable?

5.- La posición de una partícula en el espacio en el tiempo $n + 1$ viene dado por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 3 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Estudiar su posición a lo largo del tiempo.

6.- Encontrar dos funciones $x(t)$, $y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ y cumpliendo que

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1/2 x(t) - 1/2 y(t) \\ y'(t) &= -1/2 x(t) + 1/2 y(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ -1 & c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de la que se conocen los autovectores

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar los autovalores λ_1 y λ_2 correspondientes a los autovectores dados, así como los parámetros a, b, c, d .

b) Hallar el tercer autovalor y los autovectores correspondientes.

8.- En un bosque de robles se ha detectado la presencia de tres especies de hongos perjudiciales para los árboles a las que denotaremos por a, b y c. Tras el tratamiento durante un mes de un producto específico, al final del mes se observa, en cada roble, que solo quedan la mitad de la cantidad inicial de hongos de tipo a que había principios de mes, el 20 por ciento se ha transformado en hongos del tipo b y el resto en hongos del tipo c. De la cantidad de hongos que había al principio del mes del tipo b se han transformado a final de mes el 20 por ciento en hongos del tipo a y el 40 por ciento en hongos del tipo c. De la cantidad de hongos que había al principio del mes del tipo c a final de mes sigue quedando el 80 por ciento y el resto se ha transformado en hongos del tipo a. Suponiendo que se tienen inicialmente 350 hongos del tipo a 490 hongos del tipo b y 210 hongos del tipo c ¿Cuál será la población de hongos a largo plazo en cada roble?

5. Endomorfismos Nilpotentes

Definición 5.1. Diremos que $f \in \text{End}(V)$ es un **nilpotente** si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\text{-veces}} = f^k = 0.$$

Definición 5.2. Sea f nilpotente. Llamamos **orden de nilpotente** de f al mínimo $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$, es decir

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n = 0\}$$

Definición 5.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces A es una **matriz nilpotente**. Si p es tal que $A^k = 0$ y $A^{k-1} \neq 0$, se dice que A es **nilpotente de orden k** .

■ **Ejemplos 5.1.** 1. $T \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, definido por:

$$T(x, y) = (y, 0)$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $T \in \text{End}(\mathbb{R}_n[x])$, definido por:

$$T(p(x)) = p'(x)$$

Proposición 5.1. Sea $T \in \text{End}(V)$ y B una base de V . Entonces

$$T \text{ es nilpotente} \iff M_B T \text{ es nilpotente.}$$

Observaciones.

1. Sea T un endomorfismo nilpotente de orden de nilpotencia p , entonces

$$\exists v \in V / T^{p-1}(v) \neq 0$$

2. Sea T un endomorfismo nilpotente de orden de nilpotencia p , entonces

$$T^m = 0, \forall m \geq pk$$

Proposición 5.2. Los endomorfismos nilpotentes sólo tienen al cero como autovalor.

Proposición 5.3. Todo f endomorfismo nilpotente con $f \neq 0$ es no diagonalizable.

Demostración. Como el único autovalor es $\lambda = 0$ entonces $p_f(\lambda) = \lambda^k q(\lambda)$

$$\begin{cases} m_A(0) = k < \dim V = n \implies f \text{ no es diagonalizable} \\ m_A(0) = k = \dim V = n \implies \begin{cases} m_G(0) = m_A(0) = \implies f \equiv 0 \\ m_G(0) < m_A(0) = \implies f \text{ no es diagonalizable} \end{cases} \end{cases}$$

■

Proposición 5.4. Sea T un endomorfismo nilpotente no nulo y sea k su orden de nilpotencia. Entonces se tiene el siguiente encadenamiento:

$$\{0\} = H_0 \subsetneq \ker T \subsetneq \ker T^2 \subsetneq \overbrace{\dots}^{k \text{ veces}} \subsetneq \ker T^k = \ker(T \circ \dots \circ T) = V$$

Proposición 5.5. Sea T un endomorfismo nilpotente no nulo y sea k su orden de nilpotencia. Dado $v \in \ker T^k$ con $v \notin \ker T^{k-1}$ se tiene que $\{T^{k-1}(v), T^{k-2}(v), \dots, v\}$ es un conjunto linealmente independiente.

■ Ejemplos 5.2.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 5.4 (Matriz **Elemental Nilpotente**). Llamaremos **Matriz Elemental Nilpotente** de orden k a la matriz cuyos elementos son todos nulos excepto los situados inmediatamente encima de la diagonal principal que son unos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz **elementales Nilpotentes** de orden k

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

■ Ejemplos 5.3.

sea $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$M_{B_c}f = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}f^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues f es nilpotente de orden 3.

$$\begin{aligned} \ker f &= L\{(1, 0, 0, 0, 0)(0, 1, -1, 0, 0)\} \\ \ker f^2 &= L\{(1, 0, 0, 0, 0)(0, 1, 0, 0, 0)(0, 0, 1, 0, 0)(0, 0, 0, 3, -1)\} \\ \ker f^3 &= \mathbb{R}^5 \end{aligned}$$

Observar que:

$$\{0\} \subsetneq \ker f \subsetneq \ker f^2 \subsetneq \ker f^3 = \mathbb{R}^5.$$

Sea W_1 un subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\ker f^3 = \ker f^2 \oplus W_1$$

Puesto que $\dim \ker f^3 = 5$ y $\dim \ker f^2 = 4$ se tiene que $\dim W_1 = 1$. Podemos suponer entonces

$$W_1 = L\{(0, 0, 0, 1, 0)\} = \{e_4\}.$$

Observar que

$$\begin{cases} e_4 \in \ker f^3 & \iff f^3(e_4) = 0 \\ e_4 \notin \ker f^2 & \iff f^2(e_4) \neq 0. \end{cases}$$

Sea W_2 un subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\ker f^2 = \ker f \oplus W_2$$

Puesto que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim \ker f^2 = 4 \\ \dim \ker f = 2 \end{array} \right\} \implies \dim W_2 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f^2(f(e_4)) = 0 & \implies f(e_4) \in \ker f^2 \\ f(f(e_4)) \neq 0 & \implies f(e_4) \notin \ker f \end{array} \right\}$$

por tanto, $f(e_4) \in W_2$. Tomamos ahora un vector $v \in \ker f^2$ y $v \notin \ker f$ tal que $\{f(e_4), v\}$ sea una base de W_2 por ejemplo

$$W_2 = L\{f(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 3, -1)\} = L\{f(e_4), v\}.$$

Sea W_3 un subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\ker f = \{0\} \oplus W_3$$

