

Formas bilineales y Formas cuadráticas

Antonia González Gómez
Dep. de Matemáticas Aplicadas a los Recursos Naturales
ETSI de Montes
UPM

Índice

1. Formas bilineales: definición y propiedades	2
2. Expresión matricial de una forma bilineal	3
3. Relación de congruencia	5
4. Rango de una forma bilineal	6
5. Formas cuadráticas: Definición y Propiedades.	7
6. Expresión matricial de una forma cuadrática. Cambios de base	8
7. Diagonalización de formas cuadráticas.	10
8. Estudio del signo de una forma cuadrática	15

1. Definición y propiedades

Definición 1.1. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión n . Una aplicación

$$\begin{aligned} f : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v). \end{aligned}$$

es una **forma bilineal** sobre V cuando verifica que:

1. $f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v) \quad \forall u, u', v \in V$
2. $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v) \quad \forall u, v \in V \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3. $f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v') \quad \forall u, v, v' \in V$
4. $f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v) \quad \forall u, v \in V \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Observar que es equivalente a verificar

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ y } \forall u, u', v \in V$

$$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v)$$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ y } \forall u, v, v' \in V$

$$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v')$$

es decir, una aplicación $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es una forma bilineal si es lineal en cada una de sus componentes.

A partir de ahora para nosotros $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ salvo que se diga lo contrario.

■ **Ejemplo 1.1.** Dado $\mathbb{R}^2$, la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

es una forma bilineal, ya que para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2), (z_1, z_2)) &= f((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2)) = (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2, \\ \alpha f((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + \beta f((y_1, y_2), (z_1, z_2)) &= \alpha(x_1 \cdot z_2) + \beta(y_1 \cdot z_2) \end{aligned} \right\}$$

■ **Ejercicios 1.1.** ■ Comprobar que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_2$ no es una forma bilineal.

- Comprobar que el producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &\mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

es un forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ y hacer la generalización para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.1. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ forma bilineal sobre V . Entonces

$$f(u, 0) = f(0, u) = 0 \quad \forall u \in V$$

Definición 1.2. Una forma bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es **simétrica** si

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

Una forma bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es **antisimétrica** o alternada si

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

■ **Ejemplos 1.1.** ■ La aplicación $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $A(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$ es una forma bilineal simétrica ya que:

$$A(y, x) = 3y_1x_1 + y_2x_1 + y_1x_2 + 2x_2y_2 = A(x, y)$$

■ La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ verifica

$$f(y, x) = y_1x_2 - y_2x_1 = -f(x, y)$$

Así que f es alternada o antisimétrica.

■ **Ejercicios 1.2.** Comprobar

1. Toda forma bilineal antisimétrica verifica que

$$f(x, x) = 0 \quad \forall x \in V$$

2. El producto escalar usual definido en $\mathbb{R}^n$ es una forma bilineal simétrica

2. Expresión matricial de una forma bilineal

Al igual que ocurre con las aplicaciones lineales, también podemos representar una forma bilineal definida sobre un espacio de dimensión finita por una matriz.

Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, $\dim V = n$, y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Sean $\bar{x}, \bar{y} \in V$ y $X_i, y_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, \dots, n$ con

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^n y_j v_j$$

se tiene

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \bar{y}\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j f(v_i, v_j)\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(v_i, v_j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i f(v_i, v_j) \right) y_j = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i f(v_i, v_1), \sum_{i=1}^n x_i f(v_i, v_2), \dots, \sum_{i=1}^n x_i f(v_i, v_n) \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ f(v_2, v_1) & f(v_2, v_2) & \cdots & f(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & f(v_n, v_2) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Definición 2.1. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ f(v_2, v_1) & f(v_2, v_2) & \cdots & f(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & f(v_n, v_2) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

se dice que es la matriz de la forma bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ en la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V .

