DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS NATURALES
E.T.S.I. de MONTES (UPM)
EXAMEN EXTRAORDINARIO de ALGEBRA LINEAL
15 de FEBRERO de 2000

Problema 1.-Determina la matriz canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a+2-b & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a+1-b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Halla una matriz de paso P , tal que $J = P^{-1}AP$, según los distintos valores de los parámetros reales a y b .

Problema 2.-Sea $B = \{e^{-nx}, e^{-(n-1)x}, \dots, e^{-x}, 1, e^x, \dots, e^{(n-1)x}, e^{nx}\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ una base de un espacio vectorial real V con las operaciones usuales de suma, y producto por escalar, de funciones reales de variable real. Sea T

$$\begin{aligned} T: V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f'' - f' - 2f \end{aligned}$$

- (3 puntos) Demuestra que T es lineal.
- (3 puntos) Halla la matriz asociada a T en la base B
- (4 puntos) Calcula una base ortogonal del $\ker T$ para el producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Problema 3.-Para cada $n \in \mathbb{N}$ determina justificadamente, cuando exista, una matriz A_n de rango n tal que

$$A_n \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4.-Sean A y B matrices reales simétricas de orden n . Denotaremos por $\sigma(A)$ al conjunto de autovalores de A y por $\sigma(B)$ al conjunto de autovalores de B , por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\| \cdot \|$ al producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ y la norma asociada a ese producto escalar, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

- (3 puntos) Si $\sigma(A) \subset (0, 1)$ entonces la forma cuadrática cuya matriz, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es $A^2 - A$ es definida negativa.
- (4 puntos) Probar que $\max\{\langle x, Ax \rangle : \|x\| = 1\} = \max\{\sigma(A)\}$ y que $\min\{\langle x, Ax \rangle : \|x\| = 1\} = \min\{\sigma(A)\}$
- (3 puntos) Supongamos que $\lambda > \mu$ para cada par de autovalores $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \in \sigma(B)$. Probar que entonces la forma cuadrática que tiene por matriz, respecto de la base canónica, a $A - B$ es definida positiva.

-
- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
 - Los cálculos realizados en la resolución de cada ejercicio figurarán en las hojas entregadas.
 - No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
 - El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.

Fecha de publicación de las calificaciones: martes 22 de febrero

Fecha de revisión de exámenes: lunes 28 de febrero, de 11 a 11.30 horas