Puesto que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim \ker f = 2 \\ \dim \{0\} = 0 \end{array} \right\} \implies \dim W_3 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(f^2(e_4)) = 0 & \implies f^2(e_4) \in \ker f \\ f(f(v)) = 0 & \implies f(v) \in \ker f \end{array} \right\}$$

por tanto, $f^2(e_4), f(v) \in W_3$. Tomamos ahora por ejemplo

$$W_3 = L\{f^2(0, 0, 0, 1, 0), f(0, 0, 0, 3, -1)\} = L\{f^2(e_4), f(v)\}.$$

$$\begin{aligned} \ker f^3 &= \ker f^2 \oplus L\{e_4\} \\ \ker f^2 &= \ker f \oplus L\{f(e_4), (v)\} \\ \ker f &= \{0\} \oplus L\{f^2(e_4), f(v)\} \end{aligned}$$

Así pues

$$\mathbb{R}^5 = \ker f^3 = L\{f^2(e_4), f(v)\} \oplus L\{f(e_4), (v)\} \oplus L\{e_4\}.$$

Por tanto

$$B = \{f^2(e_4), f(e_4), (e_4)f(v), (v)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^5$ y la matriz del endomorfismo f en dicha base es

$$M_B f = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

■ Ejemplos 5.4.

Sea $f : \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$ un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$M_{B_c}f = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}f^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}f^4 = 0$$

Así pues f es nilpotente de orden 4.

$$\ker f = L\{e_1, e_5 - e_2 + e_3 - e_4, e_8 + e_6 - e_7, e_{10} - e_9\}$$

$$\ker f^2 = L\{e_1, e_2, e_6, e_{10}, e_9, e_5 + e_3 - e_4, e_8 - e_7, \}$$

$$\ker f^3 = \{e_1, e_2, e_3, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_9, e_5 - e_4\}$$

$$\ker f^4 = \mathbb{R}^{10}$$

Tenemos así la siguiente cadena de núcleos

$$\{0\} \subsetneq \ker f \subsetneq \ker f^2 \subsetneq \ker f^3 \subsetneq \ker f^4 = \mathbb{R}^{10}.$$

Sea W_1 un subespacio de $\mathbb{R}^{10}$ tal que

$$\mathbb{R}^{10} = \ker f^4 = \ker f^3 \oplus W_1$$

Puesto que

$$\left. \begin{array}{l} \dim \ker f^4 = 10 \\ \dim \ker f^3 = 9 \end{array} \right\} \implies \dim W_1 = 1$$

Luego si $B_{W_1} = \{v\}$ es una base de W_1 entonces v debe de verificar

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in \ker f^4 \iff f^4(v) = 0 \\ v \notin \ker f^3 \iff f^3(v) \neq 0 \end{array} \right.$$

podemos entonces suponer que $v = e_4$.

$$B_{W_1} = \{e_4\}.$$

Sea W_2 un subespacio de $\mathbb{R}^{10}$ tal que

$$\ker f^3 = \ker f^2 \oplus W_2$$

Puesto que

$$\left. \begin{array}{l} \dim \ker f^3 = 9 \\ \dim \ker f^2 = 7 \end{array} \right\} \implies \dim W_2 = 2.$$

Teniendo en cuenta que

$$\left. \begin{array}{l} f^3(f(e_4)) = f^4(e_4) = 0 \implies f(e_4) \in \ker f^3 \\ f^2(f(e_4)) = f^3(e_4) \neq 0 \implies f(e_4) \notin \ker f^2 \end{array} \right\} \implies f(e_4) \in W_2$$

buscamos ahora un vector $v \in \mathbb{R}^{10}$ tal que $\{f(e_4), v\}$ sea una base para W_2 . Observar que $v \in \ker f^3$, es decir, $f^3(v) = 0$ y $v \notin \ker f^2$, esto es, $f^2(v) \neq 0$. Por tanto, podemos tomar $v = e_7$.

$$B_{W_2} = L\{f(e_4), e_7\}.$$

Sea W_3 un subespacio de $\mathbb{R}^{10}$ tal que

$$\ker f^2 = \ker f \oplus W_3$$

Como

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim \ker f^2 = 7 \\ \dim \ker f = 4 \end{array} \right\} \implies \dim W_3 = 3$$

y

$$\left. \begin{array}{l} f^2(f^2(e_4)) = f^4(e_4) = 0 \implies f^2(e_4) \in \ker f^2 \\ f(f^2(e_4)) = f^3(e_4) \neq 0 \implies f^2(e_4) \notin \ker f \\ f^2(f(e_7)) = f^3(e_7) = 0 \implies f(e_7) \in \ker f^2 \\ f(e_7) \neq 0 \implies f(e_7) \notin \ker f \end{array} \right\} \implies f^2(e_4), f(e_7) \in W_3$$

Buscamos ahora un vector $v' \in \mathbb{R}^{10}$ tal que $\{f^2(e_4), f(e_7), v'\}$ sea una base para W_3 . Observar que $v' \in \ker f^2$, es decir, $f^2(v') = 0$ y $v' \notin \ker f$, esto es, $f(v') \neq 0$. Por tanto, podemos tomar $v' = e_9$ y

$$B_{W_3} = L\{f^2(e_4), f(e_7), e_9\}.$$

Sea W_4 un subespacio de $\mathbb{R}^{10}$ tal que

$$\ker f = \{0\} \oplus W_4$$

Como $\dim \ker f = 4 \implies \dim W_4 = 4$ y

$$\left. \begin{array}{l} f(f^3(e_4)) = f^4(e_4) = 0 \implies f^3(e_4) \in \ker f \\ f(f^2(e_7)) = f^3(e_7) = 0 \implies f^2(e_7) \in \ker f \\ f(f(e_9)) = f^2(e_9) = 0 \implies f(e_9) \in \ker f \end{array} \right\} \implies f^3(e_4), f^2(e_7), f(e_9) \in W_4$$

Buscamos un vector $v'' \in \mathbb{R}^{10}$ tal que $\{f^3(e_4), f^2(e_7), f(e_9), v''\}$ sea una base para W_4 . Observar que $v'' \in \ker f$, es decir, $f(v'') = 0$. Por tanto podemos tomar

$$B_{W_4} = L\{f^3(e_4), f^2(e_7), f(e_9), e_{10} - e_9\}.$$

Así pues como

$$\begin{aligned} \ker f^4 &= \ker f^3 \oplus L\{e_4\} \\ \ker f^3 &= \ker f^2 \oplus L\{f(e_4), e_7\} \\ \ker f^2 &= \ker f \oplus L\{f^2(e_4), f(e_7), e_9\} \\ \ker f &= \{0\} \oplus L\{f^3(e_4), f^2(e_7), f(e_9), e_{10} - e_9\} \end{aligned}$$

llegamos a

$$\mathbb{R}^{10} = \ker f^4 = L\{e_4\} \oplus L\{f(e_4), e_7\} \oplus L\{f^2(e_4), f(e_7), e_9\} \oplus L\{f^3(e_4), f^2(e_7), f(e_9), e_{10} - e_9\}.$$

Por tanto

$$B = \{f^3(e_4), f^2(e_4), f(e_4), e_4, f^2(e_7), f(e_7), e_7, f(e_9), e_9, e_{10} - e_9\}$$

es una base de $\mathbb{R}^{10}$ y la matriz del endomorfismo f en dicha base es

$$M_B f = \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

■ Ejercicios 5.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

■ Ejercicios 5.2. Sea $f : \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$ un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$M_{B_c} f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c} f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}f^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}f^4 = 0$$

Así pues f es nilpotente de orden 4.