Si denotamos por $A = (a_{ij}) = (f(v_i, v_j)) = M_B f$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entonces

la igualdad anterior se expresa:

$$\boxed{f(\bar{x}, \bar{y}) = X^t A Y}$$

■ **Ejemplo 2.1.** Calcular las matrices asociadas a la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ en la base canónica y en la base $B = \{(1, -1), (-1, 0)\}$

$$\begin{aligned}
 &\begin{aligned} f((1, 0), (1, 0)) &= 0 \\ f((1, 0), (0, 1)) &= 1 \\ f((0, 1), (1, 0)) &= 1 \\ f((0, 1), (0, 1)) &= 0 \end{aligned} \implies M_{B_c} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\begin{aligned} f((1, -1), (1, -1)) &= -2 \\ f((1, -1), (-1, 0)) &= 1 \\ f((-1, 0), (1, -1)) &= 1 \\ f((-1, 0), (-1, 0)) &= 0 \end{aligned} \implies M_B f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

■ **Ejercicios 2.1.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ calcular su matriz asociada en la base canónica y en la base $B = \{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$

3. Relación de congruencia

Proposición 3.1. Cambio de base Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, $\dim V = n$, B, B' bases de V y $C_{B'B}$ la matriz del cambio de la base B' a la base B . Sean $x, y \in V$ con:

$$\bar{x}_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bar{x}_{B'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

$$\bar{y}_B = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \bar{y}_{B'} = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$$

$$\boxed{M_{B'}f = C_{(B'B)}^t M_Bf C_{(B'B)}}$$

Demostración. Así pues, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C_{(B'B)} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C_{(B'B)} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) M_Bf \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(C_{(B'B)} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right)^t M_Bf C_{(B'B)} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \\ &= (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \underbrace{[C_{(B'B)}^t M_Bf C_{(B'B)}]}_{M_{B'}f} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 3.1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$, B la base canónica y $B' = \{(1, -1), (-1, 0)\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_Bf} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{C_{(BB')}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{B'}f} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{C_{(B'B)}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{B'}f} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C_{(BB')}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_Bf} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C_{(B'B)}} \end{aligned}$$

- **Ejercicios 3.1.** 1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ hallar la relación entre su matriz asociada en la base canónica y su matriz asociada en la base $B = \{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$
2. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es una forma bilineal simétrica ¿cómo es su matriz asociada en una base B de V ?
3. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal antisimétrica o alternada ¿cómo es su matriz asociada en una base B de V ?

Definición 3.1. $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que son congruentes si existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tal que

$$A = P^t \cdot A' \cdot P$$

Proposición 3.2. Dos matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son congruentes si y sólo si representan una misma forma bilineal.

Proposición 3.3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A es congruente con B entonces se tiene que $rg(A) = rg(B)$.

4. Rango de una forma bilineal

Definición 4.1. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, $\dim V = n$, se define el **rango de una forma bilineal** como el rango de la matriz $M_B f$ siendo B una base cualquiera de V .

Observar que de la proposición 3.3 se sigue que el rango es independiente de la matriz asociada elegida.

■ **Ejemplos 4.1.** ¿Cuál es el rango de f en los siguientes casos?

1. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$. La matriz de f asociada a la base canónica es

$$M_{B_c} f = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y por tanto el $rg(f) = 2$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_2$. La matriz de f asociada a la base canónica es

$$M_{B_c} f = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & f(e_1, e_3) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & f(e_2, e_3) \\ f(e_3, e_1) & f(e_3, e_2) & f(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto el $rg(f) = 2$.

■ **Ejercicios 4.1.** ¿Cuál es el rango de las siguientes formas bilineales?

1. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$
2. $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x_1y_1 - x_3y_3 + x_2y_1 + x_4y_3 + x_1y_4$.

