EXAMEN FINAL DE ALGEBRA LINEAL
14 de FEBRERO de 1994
PARTE PRACTICA

1.- Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, calcular una matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $P \cdot A = B \cdot P$.

2.- Calcular razonadamente la forma canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & a-a^2-3 & a^2+3 \\ a-1 & a & a-2 & 1 \\ 4-a & 0 & a^2-a+4 & -a^2-3 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. En el caso particular en el que $a = 2$, encontrar una matriz P de modo que $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

3.- En el subespacio $E = L\{1, sen\ x, cos\ x\}$ de $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ se define el siguiente producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in E.$$

a) Calcúlese una base ortonormal de E con respecto a ese producto escalar.
b) Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} D_k : & E & \rightarrow & E \\ & f & \mapsto & f^{k)}, \end{array}$$

siendo $f^{k)}$ la derivada $k-$ésima de la función f. Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{N}$ para los que D_k es autoadjunta.

4.- Dada la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$2xy - 2xt + y^2 - 2yz - 6yt + z^2 + 8zt + 15t^2,$$

Calcular sus índices de positividad, negatividad y nulidad comentando el método utilizado.

5.- Encontrar un polinomio $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que maximiza $\int_0^1 p(x)dx$ cumpliendo además que $p(0) = 0,\ p'(0) \geq 0,\ p''(0) \geq 0, p'(0) + \frac{p''(0)}{2} \leq 1$.

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA LINEAL
14 de FEBRERO de 1994
PARTE TEORICA

1.- a) Sea E un espacio vectorial real con dimensión $dim\ E = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo tal que $dim\ Ker\ f = n$. Estudiar, demostrando si es cierta o no, la siguiente proposición:

$$f \circ f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ker\ f = Im\ f.$$

b) ¿ Es cierta la proposición anterior si no se supone que $dim\ Ker\ f = n$?

2.- Sea $\mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) = \{p(x) : p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que *99* con coeficientes reales $\}$. Sea

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) \\ & p(x) & \mapsto & p(-x). \end{array}$$

a) Probar que T es lineal.
b) Calcular el polinomio característico y el polinomio mínimo de T.
c) Hallar una base de $\mathcal{P}_{99}(\mathbb{R})$ formada por autovectores de T.

3.- Dada la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & I(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx. \end{array}$$

Sea

$$S = \{p \in \mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) : p(x) = p(-x)\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } I(p) = 0\}.$$

Probar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_{99}(\mathbb{R})$ y calcular la dimensión de dicho subespacio S.