Encontrar la base B tal que

$$M_Bf = \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Teorema 5.1 (Forma canónica de un endomorfismo Nilpotente). *Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión n . Sea T un endomorfismo de V nilpotente de orden $k \leq n$. Entonces existe una base B de V de tal forma que la $M_B T$ es la yuxtaposición de matrices elementales Nilpotentes a lo largo de la diagonal:*

$$\begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_m \end{pmatrix}$$

Demostración. Por ser T un endomorfismo de V nilpotente de orden k sabemos que $T^k \equiv 0$, y por lo tanto, $\ker T^k = V$. Además tenemos la siguiente cadena de núcleos

$$\{0\} \subsetneq \ker T^1 \subsetneq \ker T^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker T^{k-1} \subsetneq \ker T^k = V.$$

Como $\ker T^{k-1} \subsetneq \ker T^k = V$ existe un subespacio $W_1 \subset V$ tal que

$$\boxed{V = \ker T^k = \ker T^{k-1} \oplus W_1}$$

Denotaremos por

$$r_1 = \dim W_1 = \dim(\ker T^k) - \dim(\ker T^{k-1}).$$

Sea [REDACTED] una base de W_1 , es decir,

$$V = \ker T^k = \ker T^{k-1} \oplus L\{v_1, \dots, v_{r_1}\}.$$

Observar que por construcción de W_1 para todo $i = 1, \dots, r_1$ tenemos que

- i) Como $v_i \in \ker T^k$ entonces $T^k(v_i) = 0 = T^{k-1}(T(v_i)) = 0$. Por tanto, $T(v_i) \in \ker T^{k-1}$
- ii) Puesto que $\ker T^{k-1} \cap W_1 = \{0\}$ entonces $\alpha_1 T(v_1), \dots, \alpha_{r_1} T(v_{r_1}) \notin \ker T^{k-1}$
- ii) $T^{k-1}(v_i) \neq 0 \implies T^{k-2}(T(v_i)) \neq 0$

Hacemos el mismo razonamiento pero ahora con los núcleos $\ker T^{k-2}$ y $\ker T^{k-1}$. Como $\ker T^{k-2} \subsetneq \ker T^{k-1}$ entonces existe un subespacio $W_2 \subset \ker T^{k-1}$ tal que

$$\ker T^{k-1} = \ker T^{k-2} \oplus W_2$$

Denotaremos por

$$r_2 = \dim W_2 = \dim(\ker T^{k-1}) - \dim(\ker T^{k-2}).$$

Para todo $i = 1, \dots, r_1$ tenemos que

- 1. $T(v_i) \in \ker T^{k-1}$ y $T(v_i) \notin \ker T^{k-2}$.
- 2. $\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1})\}$ son linealmente independientes, ya que en caso contrario existirían $\alpha_i \in \mathbb{R}$ no todos ceros tal que

$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{r_1} T(v_{r_1}) = 0 \iff T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1}) = 0.$$

de donde se deduciría que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1} \in \ker T$ y de la proposición 5.4 se sigue que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1} \in \ker T^{k-1}$ y $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1} \in W_1$ pero como $\ker T^{k-1} \cap W_1 = \{0\}$ entonces se tiene que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1} = 0$ y por tanto $\alpha_i = 0$ ya que $B_{W_1} = L\{v_1, \dots, v_{r_1}\}$.

- 3. $L\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1})\} \cap \ker T^{k-2} = \{0\}$ ya que en caso contrario existiría $v \in \ker T^{k-2}$ tal que $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{r_1} T(v_{r_1}) = x$ y

$$\begin{aligned} T^{k-2}(\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{r_1} T(v_{r_1})) = 0 &\implies T^{k-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1}) = 0 \\ &\implies \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r_1} v_{r_1} = 0 \implies \alpha_i = 0 \forall i \implies x = 0 \end{aligned}$$

De aquí concluimos que $L\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1})\} \subseteq W_2$ y por tanto $\dim W_1 \leq \dim W_2$. Así pues, elegimos vectores $\{v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\}$ tal que $\square$ es una base de W_2 .

Tenemos así que

$$\begin{aligned} V = \ker T^k &= L\{v_1, \dots, v_{r_1}\} \oplus \ker T^{k-1} = \\ &= L\{v_1, \dots, v_{r_1}\} \oplus L\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\} \oplus \ker T^{k-2} \end{aligned}$$

Hacemos el mismo razonamiento pero ahora con los núcleos $\ker T^{k-3}$ y $\ker T^{k-2}$. Como $\ker T^{k-3} \subsetneq \ker T^{k-2}$ entonces existe un subespacio $W_3 \subset \ker T^{k-2}$ tal que

$$\boxed{\ker T^{k-2} = \ker T^{k-3} \oplus W_3}$$

Denotaremos por

$$r_3 = \dim W_3 = \dim(\ker T^{k-2}) - \dim(\ker T^{k-3}).$$

Observar que

1. $T^{k-2}(T^2(v_i)) = T^k(v_i) = 0 \iff T^2(v_i) \in \ker T^{k-2}$ para todo $i = 1, \dots, r_1$.
2. $T^{k-2}(T(v_i)) = 0 \iff T(v_i) \in \ker T^{k-2}$ para todo $i = r_1 + 1, \dots, r_2$.
3. $T^2(v_i) \notin \ker T^{k-3}$, $\forall i = 1, \dots, r_1$ y $T(v_i) \notin \ker T^{k-3}$, $\forall i = r_1 + 1, \dots, r_2$
4. $\{T^2(v_1), \dots, T^2(v_{r_1}), T(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_2})\}$ son linealmente independientes.
5. $L\{T^2(v_1), \dots, T^2(v_{r_1}), T(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_2})\} \cap \ker T^{k-3}$

Elegimos $\{v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}\}$ tal que $\square$ es una base de W_3 .

