DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS
NATURALES

E.T.S.I. de MONTES (UPM)

EXAMEN FINAL de ALGEBRA LINEAL

22 de junio de 1999

Problema 1.- Sean $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}_3[x]$ y $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal definida por $T(p)(x) = (1-x)p'(x) + p(x)$.

a) Demostrar que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ y dar una base de W .

b) Probar que para cada $p \in W$ se tiene que $T(p) \in W$.

Consideremos ahora la aplicación lineal $S : W \rightarrow W$ tal que $S(q) = T(q)$ para todo $q \in W$.

c) Obtener la matriz de S respecto de la base de W calculada en a).

d) Calcúlese bases del núcleo y la imagen de S .

Problema 2.- Hallar la forma canónica de Jordan de $f : \mathbb{R}_7 \rightarrow \mathbb{R}_7$ una aplicación lineal de la que sabemos que tiene dos únicos autovalores y que:

a) $\dim \ker f^4 - \dim \ker f^3 = 1$.

b) $f^4(v) = 0 \quad \forall v \in \ker f^5$.

c) $\ker(f - 3id)^3 = L\{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\}$.

d) $\dim \ker(f - 3id) < \dim \ker(f - 3id)^3$.

Problema 3.- Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ un matriz simétrica. Denotaremos por $\|\cdot\|$ la norma derivada del producto usual de $\mathbb{R}^n$.

Demuestra que las siguientes proposiciones son verdaderas:

- si $\|Ax\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces los autovalores de A tienen valor absoluto menor o igual que 1.
- si $\|Ax\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $|\det(A)| \leq 1$.
- si $\|Ax\| < \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, entonces la sucesión definida de forma recurrente por $Ax_k = x_{k+1}$, siendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$, verifica $\lim x_k = 0$, para cualquier elección de $x_1 \in \mathbb{R}^n$.
- La afirmación c) no siempre es cierta si se considera la condición $\|Ax\| \leq \|x\|$ en lugar de la desigualdad estricta.

Problema 4.- Para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, la forma cuadrática dada por

$$\mathcal{Q}(x, y, z, t) = (x \ y \ z \ t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 + \alpha \\ 1 & -2 & 2 + \alpha & 2 + \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

- Calcular la signatura de $\mathcal{Q}$ en función de los valores de α .
- Para aquellos valores de α que hacen que $\mathcal{Q}$ sea definida positiva, encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de $\mathcal{Q}$ sea diagonal.
-