

1.- Calcular la forma de Jordan, J , de la matriz A para cada valor de a

$$A = \begin{pmatrix} a^2 + a & a - a^2 & a \\ a & 0 & a \\ 1 - a^2 & a^2 - a - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el caso $a = 0$ calcular una matriz invertible P tal que $J = P^{-1}AP$.

2.- Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial generado por la base $\mathcal{B} = \{e^x, e^{-x}, \sin x, \cos x\}$. Definamos la aplicación lineal $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(f) = (f(0), f'(0), f''(0))$.

- Calcúlese la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}$ y la canónica en $\mathbb{R}^3$.
- Sea $f \in \mathcal{V}$. Obténgase (respecto a f) todas las funciones $g \in \mathcal{V}$ que cumplan que

$$g(0) = f(0), \quad g'(0) = f'(0) \quad \text{y} \quad g''(0) = f''(0).$$

3.- Consideramos $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Diremos que una aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es antisimétrica si $T^* = -T$ siendo T^* la aplicación adjunta de T . Sea T una aplicación antisimétrica.

- Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Compruébese que su matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ es una matriz antisimétrica ($A \in \mathcal{M}_n$ se dice antisimétrica si $A = -A^t$).
- Demuéstrese que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de T entonces $\lambda = 0$.
- Demuéstrese que si T es antisimétrica entonces $T^2 \equiv T \circ T$ es autoadjunto (simétrico).
- Demuéstrese que si $z \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio característico de T (es decir, $P_T(z) = 0$), entonces la parte real de z es nula.
- Demuéstrese que si A es una matriz antisimétrica, entonces $|A| \geq 0$

4.- Calcular la signatura (índice de positividad, índice de negatividad e índice de nulidad) de la siguiente forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{Q}(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt - y^2 - 2yz - 2yt + 2t^2$$