Tenemos así que

$$\begin{aligned} V = \ker T^k &= L\{v_1, \dots, v_{r_1}\} \oplus \ker T^{k-1} = \\ &= L\{v_1, \dots, v_{r_1}\} \oplus L\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\} \oplus \ker T^{k-2} \\ &= L\{v_1, \dots, v_{r_1}\} \oplus L\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\} \oplus \\ &\oplus L\{T^2(v_1), \dots, T^2(v_{r_1}), T(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_2}), v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}\} \oplus \ker T^{k-3} \end{aligned}$$

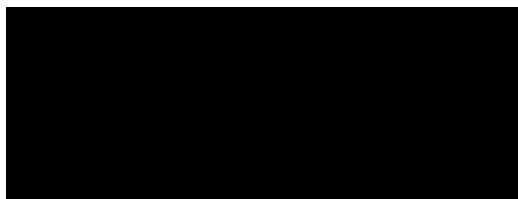
Repitiendo el proceso llegamos a que existe un subespacio $W_k \subset \ker T$ tal que

$$\boxed{\ker T = \{0\} \oplus W_k}$$

Denotaremos por

$$r_k = \dim W_k = \dim(\ker T).$$

Elegimos vectores $\{v_{r_{k-1}+1}, \dots, v_{r_k}\}$ tal que



es una base de W_k .

escribir el espacio V de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V = & L\{v_1, \dots, v_{r_1}\} \oplus \\ & L\{T(v_1), \dots, T(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\} \oplus \\ & L\{T^2(v_1), \dots, T^2(v_{r_1}), T(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_2}), v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}\} \oplus \\ & \oplus \dots \oplus \\ & L\{T^{k-1}(v_1), \dots, T^{k-1}(v_{r_1}), T^{k-2}(v_{r_1+1}), \dots, T^{k-2}(v_{r_2}), \dots, v_{r_{k-1}+1}, \dots, v_{r_k}\} \end{aligned}$$

Observamos que $r_k = \dim \ker T$ y que

$$\sum_{j=1}^k r_j = n$$

Teniendo en cuenta que

$$B_V = \bigcup_{i=1}^k B_{W_i}$$

Reordenamos todos estos vectores obtenemos la base:

$$\begin{aligned} B = & \{T^{k-1}(v_1), T^{k-2}(v_1), \dots, T(v_1), v_1, \\ & T^{k-1}(v_2), T^{k-2}(v_2), \dots, T(v_2), v_2, \\ & \dots \\ & T^{k-1}(v_{r_1}), T^{k-2}(v_{r_1}), \dots, T(v_{r_1}), v_{r_1}, \\ & T^{k-2}(v_{r_1+1}), T^{k-3}(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_1+1}), v_{r_1+1}, \\ & \vdots \\ & T^{k-2}(v_{r_2}), T^{k-3}(v_{r_2}), \dots, T(v_{r_2}), v_{r_2}, \\ & \vdots \\ & T(v_{r_{k-2}+1}) \\ & \vdots \\ & T(v_{r_{k-1}}) \\ & v_{r_k+1} \\ & \vdots \\ & v_{r_k}\} \end{aligned}$$

Quedando la matriz del endomorfismo en esta base de la forma:

$$M_B T = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

■

Observar que de la demostración del teorema obtenemos:

1. $m_G(0) = \dim(\ker T)$ nos da el número de cajas elementales que aparecen.
2. $r_1 = \dim(\ker T^k) - \dim(\ker T^{k-1})$ nos da el número de cajas de mayor tamaño
3. El orden de nilpotencia nos da el tamaño de la caja más grande.
4. Puede ocurrir que $\dim W_i = \dim W_{i+1}$ entonces $T(B_{W_i} = B_{W_{i+1}})$

■ **Ejercicios 5.3.** Calcular la forma canónica Nilpotente de los siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

■ **Ejercicios 5.4.** Calcular la forma canónica Nilpotente de los siguientes endomorfismos:

1. $T(x, y, z, t) = (0, z + t, t, 0)$
2. $f(a, b, c, d) = (0, a, d, 0)$
3. Considerando $\mathbb{R}_4[x]$ con base canónica $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, el endomorfismo $D(p) = p'$ donde $p \in \mathbb{R}_4[x]$ y p' denota la derivada de p .

6. Autoespacios generalizados. Teorema de descomposición de Jordan

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con $\dim V = n$. Sea $T \in \text{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de T . Consideramos ahora el endomorfismo $T - \lambda \text{id} : V \rightarrow V$

Proposición 6.1. $E_i(\lambda) = \ker(T - \lambda \text{id})^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ es un subespacio de V con $\dim E_i(\lambda) \leq n$.

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in \ker(T - \lambda \text{id})^i$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces

$$(T - \lambda \text{id})^i(\alpha v_1 + \beta v_2) = \underbrace{\alpha (T - \lambda \text{id})^i(v_1)}_0 + \underbrace{\beta (T - \lambda \text{id})^i(v_2)}_0 = 0$$

■

Proposición 6.2. $\ker(T - \lambda \text{id})^i \subseteq \ker(T - \lambda \text{id})^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por tanto podemos formar la cadena de núcleos

$$\{0\} \subseteq \ker(T - \lambda \text{id}) \subseteq \ker(T - \lambda \text{id})^2 \subseteq \dots \subseteq \ker(T - \lambda \text{id})^n \subseteq \ker(T - \lambda \text{id})^{n+1} \subseteq \dots$$

Observar que como $E_i(\lambda) = \ker(T - \lambda \text{id})^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ es un subespacio del espacio V existirá algún $m \leq n$ tal que $\ker(T - \lambda \text{id})^m = \ker(T - \lambda \text{id})^p$ para todo $p \geq m$.

$$\{0\} \subseteq \ker(T - \lambda \text{id}) \subseteq \dots \subseteq \ker(T - \lambda \text{id})^m = \ker(T - \lambda \text{id})^{m+1} = \dots = \ker(T - \lambda \text{id})^n$$

■ **Ejemplos 6.1.** a) Sea $\lambda = 2$ autovalor de $T \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$ con

$$M_{B_c}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies M_{B_c}(T - 2\text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}(T - 2\text{id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T - 2\text{id})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -27 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Por tanto tenemos que la cadena de núcleos de del endomorfismo $T - 2\text{id} \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$ es

$$\{0\} \subseteq \ker(T - 2\text{id}) \subseteq \ker(T - 2\text{id})^2 = \ker(T - 2\text{id})^3 = \dots = \ker(T - \lambda \text{id})^n = \dots$$

b).- Sea $T \in \text{End}(\mathbb{R}^6)$ con $\lambda = -2$ autovalor de T tal que

$$M_{B_c}(T) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T+2id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}(T+2id)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T+2id)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la cadena de núcleos de $T + 2id \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$ es

$$\{0\} \subseteq \ker(T + 2id) \subseteq \ker(T + 2id)^2 = \ker(T + 2id)^3 = \ker(T + 2id)^4 = \dots$$

Definición 6.1. Dado λ autovalor de un endomorfismo T diremos que $j \in \mathbb{N}$ es el **índice del autovalor** λ , y lo denotaremos por $i(\lambda) = j$, si

- i) $\ker(T - \lambda id)^j = \ker(T - \lambda id)^p$ para todo $p \geq j$
- ii) $\ker(f - \lambda id)^{j-1} \subsetneq \ker(f - \lambda id)^j$.

