

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS
NATURALES
E.T.S.I. de MONTES (UPM)
SEGUNDO PARCIAL de ALGEBRA LINEAL
27 de mayo de 2000

Problema 1.- Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y fijemos la base de $\mathbb{R}_3[x]$

$$B = \{1, x^2 - x + 1, x^3 - x^2, x^3\}$$

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal tal que su matriz asociada en la base B es $M_B(T) = A$. Calcular la forma canónica de Jordan, J , de la matriz A y una base B' de polinomios de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $M_{B'}(T) = J$

Problema 2.- Sean de nuevo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \{1, x^2 - x + 1, x^3 - x^2, x^3\}$$

como en el ejercicio anterior y consideremos para cada número real y la matriz

$$C_y = I + yA + \frac{y^2}{2!}A^2 + \frac{y^3}{3!}A^3$$

donde I es la matriz identidad 4×4 , y sea $L_y : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal tal que $M_B(L_y) = C_y$. Para todo $p \in \mathbb{R}_3[x]$ definamos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = L_y(p)(x)$

(i) **(7 puntos)** Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(ii) **(3 puntos)** Calcular los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad \text{siendo } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Problema 3.- Sea $D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Diremos que es una matriz *dorada* si se cumple que

$$D^{k+2} = D^{k+1} + D^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

recuerda que $D^0 = I$ para cualquier matriz D

- (i) **(2 puntos)** Notad que la igualdad anterior en $k = 0$ se convierte en $D^2 = D + I$. Demostrar que D es dorada $\iff D^2 - D - I = 0$
- (ii) **(2.5 puntos)** Demuestra que si D es una matriz dorada entonces es invertible y diagonalizable
- (iii) **(2.5 puntos)** Describe todas las matrices diagonales, $n \times n$ que son doradas. Usando la relación de semejanza, dar una forma general de todas las matrices doradas de tamaño $n \times n$
- (iv) **(2 puntos)** Demuestra que si D es una matriz dorada entonces $I - D$ es también dorada y calcular la inversa de $I - D$
- (v) **(1 puntos)** Sean $D_1, D_2, \dots, D_s$ matrices doradas y $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}, \dots,$

$$C_s = \begin{pmatrix} c_{s1} \\ \vdots \\ c_{sn} \end{pmatrix}; s \text{ vectores de } \mathbb{R}^n. \text{ Sea } X_k = \sum_{i=1}^s D_i^k C_i \text{ Demuestra que la sucesión}$$

de vectores $\{X_k\}$ cumple la condición de Fibonacci, esto es

$$X_{k+2} = X_{k+1} + X_k \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

Problema 4.- Consideremos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ donde $\langle, \rangle$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que tiene por matriz asociada en la base canónica B_c la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & c \\ b & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Sea $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(u, v) = \langle u, T(v) \rangle$

- (i) **(2 puntos)** Determina los valores de a, b, c para que F sea un producto escalar en $\mathbb{R}^3$
- (ii) **(5 puntos)** En el caso que F sea un producto escalar demuestra que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ que es a la vez ortonormal para el producto escalar usual $\langle, \rangle$ y ortogonal para el producto escalar F
- (iii) **(3 puntos)** Para los valores a, b, c obtenidos en (i) calcular una base ortonormal para F

- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
- Los cálculos realizados en la resolución de cada ejercicio figurarán en las hojas entregadas.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.