UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID. E.T.S.I. de MONTES
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL de ALGEBRA LINEAL

31 de Mayo 1996

Problema 1.- Sea $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ un endomorfismo del que se sabe:

- i) $\text{rango}(f) = 4$.
- ii) Las raíces del polinomio característico de f son λ_1 y λ_2 , y las dos son reales.
- iii) $\dim[\ker(f - \lambda_1 id)^{\beta_1}] - \dim[\ker(f - \lambda_1 id)] = 1$,
 $\dim[\ker(f - \lambda_2 id)^{\beta_2}] - \dim[\ker(f - \lambda_2 id)] = 2$,
donde β_i es el índice del autovalor λ_i .

Determinar **razonadamente** las posibles formas canónicas de Jordan de f .

Problema 2.- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_\epsilon(\mathbb{R})$ de las matrices reales 2×2 , se considera la siguiente aplicación:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_\epsilon(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_\epsilon(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle = \text{traza}(A^t \cdot B) .$$

- i) Comprobar que la aplicación anterior define un producto escalar en $\mathcal{M}_\epsilon(\mathbb{R})$.
- ii) Obtener una base ortonormal del subespacio $\mathcal{S}$ formado por las matrices simétricas reales 2×2 .

iii) Calcular la distancia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ al subespacio $\mathcal{S}$.

Problema 3.- Sea la forma cuadrática

$$Q_\alpha : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, t) \longmapsto Q(x, y, z, t) = \alpha x^2 + xy + zt ,$$

donde α es un número real.

Diagonalizar Q_α , según el valor de α , determinando en cada caso una base en la que Q_α sea diagonal.

Problema 4.- En el plano $\mathbb{R}^2$ consideramos la recta

$$r \equiv x + y = 2 .$$

i) (7 puntos) Para cada número real α clasificar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón -cociente- de distancias a la recta r y al origen, el punto $(0, 0)$, es igual a α .

ii) (3 puntos) Para los valores de α en los que el anterior lugar geométrico sea una parábola, obténgase **justificadamente** su vértice así como la recta tangente en él a la parábola.

-
- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
 - No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
 - El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.
 - Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.

Madrid a 31 de Mayo de 1996