■ **Ejemplos 6.2.** En el ejemplo 6.1 **a).** el **índice del autovalor** $\lambda = 2$ es $i(2) = 2$.

En el ejemplo 6.1 **b).** el **índice del autovalor** $\lambda = -2$ es $i(-2) = 2$.

Definición 6.2. Llamamos **autoespacio generalizado** del autovalor λ al subespacio

$$\boxed{\ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)}}$$

.

■ **Ejemplos 6.3.**

- En el ejemplo 6.1 **a)** el **autoespacio generalizado** para el autovalor $\lambda = 2$ es el subespacio $\ker(T - 2id)^2$.
- En el ejemplo 6.1 **b)** el **autoespacio generalizado** para el autovalor $\lambda = -2$ es el subespacio $\ker(T + 2id)^2$.

Proposición 6.3. Si $\ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)}$ es el **autoespacio generalizado** del autovalor λ entonces se tiene que

$$T(\ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)}) \subset \ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)}.$$

Corolario 6.1. *La aplicación*

$$T - \lambda id|_{\ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)}} : \ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)} \longrightarrow \ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)},$$

es decir $(T - \lambda id) \in \text{End}(\ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)})$ es nilpotente de orden $i(\lambda)$.

■ **Ejemplos 6.4.**

- En el ejemplo 6.1 a) el endomorfismo $(T - 2id) : \ker(T - 2id)^2 \rightarrow \ker(T - 2id)^2$ con $M_{B_c}(T - 2id) = A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -27 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

como $\ker(T - 2id)^2 = \{3e_1 + e_2, 3e_3 + e_4, 3e_2 + e_5\}$

$$(T - 2id)(3e_1 + e_2) = 3(T - 2id)(e_1) + (T - 2id)(e_2) = 3e_2 + e_5 \implies (T - 2id)^2(3e_1 + e_2) = 0$$

$$(T - 2id)(3e_3 + e_4) = 3(T - 2id)(e_3) + (T - 2id)(e_4) = 3e_4 - 3e_4 = 0 \implies (T - 2id)^2(3e_3 + e_4) = 0$$

$$(T - 2id)(3e_2 + e_5) = 3(T - 2id)(e_2) + (T - 2id)(e_5) = 3e_5 - 3e_5 = 0 \implies (T - 2id)^2(3e_2 + e_5) = 0$$

obtenemos que $(T - 2id)|_{\ker(T - 2id)^2}$ es nilpotente de orden 2.

- En el ejemplo 6.1 b) el endomorfismo $T + 2id : \ker(T + 2id)^2 \rightarrow \ker(T + 2id)^2$ con

$$M_{B_c}(T + 2id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T + 2id)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}(T + 2id)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como $\ker(T + 2id)^2 = \{e_1 - e_2 + e_4, e_3\}$

$$(T + 2id)(e_3) = e_1 - e_2 + e_4 \implies (T - 2id)^2(e_3) = 0$$

$$\begin{aligned} (T + 2id)(e_1 - e_2 + e_4) &= 3(T + 2id)(e_1) - (T + 2id)(e_2) + (T + 2id)(e_4) = \\ &= e_2 - (e_1 + e_3) + e_1 - e_2 + e_3 = 0 \implies (T - 2id)^2(e_1 - e_2 + e_4) = 0 \end{aligned}$$

obtenemos que $(T + 2id)|_{\ker(T + 2id)^2}$ es nilpotente de orden 2.

Proposición 6.4.

$$1 \leq \dim \ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)} \leq m_A(\lambda).$$

Corolario 6.2. *El índice del autovalor λ es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica*

$$1 \leq i(\lambda) \leq m_A(\lambda)$$

■ **Ejemplos 6.5.** Sea el endomorfismo $f : (\mathbb{R})^5 \rightarrow (\mathbb{R})^5$ con

$$M_{B_c}f = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico

$$p_f(\lambda) = |M_{B_c}f - \lambda I| = \lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^3$$

Por tanto tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \implies \begin{cases} M_A(1) = 2 \\ i(1) \leq 2 \\ \dim[\ker(T - id)^{i(1)}] = m_A(1) = 2 \end{cases} \\ \lambda = -1 \implies \begin{cases} M_A(-1) = 3 \\ i(-1) \leq 3 \\ \dim[\ker(T + id)^{i(-1)}] = m_A(-1) = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Como par $\lambda = 1$ tenemos que $\dim(\ker(f - id)) = 1$

$$M_{B_c}(f - id) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker(f - id) = \{(-1, 1, 1, 0, 1)\}$$

y sabemos que $\dim[\ker(T - id)^{i(1)}] = 2$ entonces $i(1) = 2$.

Por tanto la cadena de núcleos queda:

$$\{0\} \subseteq \ker(f - id) \subseteq \ker(f - id)^2 = \ker(f - id)^3 = \dots$$

Como par $\lambda = -1$ tenemos que $\dim(\ker(f + id)) = 1$

$$M_{B_c}(f + id) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \ker(f + id) = \{(0 - 1, 1, 0, 1)\}$$

$$M_{B_c}(f + id)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 & -4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 20 & 16 & 12 \end{pmatrix} \quad \ker(f + id)^2 = \{([1, 0, 0, -4, 5), (0, 1, 1, 0, -1)]\}$$

y sabemos que $\dim[\ker(T + id)^{i(-1)}] = 3$ entonces $i(-1) = 3$.

Por tanto la cadena de núcleos queda:

$$\{0\} \subseteq \ker(f - id) \subseteq \ker(f - id)^2 \subsetneq \ker(f - id)^3 = \dots$$

Teorema 6.1 (Teorema de descomposición de un espacio vectorial. 5.10). *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ finitamente generado, $\dim V = n$, T un endomorfismo de V . Supongamos que todas las raíces del $P_T(\lambda)$ están en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ los autovalores distintos de P_T , con $m_A(\lambda_i)$ las multiplicidades algebraicas de λ_i . Entonces:*

- i) $V = \ker(T - \lambda_1 id)^{m_A(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \ker(T - \lambda_q id)^{m_A(\lambda_q)}$
- ii) $T(\ker(T - \lambda_i id)^{m_A(\lambda_i)}) \subset \ker(T - \lambda_i id)^{m_A(\lambda_i)} \quad i = 1, \dots, q$
- iii) $\dim[\ker(T - \lambda_i id)^{m_A(\lambda_i)}] = m_A(\lambda_i)$

Observar que puesto que $i(\lambda) \leq m_A(\lambda)$ se tiene $\ker(T - \lambda id)^{i(\lambda)} = \ker(T - \lambda id)^{m_A(\lambda)}$ y por tanto:

- i) $V = \ker(T - \lambda_1 id)^{i(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \ker(T - \lambda_q id)^{i(\lambda_q)}$
- ii) $T(\ker(T - \lambda_i id)^{i(\lambda_i)}) \subset \ker(T - \lambda_i id)^{i(\lambda_i)} \quad i = 1, \dots, q$
- iii) $\dim[\ker(T - \lambda_i id)^{i(\lambda_i)}] = m_A(\lambda_i)$

■ **Ejemplos 6.6.** 1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ en la base canónica.

