DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS NATURALES
E.T.S.I. de MONTES (UPM)
SOLUCIONES DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL de ALGEBRA LINEAL del 2000

Solución Problema 1.-
$P_T(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^4$, es decir, T es nilpotente. Como $\ker T = L\{1\}$ tenemos que $m_G(0) = 1$ y su índice es necesariamente $\nu(0) = 4$ de manera que su forma de Jordan será

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\ker T^3 = L\{1, x, x^2\}$, de manera que elegimos, por ejemplo, $x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \setminus \ker T^3$, siendo la base $B' = \{T^3(x^3), T^2(x^3), T(x^3), x^3\} = \{6, 6x, 3x^2, x^3\}$ (Observa que T es la aplicación derivada).

Solución Problema 2.- Si A y B son como en el ejercicio anterior y $C_y = I + yA + \frac{y^2}{2!}A^2 + \frac{y^3}{3!}A^3$ tendremos que si $M_B(L_y) = C_y$ entonces

$$f(x,y) = L_y(p)(x) = p(x) + yT(p(x)) + \frac{y^2}{2!}T^2(p(x)) + \frac{y^3}{3!}T^3(p(x)) = p(x) + yp'(x) + \frac{y^2}{2!}p''(x) + \frac{y^3}{3!}p'''(x)$$

(i)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p'(x) + yp''(x) + \frac{y^2}{2!}p'''(x) \ \text{ y, por otra parte } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = p'(x) + yp''(x) + \frac{y^2}{2!}p'''(x)$$

(ii) Si $c = p''(x_0) + y_0 p'''(x_0)$ entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix}$$

De manera que sus autovalores son: $\lambda = 0$ y $\lambda = 2c = 2(p''(x_0) + y_0 p'''(x_0))$

Solución Problema 3.-

(i) Si D dorada entonces para $k = 0$ tendremos $D^2 = D + I$, es decir, $D^2 - D - I = 0$, por otra parte, si $D^2 - D - I = 0$ lo multiplicamos por D^k con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ obtendremos $D^{k+2} - D^{k+1} - D^k = 0$ para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es decir, D es dorada.

(ii) Si D es una matriz dorada entonces su polinomio mínimo ha de ser divisor de

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

es decir, $\lambda = 0$ no es autovalor y por tanto D es invertible. Por otra parte de p observamos que el índice de los dos posibles autovalores es uno de manera que necesariamente D ha de ser diagonalizable.

(iii) Salvo semejanza tendremos $n+1$ matrices doradas de tamaño $n \times n$ que tendrán las siguientes formas diagonales:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

(iv) Si D es una matriz dorada entonces $(I - D)^2 = I - 2D + D^2 = I - 2D + D + I = I + (I - D)$, luego por el apartado (i), $I - D$ es también dorada. Si es dorada por el apartado (ii) sabemos que es invertible de manera que multiplicamos la igualdad anterior por $(I - D)^{-1}$ de manera que $I - D = (I - D)^{-1} + I$ es decir $(I - D)^{-1} = -D$

(v) Tenemos que por ser D dorada

$$X_{k+2} = \sum_{i=1}^{s} D_i^{k+2} C_i = \sum_{i=1}^{s} (D_i^{k+1} + D_i^k) C_i = \sum_{i=1}^{s} D_i^{k+1} C_i + = \sum_{i=1}^{s} D_i^k C_i = X_{k+1} + X_k$$

como queríamos demostrar

Problema 4.-

(i) Para que F sea un producto escalar tendrá que cumplir que $F(u,v) = F(v,u)$, es decir $< u, T(v) > = < v, T(u) >, \ \forall\, u, v \in \mathbb{R}^3$ es decir T ha de ser autoadjunto, como B_c es una base ortonormal necesariamente $b = c = 0$, por otra parte deberemos tener que $F(u,u) > 0 \ \forall\ u \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ entonces $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(ii) Por ser T autoadjunto sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de autovectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$, observamos cómo es esta base con respecto al producto escalar F

$$F(v_1, v_2) =< v_1, T(v_2) >= \lambda_2 < v_1, v_2 >= \lambda_2 \cdot 0 = 0$$
$$F(v_1, v_3) =< v_1, T(v_3) >= \lambda_3 < v_1, v_3 >= \lambda_3 \cdot 0 = 0$$
$$F(v_3, v_2) =< v_3, T(v_2) >= \lambda_2 < v_3, v_2 >= \lambda_2 \cdot 0 = 0$$

es decir la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es ortogonal para el producto escalar F

(iii) En el apartado anterior hemos obtenido una base ortogonal, normalizamos:

$$||v_1||_F^2 = F(v_1, v_1) = \lambda_1 ||v_1||_{<,>}^2 = \lambda_1 \quad ||v_2||_F^2 = F(v_2, v_2) = \lambda_2 ||v_2||_{<,>}^2 = \lambda_2 \quad ||v_3||_F^2 = F(v_3, v_3) = \lambda_3 ||v_3||_{<,>}^2 = \lambda_3$$

Observar que los autovalores han de ser positivos ya que el producto escalar es definido positivo, de manera que la base ortonormal para F será $\{\frac{v_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{v_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{v_3}{\sqrt{\lambda_3}}\}$