Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M.

Examen de Álgebra Lineal 11 de septiembre de 2007

Problema 1. En el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, de grado menor o igual que cuatro, $\mathbb{R}_4[x]$, consideramos el subespacio $V = \mathcal{L}\{1, x^2, x^4\}$. Construir razonadamente una aplicación lineal $f : V \to V$ con

$$\text{grado } (p) \geq \text{grado } (f(p)), \quad \text{para todo } p \in V,$$

en los siguientes casos :

a) [**2 Ptos.**] f es un isomorfismo distinto de la identidad. Obtén su matriz en la base $B = \{x^4, x^2, 1\}$.

b) [**2 Ptos.**] $\dim(\ker(f)) \geq 1$. Da su matriz en la base $B_1 = \{x^4 - x^2 - 1, x^2 - 1, 1\}$.

c) [**3 Ptos.**] $\ker(f) = \{ax^4 - ax^2 + b \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ y $f \circ f \equiv 0$. Calcula su matriz en la base B_1.

d) [**3 Ptos.**] Img $(f) = \{bx^4 + ax^2 + a + b \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ y tal que $f \circ f \equiv f$. Obtén su matriz en la base B.

Problema 2. Dada la cónica

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 - 72 = 0$$

a) [**2 Ptos.**] Clasifícala.

b) [**3 Ptos.**] Determina su ecuación reducida, especificando la transformación ortogonal directa que permite obtenerla.

c) [**5 Ptos.**] Dibújala, hallando previamente sus elementos principales.

Problema 3. De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ se conoce la siguiente información:

$$\begin{cases} f(0,1,1,0) = (0,2,2,0), \\ \text{traza } f = 8, \\ \dim\ker(f - i) = 0, \\ \dim\ker(f - (2-\sqrt{2})i) = 1, \\ (f - 2i)(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \\ (1,0,1,0) \text{ es autovector de } 2-\sqrt{2}, \\ f^4 - 7f^3 + 16f^2 - 14f + 4i = o, \\ (1,0,-1,0) \text{ también es autovector de } f, \end{cases}$$

donde i y o son, respectivamente, el endomorfismo identidad y el endomorfismo nulo en $\mathbb{R}^4$.

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) [**2 Ptos.**] ¿Cuáles son los autovalores de f?

b) [**2 Ptos.**] ¿Cuál es el polinomio mínimo de f?

c) [**2 Ptos.**] ¿Cuál es la forma canónica de Jordan de f?

d) [**2 Ptos.**] ¿Cuál es el transformado de (2,1,1,1) mediante f, $f(2,1,1,1)$?

e) [**2 Ptos.**] ¿Cuál es la matriz A de f en la base canónica de $\mathbb{R}^4$?

Problema 4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y $S = \mathcal{L}\left\{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,0)\right\}$. Se pide:

a) [**2.5 Ptos.**] Prueba que la forma bilineal f define un producto escalar.

b) [**2.5 Ptos.**] Obtén una base ortonormal de S respecto al producto escalar f.

c) [**2.5 Ptos.**] Halla la proyección (ortogonal), respecto a f, del vector $v = (1,0,1)$, sobre el s.e.v. S.

d) [**2.5 Ptos.**] Halla la distancia del vector v a $S^{\perp}$ (siempre con el producto escalar f).

- Cada ejercicio debe responderse en hojas separadas.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.
- No está permitido el uso de libros, apuntes, calculadoras o móviles.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.
- Las notas serán publicadas el martes 18 de septiembre de 2007.
- La revisión de exámenes se efectuará el jueves 20 de septiembre de 2007.
- Una solución será publicada, una vez celebrado el examen, en la dirección: http://matematicas.montes.upm.es/jmperez/jmperez.html

Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M.

