
Problema 1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Definamos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & T(X) = AX. \end{array}$$

Se pide:

(1) Calcular la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, y hallar una base del núcleo y una base de la imagen de T.

Sol. Tendremos que calcular las imágenes de los elementos de la base canónica de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ mediante la aplicación T y después calcular las coordenadas de las imágenes en la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,2,0)_{B_c}.$$

$$\mathbf{M_{B_c}(T)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B}_{\ker\ (\mathbf{T})} = \{ \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}.$$

$\mathbf{B}_{\mathbf{Im}\ (\mathbf{T})} = \{ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix} \}$.

(2) Resolver la ecuación matricial $AX = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ denota la matriz nula del espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

La solución de la ecuación es el núcleo de la aplicación T.

(3) Encontrar la forma general de todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que la ecuación matricial $AX = B$ tiene solución.

Sol. Las únicas matrices para las que existe solución son las matrices que pertenecen a la imagen de T, e decir,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.- Consideremos el espacio vectorial $U = \mathcal{L}\ \{\text{sen}x,\ e^x,\ \cos x,\ e^{-x}\}$.

(1) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal *derivada*, $D: U \longrightarrow U$, respecto a la base $\mathcal{B} = \{\text{sen}x,\ e^x,\ \cos x,\ e^{-x}\}$.

Sol.

$$M_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Demostrar que para cada función $f \in U$ existe una única función $g \in U$ tal que $g' = f$.

Sol.

Es cierto puesto que la aplicación D es biyectiva

(3) Determinar la función $g \in U$ tal que $g' = f$, donde $f(x) = \cosh(x) + \operatorname{sen}(x + \pi/3)$.
Sol.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide construir $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicación lineal que verifique las condiciones siguientes:

(1) $dim(\ker(g \circ f)) \leq dim(\ker(g))$
(2) $\operatorname{Im}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$

¿Es única la aplicación lineal g? Calcular la matriz de la aplicación lineal g que se haya construido, respecto de las bases canónicas.

Sol.
Como

$$\operatorname{Im}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3\} = L\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

por el teorema de las dimensiones se tiene que $dim(\ker g) = 2$ y por lo tanto $dim(\ker(g \circ f)) \leq 2$. Además como $\ker(f) = L\{(1, 0, 0)\}$ se sigue que

$$1 \leq dim(\ker(g \circ f)) \leq 2 \Longrightarrow \operatorname{Im} f \nsubseteq \ker g.$$

Puesto que por hipótesis $\operatorname{Im}(g) = L\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ obtenemos que la aplicación g no es única basta pensar por ejemplo que ninguno de los vectores de la base de $\operatorname{Im} f$, $B = \{(0, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$, pertenezca al $\ker g$ o que pertenezca sólo uno de ellos. Así si ampliamos B a una base $\mathbb{R}^4$:

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 0)(0, 0, 0, 1)\}$$

podemos definir, entre otras, las siguientes matrices de g en las bases B', B_c

$$M_{B',B_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; M_{B',B_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; M_{B',B_c}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4.- Una compañía de productos electrónicos fabrica dos modelos de aparatos de radio R_1 y R_2. La capacidad diaria de fabricación del modelo R_1 es de 60 unidades y la del modelo R_2 es de 75 unidades. Cada unidad de R_1 requiere para su fabricación 10 piezas de cierta componente electrónica, mientras que cada unidad de R_2 requiere 8 piezas de esta componente. La disponibilidad diaria máxima de la componente electrónica es de 800 piezas. El beneficio que se obtiene por cada unidad de R_1 es de 30 euros y de 20 euros por cada unidad de R_2. Determinar la producción diaria de cada modelo de radio que optimice el beneficio.

- Cada ejercicio se debe responder en hojas separadas.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.

Madrid a 14 de febrero de 2001