Tenemos

$$p_f(\lambda) = |A - \lambda I| = (1 - \lambda)^4 = 0 \implies \lambda = 1 \quad \begin{cases} m_A(2) = 4 \\ m_G(2) = 2 \end{cases}$$

Por tanto, f no es diagonalizable.

Fijémonos en el endomorfismo $(f - id) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cuya matriz en base canónica es

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos así, que

$$\begin{cases} i(1) = 3 \\ \ker((f - id)^{i(1)}) = \ker((f - id)^3) \end{cases}$$

Formamos su cadena

$$\{0\} \subsetneq \ker(f - id) \subsetneq \ker((f - id)^2) \subsetneq \ker((f - id)^3) = \mathbb{R}^4.$$

donde

$$\begin{aligned} \ker(f - id) &= L\{(3, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \\ \ker((f - id)^2) &= L\{(-3, 1, 0, 0), (6, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \\ \mathbb{R}^4 &= \ker((f - id)^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 = \ker((f - id)^3) &= \ker(f - 2id)^2 \oplus W_1, \quad W_1 = L\{(1, 0, 0, 0)\} \\ \ker(f - id)^2 &= \ker(f - id) \oplus W_2, \quad W_2 = L\{(f - id)(1, 0, 0, 0)\} \\ \ker(f - id) &= \{0\} \oplus W_3, \quad W_3 = L\{(f - id)^2(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$B = \{(f - id)^2(1, 0, 0, 0), (f - id)(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^4$ y la matriz de $(f - id)$ en B es

$$M_B(f - id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $M_B(f) = M_B(f - id) + I$, es decir,

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. sea $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de T es

$$p_T(\lambda) = (2 - \lambda)^3(-1 - \lambda)^2$$

así pues los autovalores de T son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$ con $m_A(2) = 3$ $m_A(-1) = 2$.
Puesto que

$$M_{B_c}(T - 2id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T + id) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que $m_G(2) = 2$ y $m_G(-1) = 2$ por lo tanto T no es ni diagonalizable ni nilpotente.

Nos fijamos ahora en el endomorfismo $(T - 2id) : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$$M_{B_c}(T - 2id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T - 2id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}(T-2id)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -27 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \quad M_{B_c}(T-2id)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 81 & 0 \\ 9 & -27 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ker(T-2id) &= L\{3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\} \\ \ker(T-2id)^2 &= L\{3e_1 + e_2, 3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\} \\ \ker(T-2id)^3 &= L\{3e_1 + e_2, 3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\} \\ \ker(T-2id)^n &= L\{3e_1 + e_2, 3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\} \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Consideremos ahora el endomorfismo $T-2id$ pero en vez de definido en todo $\mathbb{R}^5$ definido sólo en $\ker(T-2id)^2 \subset \mathbb{R}^5$ es decir

$$\mathcal{T} = (T-2id)|_{\ker(T-2id)^2} : \ker(T-2id)^2 \longrightarrow \ker(T-2id)^2$$

$\mathcal{T}$ es nilpotente ya que $\mathcal{T}^2 = 0$, es decir, $\ker \mathcal{T}^2 = \ker(T-2id)^2$. Por tanto, como $\ker \mathcal{T}^2 = \ker(T-2id)^2 = \mathcal{T}^p$ para todo $p \geq 2$, tenemos la siguiente cadena de núcleos

$$\{0\} \subsetneq \ker \mathcal{T} \subsetneq \ker \mathcal{T}^2.$$

Sea W_1 un subespacio de $\ker(T-2id)^2$ tal que

$$\ker(T-2id)^2 = \underbrace{\ker \mathcal{T}^2}_3 = \underbrace{\ker \mathcal{T}}_2 \oplus \underbrace{W_1}_1$$

luego

$$B_{W_1} = \{3e_1 + e_2\}$$

Sea W_2 un subespacio de $\ker(T-2id)^2$ tal que

$$\underbrace{\ker \mathcal{T}}_2 = \{0\} \oplus \underbrace{W_2}_2$$

$$B_{W_2} = \{\mathcal{T}(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 1, 0)\} = \{(0, 3, 0, 0, 1), (0, 0, 3, 1, 0)\}$$

se sigue

$$\ker \mathcal{T}^2 = \ker \mathcal{T} \oplus W_1 = W_2 \oplus W_1.$$

Por lo tanto $B = \{\mathcal{T}(3, 1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 1, 0)\}$ es una base de $\ker((T-2id)^2)$ y la matriz de $(T-2id)|_{\ker((T-2id)^2)}$ en B es

$$M_B(T - 2id)|_{\ker((T-2id)^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $M_B(T|_{\ker((T-2id)^2)}) = M_B((T - 2id)|_{\ker((T-2id)^2)}) + 2I$, es decir,

$$M_B((T|_{\ker((T-2id)^2)})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomemos ahora el endomorfismo $(T + id) : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$$M_{B_c}(T + id) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$m_A(-1) = 2 = \dim \ker((T + id)^{i(-1)}) \quad \dim(\ker(T + id)) = 2$$

obtenemos que $\ker((T + id)^{i(-1)}) = \ker((T + id)^2)$ y $i(-1) = 2$.