Una solución al examen de Álgebra Lineal de
11 de Septiembre de 2007

Problema 1.

a) Puesto que grado $(p) \geq$ grado $(f(p))$ para todo $p \in V$ se deduce que

$$\begin{cases} f(1) = \alpha & \alpha \in \mathbb{R} \\ f(x^2) = \beta x^2 + \gamma & \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ f(x^4) = \delta x^4 + \mu x^2 + \psi & \delta, \mu, \psi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por tanto la matriz de f en la base $B = \{x^4, x^2, 1\}$ es

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \mu & \beta & 0 \\ \psi & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

De manera que f es un isomorfismo, distinto de la identidad, si se verifican las dos condiciones siguientes

1. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \delta \neq 0$.
2. o bien alguno de los parámetros μ, ψ, γ distinto de 0; o bien alguno de los α, β, δ distinto de 1.

Por ejemplo

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Puesto que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \mu & \beta & 0 \\ \psi & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

para que $\dim(\ker(f)) \geq 1$ basta que algún elemento de la diagonal valga cero

Por ejemplo

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies M_{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Como $\ker(f) = \{ax^4 - ax^2 + b : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{1, x^4 - x^2\}$ y $f \circ f \equiv 0$, podemos tomar la aplicación

$$\begin{aligned} x^4 \xrightarrow{f} 1 \quad &\Longrightarrow \quad x^4 \xrightarrow{f^2} 0 \\ x^2 \xrightarrow{f} 1 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 \xrightarrow{f^2} 0 \\ 1 \xrightarrow{f} 0 \quad &\Longrightarrow \quad 1 \xrightarrow{f^2} 0 \end{aligned}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad M_{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Como Img $(f) = \{bx^4 + ax^2 + a + b\ : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{x^4 + 1, x^2 + 1\}$ y $f \circ f \equiv f$ entonces, por ejemplo, podemos tomar

$$\begin{aligned} x^4 \xrightarrow{f} x^4 + 1 \quad &\Longrightarrow \quad x^4 \xrightarrow{f^2} x^4 + 1 \\ x^2 \xrightarrow{f} x^2 + 1 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 \xrightarrow{f^2} x^2 + 1 \\ 1 \xrightarrow{f} 0 \quad &\Longrightarrow \quad 1 \xrightarrow{f^2} 0 \end{aligned}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2.

a y b) Calculamos los invariantes:

$s = 10$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{vmatrix} = -144$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -13 & 0 \\ -13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{vmatrix} = 10368$$

Los autovalores de la matriz correspondiente a δ son $\lambda_1 = 18$, y $\lambda_2 = -8$, y los correspondientes autovectores son $v_1 = (-1, 1)$ y $v_2 = (1, 1)$.

Por tanto, la ecuación dada corresponde a una Hipérbola.

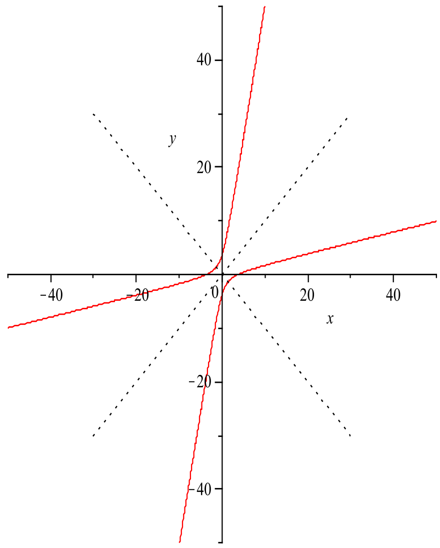
La ecuación canónica o reducida de dicha hipérbola es $\frac{x''^{\,2}}{4} - \frac{y''^{\,2}}{9} = 1$.

La transformación (ortogonal directa) que permite obtener dicha ecuación reducida es

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' \\ y & = & -\frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' \end{array}$$

c) Las direcciones de los ejes son los definidas por los autovectores (ambas bisectrices). El centro es el origen de coordenadas.