Definición 4.2. Una forma bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, $\dim V = n$, es degenerada si su rango es menor que n . Si su rango es n es no degenerada. Es decir, una forma bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, $\dim V = n$, es degenerada si y sólo si $\det(M_B f) = 0$ y es no degenerada si y sólo si $\det(M_B f) \neq 0$

Proposición 4.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal no degenerada, entonces:

$$\forall x \in V - \{0\} \text{ existe } y \in V \text{ tal que } A(x, y) \neq 0$$

Demostración. Reducción al absurdo. Supongamos existe $x \in V - \{0\}$ tal que $A(x, y) = 0$ para todo $y \in V$. Tomemos una base de V que contenga a x : $B = \{x, v_2, \dots, v_n\}$ entonces

$$M_B A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por tanto A sería degenerada. ■

5. Formas cuadráticas: Definición y Propiedades.

Definición 5.1. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ forma bilineal simétrica. Se llama **forma cuadrática asociada** a f a la aplicación

$$\begin{aligned} Q_f : V &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto Q_f(x) = f(x, x). \end{aligned}$$

Se pueden definir formas cuadráticas asociadas a formas bilineales no simétricas aunque nosotros sólo estudiaremos el caso de las formas cuadráticas asociadas a formas bilineales simétricas.

■ **Ejemplos 5.1.** Calcular la forma cuadrática asociada a las siguientes formas bilineales

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\bar{x}, \bar{y}) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$ entonces

$$Q_f(\bar{x}) = f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 2x_1x_2$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\bar{x}, \bar{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$ entonces

$$Q_f(\bar{x}) = f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

■ **Ejercicios 5.1.** $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3$

Proposición 5.1. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica y consideramos $Q_f : V \rightarrow \mathbb{K}$ su forma cuadrática asociada. Entonces:

1. $Q_f(\lambda v) = \lambda^2 Q_f(v)$
2. $Q_f(0) = 0$
3. $Q_f(v + w) = Q_f(v) + Q_f(w) + 2f(v, w)$

Proposición 5.2. Sea f forma bilineal simétrica y $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ su forma cuadrática asociada. Entonces

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}[Q(\bar{x} + \bar{y}) - Q(\bar{x}) - Q(\bar{y})]$$

Demostración. Se obtiene directamente despejando en el tercer apartado de la proposición 5.1. ■

■ **Ejercicios 5.2.** 1. ¿Cuál de las siguientes aplicaciones $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ son formas cuadráticas?

- a) $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 1$
- b) $Q : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(ax^2 + bx + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$

2. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $Q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 - 8xz - 6yz + z^2$. Calcular la forma Bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ para la que Q es su forma cuadrática asociada

6. Expresión matricial de una forma cuadrática. Cambios de base

Consideremos $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , como f es simétrica tenemos que $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$. Por tanto

$$Q(x) = f(x, x) = (x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ f(v_2, v_1) & f(v_2, v_2) & \cdots & f(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & f(v_n, v_2) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$(x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ f(v_1, v_2) & f(v_2, v_2) & \cdots & f(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_1, v_n) & f(v_2, v_n) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definición 6.1. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ f(v_2, v_1) & f(v_2, v_2) & \cdots & f(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & f(v_n, v_2) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

se dice que es la matriz de la forma cuadrática Q respecto de la base B de V , es decir, $A = M_B Q$.

Observar que $M_B Q$ es siempre una matriz simétrica. Por tanto, si denotamos por $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = b_{ij} \quad \forall i, j = \{1, \dots, n\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} Q(x) = f(x, x) &= \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij} x_i x_j \\ &= b_{11} x_1^2 + \cdots + b_{nn} x_n^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \cdots + 2b_{1n} x_1 x_n + 2b_{23} x_2 x_3 + \cdots + 2b_{2n} x_2 x_n + \\ &+ 2b_{34} x_3 x_4 + \cdots + 2b_{3n} x_3 x_n + \cdots + 2b_{(n-1)n} x_{(n-1)} x_n \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 6.1.** Hallar la matriz asociada a $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ con $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2$ en la base canónica.

$$M_{B_c} Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

■ **Ejercicios 6.1.** Hallar la matriz asociada a Q en la base canónica en los siguientes casos

1. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$
2. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ con $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_4^2 + 2x_4x_3 - x_3^2 + x_1x_3$

