UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID. E.T.S.I. de MONTES
EXAMEN FINAL DE ALGEBRA LINEAL
21 de Junio de 1996

Problema 1 Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, determinadas por

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-4z, 2x+2y+2z) \ , \quad \text{y}$$

$$g(2,1,1) = (1,1,0) \ , \ g(1,1,1) = (-1,3,1) \ , \ g(2,0,1) = (0,2,-1) \ .$$

Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $(f+g)$.

Problema 2 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 7 & 1 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 10 & 1 & 1 & -2 & -2 & -9 \end{pmatrix} .$$

a) Obtener la matriz canónica de Jordan de A.
b) Calcular **razonadamente** los rangos de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{ccc} (A+2I)^4 & , & (A+2I)^{21} \ , \\ (A-I)^4 & , & (A-I)^{21} \ , \\ (A+3I)^9(A-I)^3 & , & (A+3I)^3(A-I)^9 \ . \end{array}$$

Problema 3 Sea el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{\ltimes}, < \cdot, \cdot >)$. Se consideran las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$< f(x), y > = - < x, f(y) > \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}^{\ltimes} \ .$$

Se pide:
1) **(6 puntos)** Comprobar que tales funciones son aplicaciones lineales y que sus matrices respecto a una base ortonormal son antisimétricas.
2) **(4 puntos)** Demostrar que

$$\ker f = (\operatorname{Im} f)^{\perp} \quad \text{y}$$

$$\mathbb{R}^{\ltimes} = \operatorname{Im} f \bigoplus \ker f \ .$$

Problema 4 Sean f y Q, respectivamente endomorfismo y forma cuadrática definidos, en la base canónica, por

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z, x+2y, -x+2z) \\ Q : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 2x^2+2y^2+2z^2+2xy-2xz \ . \end{array}$$

1) **(2 puntos)** Probar que $F_Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, forma polar de Q, es un producto escalar.
2) **(6 puntos)** Obtener razonadamente una base, si ésta existe, en la que f y Q tengan matrices diagonales asociadas D_f y D_Q iguales, y si no justificar por qué no.
3) **(2 puntos)** Determinar el lugar geométrico W de los elementos de $\mathbb{R}^3$ cuyos transformados mediante f son ortogonales, respecto a F_Q, al subespacio $S \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x - z\}$.

- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.

Madrid a 21 de Junio de 1996