DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS NATURALES
E.T.S.I. de MONTES (UPM)

EXAMEN EXTRAORDINARIO de ALGEBRA LINEAL - 9 de Septiembre de 2000

Problema 1.- Una empresa de carburantes va a lanzar al mercado tres nuevos tipos de combustibles: regular, extra e hiper obtenidos tras mezclar gasóleo con diferentes aceites vegetales según los siguientes porcentajes

	gasóleo	colza	soja	girasol	beneficio
Regular	30%	30%	30%	10%	400
Extra	60%	10%	20%	10%	500
Hiper	90%	5%	5%		600

Sabiendo que la empresa tiene gasóleo, aceite de colza y aceite de soja, de los que dispone 10.000 Hl de cada uno de ellos, y 1000 Hl de aceite de girasol, y que el beneficio neto en euros por Hl de cada combustible viene dado en la última columna de la tabla ¿Cuánto se debe comercializar de cada combustible para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Problema 2.- Sea W el subespacio de las matrices reales 4×4 generado por el sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determina todas las matrices de W cuya forma canónica de Jordan pertenece a W.

Problema 3.- Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. En este espacio tenemos un producto escalar canónico dado por

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

donde

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \qquad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3.$$

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ lineal, definida por

$$T(p) = xp' + p,$$

donde p' es la derivada de p.

a) Estudiar, demostrando si son ciertas o no, las siguientes afirmaciones:
   (1) T es ortogonal (respecto al anterior producto escalar canónico).
   (2) T es autoadjunto (respecto al anterior producto escalar canónico).

b) Consideramos ahora la aplicación $F : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(p, q) = \langle p, T(q) \rangle.$$

Demostrar que la aplicación F es un producto escalar y calcular una base ortonormal de $\mathbb{R}_3[x]$ para este producto escalar.

c) Encontrar, si es posible, una base B que sea simultáneamente ortogonal para los productos escalares $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ y F.

d) Encontrar, si es posible, una base B que sea simultáneamente ortonormal para los productos escalares $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ y F. ¿Cuándo dos productos escalares tienen una base ortonormal común?.

Problema 4 Elegir **una y solamente una** de las siguientes opciones

Opción A.- Sea $a \in \mathbb{R}$. Se considera la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T_a: & \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ & p & \mapsto & T_a(p) \end{array}$$

$$\text{donde} \qquad T_a(p)(x) = \frac{p(x) - p(a)}{x - a}$$

Calcular la forma canónica de Jordan de T_a y una base de Jordan para T_a.

Opción B.- Consideremos la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, siguiente

$$Q(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Calcular la signatura de Q (Indice de positividad, negatividad y nulidad)

- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
- Los cálculos realizados en la resolución de cada ejercicio figurarán en las hojas entregadas.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.