$$\ker(T + id) = L\{e_5, e_4\}$$

Consideremos ahora el endomorfismo $T + id$ pero en vez de definido en todo $\mathbb{R}^5$ definido sólo en $\ker(T + id) \subset \mathbb{R}^5$ es decir

$$T = (T + id)|_{\ker(T+id)} : \ker(T + id) \longrightarrow \ker(T + id)$$

El endomorfismo T es nilpotente ya que $\ker T(\ker(T + id)) = 0$. Por tanto, como $\ker T = \ker(T + id) = T^p$ para todo $p \geq 1$, tenemos la siguiente cadena de núcleos

$$\{0\} \subsetneq \ker T = \ker(T + id).$$

Sea W_1 un subespacio de $\mathcal{V}$ tal que

$$\ker \underbrace{T}_2 = \{0\} \oplus \underbrace{W_1}_2$$

luego

$$B_{W_1} = L\{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}$$

se sigue que $B = \{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}$ es una base de $\ker((T + id))$ y la matriz de $(T + id)|_{\ker(T+id)}$ en B es

$$M_B(T + id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $M_B(T|_{\ker(T+id)}) = M_B(T + id)|_{\ker(T+id)} - I$, es decir,

$$M_B((T|_{\ker(T+id)})) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resumiendo

$$M_B((T|_{\ker((T-2id)^2)})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M_B((T|_{\ker(T+id)})) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si tomo la base

$$B' = \{(T - 2id)(3, 1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}$$

de $\mathbb{R}^5$ tenemos

- $T((T - 2id)(3, 1, 0, 0, 0)) = (2, 0, 0, 0, 0)$
- $T((3, 1, 0, 0, 0)) = (1, 2, 0, 0, 0)$
- $T(0, 0, 3, 1, 0) = (0, 0, 2, 0, 0)$
- $T(0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1, 0)$
- $T(0, 0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0, -1)$

$$M_B(T) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

■ **Ejercicios 6.1.** Encontrar la forma canónica de Jordan correspondiente a las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & 3+2a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & b & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

7. Forma canónica de Jordan de un endomorfismo

Definición 7.1 (Matriz Elemental o Reducida de Jordan). Llamaremos Matriz Elemental o Reducida de Jordan de orden k y autovalor λ a la matriz de orden k cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que valen λ , y los situados inmediatamente encima de la diagonal principal, que son unos.

matrices elementales de Jordan de orden $1, 2, 3, 4, \dots, n$

$$(\lambda) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Definición 7.2 (Matriz de Jordan). Llamaremos **Matriz de Jordan** a cualquier matriz cuadrada formada por la yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de la diagonal, de la forma

$$M_B T = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_q} \end{pmatrix}$$

Teorema 7.1 (TEOREMA DE JORDAN). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ finitamente generado no nulo, sea T un endomorfismo de V y tal que sus autovalores pertenecen a $\mathbb{K}$. Entonces existe una base ordenada B de V con respecto a la cual la matriz asociada a T es una matriz diagonal por cajas de la forma:

$$M_B T = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_q} \end{pmatrix}$$

(observar que esta matriz no es única.)

■ **Ejercicios 7.1.** 1. Calcular matrices de Jordan para cada una de las siguientes matrices y las matrices de paso P correspondientes

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2-a & 3+2a \\ 0 & -3-2a & 3+3a \\ 0 & -2-2a & 2+3a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^3 \\ 1 & 0 & -3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a & 1 & 1-2a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3a & 0 & -a \\ -a & 2a & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a+1 & -a-1 & -2a \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -a-1 & a+1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Feb 00.-** Calcular la forma canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a+2-b & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a+1-b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz de paso P , de modo que $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$, según los distintos valores de los parámetros reales a y b .

3. **Sep 00.-** Sea $a \in \mathbb{R}$. Se considera la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p &\longmapsto T_a(p) \end{aligned}$$

donde $T_a(p)(x) = \frac{p(x)-p(a)}{x-a}$.

Calcular la forma canónica de Jordan de T_a y una base para T_a .

4. **Mayo 00.-** Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 y fijamos la base de $\mathbb{R}^3[x]$

$$B = \{1, x^2 - x + 1, x^3 - x^2, x^3\}$$

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sea $T : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$ la aplicación lineal tal que su matriz asociada a la base B es $M_B(T) = A$. Calcular la forma canónica de Jordan, J , de la matriz A y una base B' de los polinomios de $\mathbb{R}^3[x]$ tal que $M_{B'}(T) = J$.

5. **Jun 99.-** Hallar la forma canónica de Jordan de $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ una aplicación lineal de la que sabemos que tiene dos únicos autovalores y que:

a) $\dim \ker f^4 - \dim \ker f^3 = 1$.

- b) $f^4(v) = 0 \quad \forall v \in \ker f^5$.
 c) $\ker(f - 3id)^3 = L\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0)\}$.
 d) $\dim \ker(f - 3id) < \dim \ker(f - 3id)^3$.

6. **Feb 99.-** Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Encontrar una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $ImT = L\{v_1 + v_2, v_3 + v_4\}$ y $\ker T^2 = \mathbb{R}^4$. Dar la matriz, A , asociada a T en la base B de $\mathbb{R}^4$, su forma canónica de Jordan J y una matriz de P tal que $A = P^{-1}JP$.

7. **Jun 98.-** Definir un endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique:

- a) El autoespacio generalizado asociado al 2 es $V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0; x - z - t = 0\}$.
 b) $T(1, 0, 1, 0) = (3, 0, 2, 1)$.
 c) $|M| = 4$ donde M es la matriz de T en la base canónica.
 d) Existe un $\lambda > 0$ tal que $(T - \lambda I)(1, 1, 0, 0) = (1, -1, 1, -1)$ y $(T - \lambda I)^2(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Dar la forma canónica de T , J_T y la matriz de cambio de base Q tal que $M = Q^{-1}J_TQ$.

8. **Mayo 96.-** Sea $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ un endomorfismo del que se sabe:

- i) $\text{rango}(f) = 4$.
 ii) Las raíces del polinomio característico de f son λ_1 y λ_2 , y las dos son reales.
 iii) $\dim[\ker(f - \lambda_1 id)^{\beta_1}] - \dim[\ker(f - \lambda_1 id)] = 1$,
 $\dim[\ker(f - \lambda_2 id)^{\beta_2}] - \dim[\ker(f - \lambda_2 id)] = 2$,
 donde β_i es el índice del autovalor λ_i .

Determinar **razonadamente** las posibles formas canónicas de Jordan de f .

9. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, sea T un endomorfismo de V del cual sabemos que sus autovalores son $\sigma(T) = \{3, 1, -1, -2, 0\}$ y :

$$\begin{array}{ll} \dim(\ker(T - 3I)) = \dim(\ker(T - 3I)^2) = 2 & \\ \dim(\ker(T - I)) = 1 & \dim(\ker(T - I)^2) = \dim(\ker(T - I)^3) = 2 \\ \dim \ker((T + I)) = 3 & \dim(\ker(T + I)^2) = \dim(\ker(T + I)^3) = 5 \\ \dim(\ker(T + 2I)) = 3 & \dim(\ker(T + 2I)^2) = 6 \\ \dim(\ker(T + 2I)^3) = \dim(\ker(T + 2I)^4) = 7 & \\ \dim(\ker T) = 4 & \dim(\ker T^2) = 6 \\ \dim(\ker T^3) = 8 & \dim(\ker T^4) = \dim(\ker T^5) = 10 \end{array}$$

¿Es T un isomorfismo?. Determinar razonadamente la dimensión de V . Calcular las multiplicidades y el índice de cada autovalor. Calcular los polinomios característico. Obtened la matriz de Jordan de T .

