Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M

Examen Final de Álgebra Lineal   27 de Junio de 2005

Problema 1. a) Clasifica la cónica siguiente, según los valores del parámetro real a:

$$x^2 + 2axy + 4y^2 - 4x - 16y + 19 = 0.$$

b) Dibuja la cónica de la familia anterior para $a = 0$.

Problema 2. Se establece un tratamiento contra una plaga de insectos defoliadores del pino, de forma que cada aplicación de insecticida modifica la cantidad de individuos de la población de acuerdo con la relación

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde:

x_1, x_2, x_3, representan las cantidades de huevos, orugas e individuos adultos, respectivamente, antes de la aplicación del insecticida, e y_1, y_2, y_3, representan las cantidades de huevos, orugas e individuos adultos, respectivamente, después de la aplicación del insecticida.

a) Calcula la forma canónica de Jordan de A y una matriz de paso a dicha forma canónica de Jordan.

b) Calcula el número mínimo de aplicaciones para acabar con la plaga totalmente (entendiendo por tal la eliminación completa de los individuos en las tres etapas de evolución del insecto), sea cual sea la población inicial.

c) Si, por razones ecológicas, debemos realizar el número mínimo de aplicaciones de insecticida, calcula cuántas tendríamos que efectuar para terminar con una plaga para la que se han contabilizado 9576 huevos, 3457 orugas y 9576 insectos adultos.

Problema 3. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$, dotado del producto escalar usual, indica y razona si cada una de las aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definidas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, respectivamente por

$$f(x, y, z) = \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \right)$$

$$g(x, y, z) = (x.y + z, x - y - 2z, x + y + z)$$

$$h(x, y, z) = ((7x - 2y - 5z)/6, (-2x + 2y - 2z)/6, (-5x - 2y + 7z)/6)$$

es a) lineal, b) automorfismo, c) diagonalizable en $\mathbb{R}$, d) ortogonal y e) autoadjunta.

Problema 4. a) Resuelve el programa lineal de maximización de la función

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 6y_1 + 5y_2 + 8y_3 + 12y_4$$

sobre el conjunto

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\leq 2 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 4y_4 &\leq 3 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \\ y_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

b) Determina el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el valor mínimo de la función

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + 3x_2$$

sobre el conjunto

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

sea igual al valor máximo de la función g del apartado anterior.

- Cada ejercicio debe responderse en hojas separadas.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.

Las notas se publicarán el martes 5 de Julio, y la revisión de exámenes se efectuará el jueves 7.

Resolución Problema 1. a) Clasificamos la cónica $x^2+2axy+4y^2-4x-16y+19=0$ por invariantes:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix}1 & a\\ a & 4\end{bmatrix} & \begin{cases}\delta=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 4\end{vmatrix}=4-a^2=(2+a)(2-a)\\ s=4+1=5\end{cases}\\ \mathcal{A}=\begin{bmatrix}1 & a & -2\\ a & 4 & -8\\ -2 & -8 & 19\end{bmatrix} & \Delta=\begin{vmatrix}1 & a & -2\\ a & 4 & -8\\ -2 & -8 & 19\end{vmatrix}=\left(\frac{16+6\sqrt{5}}{19}\right)\left(\frac{16-6\sqrt{5}}{19}\right)\end{cases}$$

Ya podemos clasificar las cónicas de la familia:

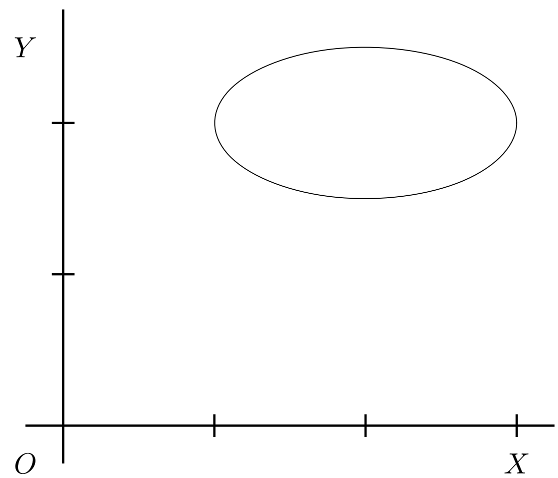
$$\begin{cases} a<-2: \text{ G. Hiperbólico}: & \text{Hipérbola}\\ a=-2: \text{ G. Parabólico}: & \text{Parabóla}\\ -2<a<2: \text{ G. Elíptico}: & \begin{cases}-2<a<\frac{16-6\sqrt{5}}{19}: & \text{Elipse}\\ a=\frac{16-6\sqrt{5}}{19}: & \text{Un punto}\\ \frac{16-6\sqrt{5}}{19}<a<\frac{16+6\sqrt{5}}{19}: & \emptyset\\ a=\frac{16+6\sqrt{5}}{19}: & \text{Un punto}\\ \frac{16+6\sqrt{5}}{19}<a<2: & \text{Elipse}\end{cases}\\ a=2: \text{ G. Parabólico}: & \text{Parabóla}\\ a>2: \text{ G. Hiperbólico}: & \text{Hipérbola}\end{cases}$$

b) Para $a=0$ se trata de una elipse cuyos ejes principales están situados en las direcciones de los ejes cartesianos OXY.

$$\begin{gathered} x^2+2axy+4y^2-4x-16y+19=0\\ (x-2)^2+4(y-2)^2=1\\ (x-2)^2+\left(\frac{y-2}{1/2}\right)^2=1\end{gathered}$$

El centro de la elipse es $C\equiv(2,2)$. Los semiejes, en la dirección OX, $a=1$, en la dirección OY, $b=1/2$.

Ya se puede dibujar:



Resolución Problema 2. a) $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0$. Un único autovalor $\lambda = 0$ de multiplicidad algebraica $\alpha = 3$.

$S = \ker A = \{V \in \mathbb{R}^3 / A \cdot V = O\} = \{(\rho, \rho, \rho), \forall \rho \in \mathbb{R}\}$ y la multiplidad geométrica $\delta = 1$, una única caja de Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los vectores columna de $P = [P_1\, P_2\, P_3]$ han de verificar:

$$P_3 \in S^3; P_3 \notin S^2$$
$$P_2 \in S^2, P_2 = A \cdot P_3;$$
$$P_1 \in S, P_1 = A \cdot P_2.$$

$S^2 = \ker A^2 = \{V \in \mathbb{R}^3 / A^2 \cdot V = O\} = \{(\sigma, \tau, \sigma), \forall \sigma\tau \in \mathbb{R}\}$.
$S^3 = \mathbb{R}^3$.

Ya podemos construir P: por ejemplo, $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = A \cdot P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_3 = A \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A es nihilpotente de orden 3, luego 3 es el mínimo de aplicaciones que asegura la eliminación completa de la plaga, sean cuales sean las poblaciones de partida.

c) Para el caso de unas poblaciones iniciales $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9576 \\ 3457 \\ 9576 \end{bmatrix}$, las poblaciones después de una aplicación serían $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 9576 \\ 3457 \\ 9576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6119 \\ 6119 \\ 6119 \end{bmatrix}$, y después de una segunda aplicación $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 6119 \\ 6119 \\ 6119 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, luego con dos aplicaciones se extingue completamente la plaga con las poblaciones iniciales dadas.

Resolución Problema 3. Aplicación f: $A = M(f, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

a) es lineal (admite expresión matricial en una base);

b) es automorfismo (rango 3);

c) no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ ($P(\lambda) = (1-\lambda)(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\imath - \lambda)(\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2\imath - \lambda)$);

d) es ortogonal (los vectores columna de A, matriz en una base ortonormada, forman una base ortonormada);

e) no es autoadjunta (A, matriz en una base ortonormada, no es simétrica).

Aplicación g: g no admite expresión matricial, luego no es lineal y no tienen sentido los restantes conceptos para una aplicación no lineal.

Aplicación h: $A = M(h, B_c) = \begin{bmatrix} 7/6 & -2/6 & -5/6 \\ -2/6 & 2/6 & -2/6 \\ -5/6 & -2/6 & 7/6 \end{bmatrix}$

a) es lineal (admite expresión matricial en una base);

b) es automorfismo (rango 3);

c) es diagonalizable en $\mathbb{R}$ (por ser simétrica el teorema espectral nos asegura la diagonalización en $\mathbb{R}$);

d) no es ortogonal (los vectores columna de A, matriz en una base ortonormada, no forman una base ortonormada);

e) es autoadjunta (A, matriz en una base ortonormada, es simétrica).

