EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL
PARTE TEÓRICA
31 de ENERO de 1994

Consideremos los espacios vectoriales $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sea α un número real. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_\alpha : & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & p & \mapsto & T_\alpha(p) \end{array}$$

donde $T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} p(\alpha) & p(\alpha+1) \\ p'(\alpha) & p'(\alpha+1) \end{pmatrix}$, siendo p' la derivada del polinomio p.

Se pide:

1.a Demostrar que T_α es lineal.

1.b Dadas $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\mathcal{B}'_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular las coordenadas de $T_\alpha(1), T_\alpha(x), T_\alpha(x^2), T_\alpha(x^3)$ en la base $\mathcal{B}'_c$.

1.c Calcular la matriz asociada a T_α respecto a las bases $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}'_c$ (es decir, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(T_\alpha)$).

2.a Consideremos ahora los conjuntos $\mathcal{B} = \{1+2x+2x^2+2x^3, x+2x^2+2x^3, x^2+2x^3, x^3\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Probar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, respectivamente. Calcular la matriz asociada a T_α respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

2.b Calcular la dimensión del núcleo y de la imagen de T_α. Hállese una base de la imagen de T_α.

3.a Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Estudiar si existe $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ¿Es único?.

3.b Resolver, según los valores de los parámetros α, a, b, c, d el sistema lineal

$$\begin{array}{ccccc} x & +\alpha y & +\alpha^2 z & +\alpha^3 t & = a \\ x & +(\alpha+1)y & +(\alpha+1)^2 z & +(\alpha+1)^3 t & = b \\ & +y & +2\alpha z & +3(\alpha)^2 t & = c \\ & +y & +2(\alpha+1)z & +3(\alpha+1)^2 t & = d \end{array}$$

4.a Demostrar si es cierta o no la siguiente proposición: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ existe una base, $\mathcal{B}_\alpha$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}'_\alpha$ base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada a T_α respecto a las bases $\mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{B}'_\alpha$ es la matriz identidad.

4.b Sea $\mathcal{S}_\alpha = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(\alpha) = p(\alpha+1) = 0\}$. Demostrar que $\mathcal{S}_\alpha$ es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Construir un suplementario de $\mathcal{S}_\alpha$.

4.c Construir una aplicación lineal $L_\alpha : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de rango 2 tal que $L_\alpha(p) = T_\alpha(p)$ para todo $p \in \mathcal{S}_\alpha$.

Observaciones:

- *Cada problema (1,2,3,4) se entregará en una hoja separada.*
- *Cada apartado de cada uno de los problemas vale* **un punto**, *siendo así la calificación del examen* **la suma** *de las calificaciones correspondientes a cada apartado.*
- *El examen deberá realizarse en un tiempo máximo de* **3 horas**.
- *No está permitido utilizar libros, apuntes ni calculadoras.*