8. Polinomios de matrices y T^a de Cayley-Hamilton

Definición 8.1 (Polinomios de endomorfismos.). Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $f \in \text{end}(V)$. Definimos $p(f)$ como

$$p(f) = a_0f^0 + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_nf^n$$

donde $f^0 = id$, $f^{p+1} = f^p \circ f$.

Proposición 8.1. Si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces

- $p(f) + q(f) = (p + q)(f)$.
- $p(f) \circ q(f) = (pq)(f)$.
- $p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$.
- $\lambda p(f) = (\lambda p)(f)$.
- $f^p \circ f^q = f^q \circ f^p = f^{p+q}$.

■ **Ejemplos 8.1.** 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (y, x)$ y $p(x) = x^2 - 2x + 1$ entonces

$$p(f) = f^2 - 2f + id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p(f)(x, y) = f^2(x, y) - 2f(x, y) + id(x, y) = 2(y - x, y - x)$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (y, x)$, $p(x) = x^2 - 2x + 1$ y $q(x) = x^3 + 1$ entonces

$$p(f) + q(f) = f^3 + f^2 - 2f + id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(p + q)(f)(x, y) = f^3(x, y) + f^2(x, y) - 2f(x, y) + id(x, y) = (3x - y, 3y - x)$$

■ **Ejercicios 8.1.** 1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x, 0, z)$ y $p(x) = x^2 - x + 1$. Calcular $p(f)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x, 0, z)$. Si $p(x) = x^2 - x + 1$ y $q(x) = x^3 - x^2 + 1$ Calcular $P(f) + q(f)$.

Definición 8.2. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definimos $p(A)$ como

$$p(A) = a_0A^0 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

donde $A^0 = I$, $A^{p+1} = A^p A$.

Proposición 8.2. Si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces

- $p(A) + q(A) = (p + q)(A)$.
- $p(A)q(A) = (pq)(A)$.

- $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.
- $A^p A^q = A^{p+q}$.
- $\lambda p(A) = (\lambda p)(A)$.

■ **Ejemplos 8.2.** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $p(x) = 2x^2 - 3\lambda + 1$ y

$$P(A) = 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -20 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

■ **Ejercicios 8.2.** Dados $p(x) = x^3 - x^2 + 1$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$, calcular $p(A)q(A)$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposición 8.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ entonces existe un polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ no nulo tal que $p(A) = 0$

Proposición 8.4. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, $p \in \mathbb{K}[x]$ no nulo con $p(A) = 0$ y $A' \in M_n(\mathbb{K})$ tal que A y A' son semejantes demostrar que $p(A') = 0$.

Demostración. Supongamos que $p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$. Sabemos que existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ invertible tal que $A' = P^{-1}AP$ por tanto

$$p(A') = \sum_{i=1}^n a_i (A')^i = \sum_{i=1}^n a_i (P^{-1}AP)^i = \sum_{i=1}^n a_i P^{-1}A^i P = P^{-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i A^i \right) P = 0$$

■

Proposición 8.5. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ lineal, entonces existe $p \in \mathbb{K}[x]$ con $p \neq 0$ tal que $p(T) = 0$

Teorema 8.1 (Teorema de Cayley-Hamilton).

$$p_A(A) = 0, \quad p_T(T) = 0$$

- **Demostración** Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, para comprobar que $p_A(A) = 0$, si $p_A(\lambda) = b_n \lambda^n + \dots + b_1 \lambda + b_0$, basta con demostrar que $b_n A^n + \dots + b_1 A + b_0 I = 0$. Sean $B = A - \lambda I$ y $C = \text{adj}(B)$ (la matriz en cuya entrada $c_{i,j}$ aparece el adjunto, con su signo correspondiente, al elemento $b_{j,i}$. cuando se habló de matrices inversas, se tiene que $B \cdot \text{adj}(B) = \det(B) \cdot I$).

1.- Probar que existen $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tales que

$$C = B_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0.$$

2.- Probar que $B \cdot C = \det(B) \cdot I_n$.

3.- Probar que

$$\det(B) \cdot I_n = B \cdot C = (A - \lambda I) \cdot C = A \cdot C - \lambda C$$

o, equivalentemente:

$$b_n I_n \lambda^n + \dots + b_1 I_n \lambda + b_0 I_n = AB_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + AB_1 \lambda + AB_0 - B_0 \lambda - \dots - B_{n-1} \lambda^n.$$

Deducir de ahí, igualando coeficientes, que

$$\begin{aligned} b_0 I_n &= AB_0 \\ b_1 I_n &= AB_1 - B_0 \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n-1} I_n &= A_{n-1} B - B_{n-2} \\ b_n I_n &= -B_{n-1} \end{aligned}$$

4.- Multiplicar las ecuaciones anteriores por $I, A, \dots, A^{n-1}, A^n$ y sumarlas. Deducir de ahí que $p_A(A) = 0$.

■ Ejemplos 8.3. 1.-

1. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 8$ y

$$P_A(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Como para $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tenemos que A es una matriz invertible y $p_A(A) = A^2 - 5A + 8I = 0$ entonces

$$A^{-1}(A^2 - 5A + 8I) = A - 5I + 8A^{-1} = 0 \implies A - 5I + 8A^{-1} = 0 \implies A^{-1} = 5/8I - 1/8A$$

Por tanto

$$A^{-1} = 1/8[-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}] = 1/8 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

■ Ejercicios 8.3. 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobar que $p_A(A) = 0$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcular A^{-1}

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcular A^{-1}

Definición 8.3. Llamamos polinomio mónico aquel polinomio cuyo coeficiente de grado máximo es 1, es decir, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$.

Definición 8.4. Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ entonces llamamos polinomio mínimo de A, $pm_A(x)$ al polinomio mónico de menor grado tal que $pm_A(A) = 0$.

Teorema 8.2. El polinomio mínimo, pm_A , divide siempre al polinomio característico, p_A .

Teorema 8.3. El polinomio mínimo y el polinomio característico tienen las mismas raíces.

■ **Ejercicios 8.4.** 1. Hallar la forma canónica de Jordan de todas las matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que verifican la ecuación

$$A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0.$$

2. De un endomorfismo $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ se sabe que su polinomio característico es

$$p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^4(1 + \lambda)^2 \text{ y que } \dim \ker(T - I)^2 = 3.$$

Demostrar que $-T^5 + T^4 + 2T^3 - 2T^2 - T + I = 0$.

Teorema 8.4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ no nulo, sea T un endomorfismo de V tal que todas sus raíces están en el cuerpo. Sea $P_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{r_q}$, sea $\nu(\lambda_i)$ el índice del autovalor λ_i . Entonces:

$$pm_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_q)^{\nu(\lambda_q)}$$

■ **Ejercicios 8.5.**

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Calcular los polinomios mínimos de A, B y C.