Proposición 6.1. Cambios de base en formas cuadráticas

Sea $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal, $\dim V = n$, B, B' bases de V y $C_{B'B}$ la matriz del cambio de la base B' a la base B .

$$M_{B'} Q = C_{(B'B)}^t M_B Q C_{(B'B)}$$

Demostración. Sean $x, y \in V$ con:

$$\bar{x}_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bar{x}_{B'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

Así pues se tiene

$$\bar{x} = C_{(B'B)} \bar{x}'$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) M_B Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{(B'B)} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}^t M_B Q C_{(B'B)} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \\ &= (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \underbrace{[C_{(B'B)}^t M_B Q C_{(B'B)}]}_{M_{B'} Q} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

■ **Ejercicios 6.2.** Hallar la matriz asociada a Q en la base canónica y en la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ con $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

7. Diagonalización de formas cuadráticas.

Definición 7.1. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n , $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Decimos que $u, v \in V$ son conjugados respecto de f si $f(u, v) = 0$.

Proposición 7.1. Dado $u \in V$ el subconjunto

$$C_u = \{v \in V / f(u, v) = 0\} \subset V$$

es un subespacio vectorial de V .

Proposición 7.2. Si $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica no idénticamente nula entonces existe un $u \in V$ tal que $f(u, u) \neq 0$

Demostración. Puesto que $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica no idénticamente nula entonces existen $v, w \in V$ tal que $f(v, w) \neq 0$ y como

$$f(v + w, v + w) = f(w, w) + f(v, v) + 2f(v, w)$$

obtenemos que $u = v + w, v$ ó w .

■

Proposición 7.3. Sea $v \in V$ con $f(v, v) \neq 0$ entonces

$$V = C_v \oplus L\{v\}$$

Demostración. ■ $C_v \cap L\{v\} = \{0\}$.

$$\text{■ Si } w \in V \text{ entonces } w = \overbrace{\frac{f(w, v)}{f(v, v)} v}^{L\{v\}} + \overbrace{\left(w - \frac{f(w, v)}{f(v, v)} v\right)}^{C_v}$$

■

Teorema 7.1. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n , $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada. Entonces existe una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que

$$M_B(Q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, $f(v_i, v_j) = 0$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto, la expresión en coordenadas de la forma cuadrática Q respecto a B es:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

Demostración. Hacemos la demostración por inducción sobre la dimensión de V . Suponemos que f es una forma bilineal simétrica no idénticamente nula, ya que en caso contrario siempre se verifica.

Es claro que si $\dim V = 1$ ó 2 se verifica. Supongamos que es cierto hasta $\dim V = n - 1$.

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con $\dim V = n$. Sea $v \in V$ con $f(v, v) \neq 0$ entonces $V = C_v \oplus L\{v\}$. Como $\dim C_v = n - 1$ por hipótesis de inducción tenemos que existe una base $B_C = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ de C_v tal que $f(u_i, u_j) = 0$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Por tanto

$$B = \{u_1, \dots, u_{n-1}, v\}$$

es la base que buscábamos. ■

Corolario 7.1. Toda forma cuadrática o forma bilineal simétrica es diagonalizable. Por tanto, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica entonces A es congruente con una matriz diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible P tal que $D = P^t A P$

Métodos para diagonalizar formas cuadráticas.

1. Diagonalizar completando cuadrados.

a) con términos cuadrados

■ **Ejemplo 7.1.** $Q(x) = Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

como $Q(x) = Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$ si hacemos el cambio

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
 Q(x'_1, x'_2) &= (x'_1)^2 = \\
 &= (x'_1 \ x'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\
 &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\
 &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = Q(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 7.2.** $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2$ Elegimos una variable y todos los factores que la contengan, por ejemplo x_1 , y completamos un cuadrado.