Resolución Problema 4. a)

Primer cuadro del Simplex:

		y_1	y_2	y_3	y_4	h_1	h_2	$f(X)$	/
	f	-6	-5	-8	-12	0	0	0	
	h_1	2	1	1	1	1	0	2	2
$\rightarrow$	h_2	1	1	2	$\boxed{4}$	0	1	3	3/4
					$\Uparrow$				

Segundo cuadro del Simplex:

		y_1	y_2	y_3	y_4	h_1	h_2	$f(X)$	/
	f	-3	-2	-2	0	0	3	9	
$\rightarrow$	h_1	$\boxed{7/4}$	3/4	1/2	0	1	-1/4	5/4	5/7
	y_4	1/4	1/4	1/2	1	0	1/4	3/4	3
		$\Uparrow$							

Tercer cuadro del Simplex:

		y_1	y_2	y_3	y_4	h_1	h_2	$f(X)$	/
	f	0	-5/7	-8/7	0	12/7	18/7	78/7	
	y_1	1	3/7	2/7	0	4/7	-1/7	5/7	5/2
$\rightarrow$	y_4	0	1/7	$\boxed{3/7}$	1	-1/7	2/7	4/7	4/3
				$\Uparrow$					

Cuarto cuadro del Simplex:

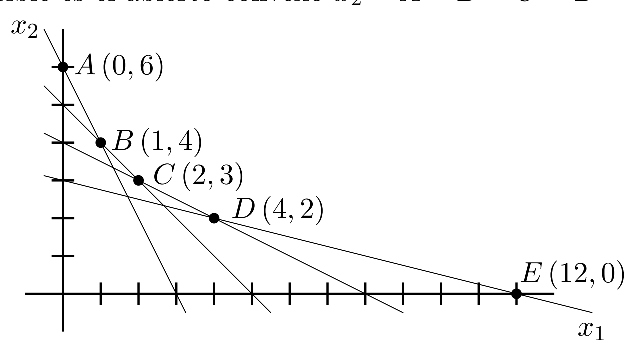
		y_1	y_2	y_3	y_4	h_1	h_2	$f(X)$	/
	f	0	-1/3	0	8/3	4/3	10/3	38/3	
$\rightarrow$	y_1	1	$\boxed{1/3}$	0	-2/3	2/3	-1/3	1/3	1
	y_3	0	1/3	1	7/3	-1/3	2/3	4/3	4
			$\Uparrow$						

Último cuadro del Simplex:

	y_1	y_2	y_3	y_4	h_1	h_2	$f(X)$
f	1	0	0	2	2	3	$\underline{13}$
y_2	3	1	0	-2	2	-1	$\underline{1}$
y_3	-1	0	1	3	-1	1	$\underline{1}$

Solución: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 1, 1, 0)$ y $\max g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 13$.

b) El conjunto factible es el abierto convexo $x_2 - A - B - C - D - E - x_1$.



$$
\begin{array}{rr}
A \equiv (0,6): & f_A = 18, \\
B \equiv (1,4): & f_B = 12 + a, \\
C \equiv (2,3): & f_C = 9 + 2a, \\
D \equiv (4,2): & f_D = 6 + 4a, \\
E \equiv (12,0): & f_E = 12a.
\end{array}
$$

$f_A = 10 \neq 13 :$ A no es mínimo de f.
$f_B = 12 + a = 13 \longrightarrow a = 1,\ f_C = 11 < 13 :$ B no es mínimo de f.
$f_C = 9 + 2a = 13 \longrightarrow a = 2,\ f_B = 14 > f_C,\ f_D = 14 > f_C :$ C es mínimo de f.
$f_D = 6 + 4a = 13 \longrightarrow a = 7/4,\ f_C = 25/2 < f_D : f_D$ no es mínimo de f.
$f_E = 12a = 13 \longrightarrow a = 13/12,\ f_D = 31/3 < f_D : e$ no es mínimo de f.
Luego el mínimo de f es el punto $(2,3)$ correspondiente a $a = 2$.