

Problema 1.- Sea M la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 + a^2 & -2a + 2 \\ 1 & -1 + a^2 & 1 \\ 1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

- **(6 puntos)** Calcular la forma canónica de Jordan, J , dependiendo de los valores de $a \in \mathbb{R}$, de la matriz M .
- **(4 puntos)** En el caso $a = 0$ calcúlese una matriz invertible P tal que $J = P^{-1}MP$.

Problema 2.- Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1) **(3 puntos)** Probar que la aplicación f define un producto escalar en \mathbb{R}^3 .
- (2) **(4 puntos)** Calcula una base ortonormal, para este producto escalar, en \mathbb{R}^3 .
- (3) **(3 puntos)** Calcular la distancia $d(\vec{u}, H)$, según el producto escalar f , siendo $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $H = L\{(1, 2, 3)\}$.

Problema 3.- Clasificar, según los valores de a y c , la cónica siguiente

$$ax^2 + 2xy + (2 - a)y^2 + 2x + 2y + c = 0$$

Problema 4.- Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 con las operaciones usuales. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación lineal $T_\alpha : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ determinada por

$$T_\alpha(p)(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)p'(x) + xp(x) & \text{si } \text{grado}(p) \leq 2, \\ \alpha x^2 & \text{si } p(x) = x^3. \end{cases}$$

- (1) **(4 puntos)** Demostrar que existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que T_{α_1} es diagonalizable y T_{α_2} no es diagonalizable.
- (2) **(3 puntos)** Calcula el polinomio mínimo de T_α para dos valores distintos del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, a elección personal.
- (3) **(3 puntos)** Consideramos ahora en $\mathbb{R}_3[x]$ el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$.

Determinar razonadamente

- Todos los valores de α para los que T_α es una aplicación autoadjunta.
- Todos los valores de α para los que T_α es una aplicación ortogonal.

para el producto escalar definido.

-
- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
 - Los cálculos realizados en la resolución de cada ejercicio figurarán en las hojas entregadas.
 - No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
 - El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.