$$\begin{aligned}
 Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2 = (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - x_3^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = \\
 &= (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - 4(x_2 + 1/2x_3)^2 + 4x_3^2
 \end{aligned}$$

hacemos el cambio

$$(x'_1 \ x'_2 \ x'_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
 Q(x'_1, x'_2, x'_3) &= (x'_1)^2 - 4x_2'^2 + 4x_3'^2 = \\
 &= (x'_1 \ x'_2 \ x'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\
 &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\
 &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q(x_1, x_2, x_3)
 \end{aligned}$$

b) Sin términos al cuadrado

■ **Ejemplo 7.3.** Sea $Q(x) = Q(x, y, z, t) = xy + xz + yz + tz + xt$, elegimos un sumando: xy y todos aquellos que tengan la variable x o y , en nuestro caso $xz + yz + xt$, entonces como $(x + z)(y + t + z) = xy + xt + xz + yz + zt + z^2$ tenemos que $Q(x) = Q(x, y, z, t) = xy + xz + yz + tz = (x + z)(y + t + z) - z^2$ y haciendo el cambio

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & x' + y' \\ y + t + z & = & x' - y' \\ z & = & z' \\ t & = & t' \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$Q(x, y, z, t) = (x' + y')(x' - y') - z'^2 = x'^2 - y'^2 - z'^2$$

- **Ejercicios 7.1.** 1) $Q(x) = Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2x(z + t) + 6y(x + z + t)$
2) $Q(x) = Q(x, y, z) = xy + xz + yz$

2. Diagonalizar por operaciones elementales.

■ **Ejemplo 7.4.** $Q(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1^2$.

La matriz de la forma cuadrática en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$A = M_{B_c}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales en la matriz A por filas: $F_2 - 1/2F_1$ y por columnas $C_2 - 1/2C_1$, es decir,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}^t} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}}_{M_B(Q)}$$

Obtenemos así que la matriz $M_B(Q)$ es la matriz de la forma cuadrática en la base $B = \{(1, 0)(-1/2, 1)\}$.

■ **Ejemplo 7.5.** $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$.

La matriz de la forma cuadrática en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$A = M_{B_c}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales en la matriz A ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{M_B(Q)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{M_B(Q)}$$

Obtenemos así que la matriz $M_B(Q)$ es la matriz de la forma cuadrática en la base $B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-3/2, -1/2, 1)\}$.

■ **Ejemplo 7.6.** $Q(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^2$ La matriz de la forma cuadrática en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$A = M_{B_c}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cambiamos la filas F_1, F_2 y las columnas C_1, C_2 de orden, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}}_{M_B(Q)}$$

Obtenemos así que la matriz $M_B(Q)$ es la matriz de la forma cuadrática en la base $B = \{(0, 1), (1, -1/2)\}$

■ **Ejercicios 7.2.** 1) $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_4 - 2x_1x_3$

2) $Q(x) = Q(x, y, z) = xy + xz + yz$

$$3) f(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2$$

$$4) Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

$$5) Q(x) = Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2x(z + t) + 6y(x + z + t)$$

8. Estudio del signo de una forma cuadrática

Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V tal que

$$M_B(Q) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(v_2, v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q(v_n) \end{pmatrix}$$

Podemos reordenar la base $B\{v_1, \dots, v_r, v_{(r+1)}, \dots, v_s, v_{(s+1)}, \dots, v_n\}$ de forma que

$$\begin{cases} Q(v_i) > 0 & 1 \leq i \leq r \\ Q(v_j) < 0 & (r+1) \leq j \leq s \\ Q(v_p) = 0 & (s+1) \leq i \leq n \end{cases}$$

Si tomamos ahora la base

$$B' = \left\{ \frac{v_1}{\sqrt{Q(v_1)}}, \dots, \frac{v_r}{\sqrt{Q(v_r)}}, \frac{v_{(r+1)}}{\sqrt{-Q(v_{(r+1)})}}, \dots, \frac{v_s}{\sqrt{-Q(v_s)}}, v_{(s+1)}, \dots, v_n \right\}$$

entonces

$$M_{B'}(Q) = \begin{pmatrix} Q\left(\frac{v_1}{\sqrt{Q(v_1)}}\right) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & Q\left(\frac{v_{(r+1)}}{\sqrt{-Q(v_{(r+1)})}}\right) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots & Q(v_{(s+1)}) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Q(v_n) \end{pmatrix} =$$

$$= M_{B'}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A esta representación matricial de Q la llamaremos matriz canónica de la forma cuadrática.

