DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS NATURALES
E.T.S.I. de MONTES (UPM)

EXAMEN FINAL de ALGEBRA LINEAL - 22 de Junio de 2000

Problema 1.- Se considera el conjunto W de matrices reales 3×3 que son de la siguiente forma

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} c & d & e \\ b & c & d \\ a & b & c \end{pmatrix}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

con la suma usual de matrices y el producto usual de matrices por números reales

(1) Demostrar que W con dichas operaciones es un espacio vectorial real y dar una base.

(2) Sea $S \subset W$ el subconjunto de las matrices de W que son además simétricas. Demostrar que S es un subespacio vectorial de W y calcular un suplementario de S en W

(3) (Notad que si $A \in W$ entonces $A^t \in W$). Sea

$$\begin{array}{rccc} T: & W & \longrightarrow & W \\ & A & \mapsto & T(A) = \frac{A+A^t}{2} \end{array}$$

Demostrar que T es lineal y calcular su matriz asociada respecto a una base (a elegir por el alumno)

(4) Probar que T es diagonalizable y calcular una base de autovectores de T

Problema 2.- Sean, en adelante, n un número par y $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo nilpotente con orden de nilpotencia 2.

(1) Demostrar que $rg(T) \leq \frac{n}{2}$

(2) Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq \frac{n}{2}$. Construir una aplicación lineal $S: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nilpotente de orden de nilpotencia 2 tal que $rg(S) = k$

(3) Demostrar que $rg(T) = \frac{n}{2}$ si y solo si $\mathrm{Im}T = \ker T$

(4) Calcular la forma canónica de Jordan del endomorfismo T en función de su rango.

Problema 3.- En el espacio $R_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Consideramos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} <\cdot,\cdot>: & R_2[x] \times R_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \mapsto & <p,q> = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)(1-x^2)dx \end{array}$$

(1) Demostrar que la aplicación anterior define un producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$

(2) Calcula una base ortonormal, para este producto escalar, en $\mathbb{R}_2[x]$

(3) Calcula la aplicación adjunta D^*, según este producto escalar, de la aplicación derivada $D(p) = p'$

Problema 4 Elegir **una y solamente una** de las siguientes opciones

Opción A Representa, calculando ejes y centro, la cónica de ecuación

$$xy - x - y - 1 = 0$$

Opción B.- Calcula la forma de Jordan de la matriz M dependiendo del parámetro real a

$$M = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$$

En el caso $a = 0$,dar una matriz P tal que $M = P^{-1}JP$

- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
- Los cálculos realizados en la resolución de cada ejercicio figurarán en las hojas entregadas.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.