Proposición 8.1. Ley de la inercia de las formas cuadráticas. *Si una forma cuadrática se reduce a la suma de cuadrados en dos bases diferentes, el número de términos positivos y negativos es el mismo en ambos casos.*

Definición 8.1. Llamamos índice de positividad al número de términos positivos de la forma cuadrática diagonalizada, r , índice de negatividad al número de términos negativos de la forma cuadrática diagonalizada, s y índice de nulidad al número de términos nulos de la forma cuadrática diagonalizada, $n - r - s$. El par (r, s) es la *signatura* de la forma cuadrática.

Corolario 8.1. *Dos matrices simétricas congruentes siempre tienen la misma signatura.*

■ **Ejemplo 8.1. (Sep. 00-)** Calcular índice de positividad, negatividad y nulidad de Q

$$Q(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

mediante operaciones elementales obtenemos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/45 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/45 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +319/45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo es haciendo sólo las operaciones por filas, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+6F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4+2/45F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & +319/45 \end{pmatrix}$$

Observar que:

$$P^t = (M_{B,B_c})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & 1 & 0 \\ -2/3 & 4/15 & 2/45 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $P^t.A.P = D$.

Definición 8.2. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n , $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada.

- Q es definida si y sólo si $Q(v) = f(v, v) \neq 0$ para todo $v \neq 0 \in V$.
- Q es definida positiva si y sólo si $Q(v) = f(v, v) > 0$ para todo $v \neq 0 \in V$.
- Q es semidefinida positiva si y sólo si $Q(v) = f(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$.
- Q es definida negativa si y sólo si $Q(v) = f(v, v) < 0$ para todo $v \neq 0 \in V$.
- Q es semidefinida negativa si y sólo si $Q(v) = f(v, v) \leq 0$ para todo $v \in V$.

■ **Ejemplo 8.2.** $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$.

La matriz de la forma cuadrática en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$A = M_{B_c}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales en la matriz A obtenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{BB_c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{M_B(Q)}$$

Como $Q(x'_1, x'_2, x'_3) = x_1'^2 + 2x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2 > 0$ para todo $(x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$ con $(x'_1, x'_2, x'_3) \neq (0, 0, 0)$, se sigue que Q es definida positiva.

■ **Ejercicios 8.1.** ■ En $\mathbb{R}^4$, y con respecto a la base usual, se considera la forma cuadrática

$$f(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2.$$

Estudiar su rango y signatura. Decidir si es definida (semidefinida) positiva o negativa o si, por el contrario, no tienen signo definido.

■ Para cada número real b se considera la forma cuadrática (en $\mathbb{R}^3$)

$$Q_b(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + b(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Determinar, según los valores de b , su signatura. Determinar los valores de b para los que es definida positiva.

Teorema 8.1. Teorema de Sylvester. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces f es definida positiva si y sólo si $M_B(f) = (a_{ij})$, para toda B base de V , verifica que

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

es decir, que sean positivos todos los menores “angulares” de la matriz $M_B(f) = (a_{ij})$.

Corolario 8.2. Sea $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces f es definida negativa si y sólo si $M_B(f) = (a_{ij})$, para toda B base de V , verifica que $(-1)^k \Delta_k > 0$, es decir, si los menores angulares van alternando de signo empezando en negativo.

■ **Ejercicios 8.2.** ■ $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 11z^2 - 2xy + 4xz - 6yz - 2y + 8z$

■ $Q(x) = 2x^2 + 2xz + 4y^2 + 2z^2$

■ $Q(x) = 7x^2 - 6xy + 4xz - 2y^2 + 2yz + z^2$