Las asíntotas son $y = \frac{1}{5}x$, $y = 5x$. Dibujo de la hipérbola, con sus ejes:



Problema 3. Ponemos una referencia a cada proposición, para referirnos abreviadamente a ellas.

$$\begin{cases} f(0,1,1,0) = (0,2,2,0), & (1); \\ \text{traza } f = 8, & (2); \\ \dim\ker(f - i) = 0, & (3); \\ \dim\ker(f - (2-\sqrt{2})i) = 1, & (4); \\ (f - 2i)(0,0,0,1) = (0,0,0,0), & (5); \\ (1,0,1,0) \text{ es autovector de } 2-\sqrt{2}, & (6); \\ f^4 - 7f^3 + 16f^2 - 14f + 4i = o, & (7); \\ (1,0,-1,0) \text{ también es autovector de } f, & (8). \end{cases}$$

a) $2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$ son los autovalores de f.

En efecto, (1) indica que 2 es autovalor de f y $(0,1,1,0)$ es autovector de f para el autovalor 2, (5) expresa que $(0,0,0,1)$ también es autovector de f para el autovalor 2, luego, como $(0,1,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ son linealmente independientes, la multiplicidad geométrica del autovalor 2 es al menos 2.

(4) expresa que $2-\sqrt{2}$ es autovalor de f de multiplicidad geométrica 1. (6) indica que $(1,0,1,0)$ es autovector de f para el autovalor $2-\sqrt{2}$.

(2) indica que existe otro autovalor de f de valor $2+\sqrt{2}$ ya que la traza de f es suma de todos sus autovalores y

$$2+2+(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=8.$$

Además, (8) indica que $(1,0,-1,0)$ es autovector de f y ha de serlo para el autovalor $2+\sqrt{2}$.

Resaltamos que (3) nos indica que 1 no es autovalor de f (la dimensión del núcleo cero indica que no existen vectores $\vec{v}\neq\vec{0}$ tales que $f(\vec{v})=1.\vec{v}$), a pesar de que (7) se puede expresar

$$f^4-7f^3+16f^2-14f+4i=(i-f)\cdot(2i-f)\cdot((2-\sqrt{2})i-f)\cdot((2+\sqrt{2})i-f)=o.$$

b) $M_f(\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+4=(2-\lambda)(2-\sqrt{2}-\lambda)(2+\sqrt{2}-\lambda)$.

Alternativamente, algunos autores escribirían $M_f(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+10\lambda-4$, conviniendo que el primer término sea siempre positivo.

En efecto, la forma canónica de Jordan de f es una matriz diagonal ya que se cumple la condición suficiente de diagonalización

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\sum_{i=1}^{3}\delta_i=2+1+1=4=n,$$

y el índice de cada autovalor (coincidente con el tamaño de la mayor caja de Jordan correspondiente a cada autovalor) es 1, luego

$$M_f(\lambda)=(2-\lambda)^1.(2-\sqrt{2}-\lambda)^1.(2+\sqrt{2}-\lambda)^1=-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+4.$$

c)

$$J=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2-\sqrt{2}&0\\0&0&0&2+\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

d) $(4, 2, 2 - 2\sqrt{2}, 2)$.

En efecto, $f(2,1,1,1) = f((0,1,1,0) + (0,0,0,1) + (1,0,1,0) + (1,0,-1,0)) = f(0,1,1,0) + f(0,0,0,1) + f(1,0,1,0) + f(1,0,-1,0) = (0,2,2,0) + (0,0,0,2) + (2-\sqrt{2}, 0, 2-\sqrt{2}, 0) + (2+\sqrt{2}, 0, -2-\sqrt{2}, 0) = (4, 2, 2-2\sqrt{2}, 2)$.

e)

$$A = M(f, B_c) = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En efecto, una base B_J en la que f es diagonal está formada por vectores propios. Por ejemplo, $B_J = \{(0,1,1,0), (0,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,-1,0)\}$.

La matriz de paso P de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a la base B_J, tiene como columnas los vectores de la base B_J expresados en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Entre la forma canónica de Jordan de f, J, y la matriz de f en la base canónica, A, existe una relación de semejanza

$$J = P^{-1} \cdot A \cdot P \Longleftrightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1}.$$

Calculamos P^{-1} mediante el algoritmo $M|I \overset{\text{Op.elem.filas}}{\longrightarrow} I|M^{-1}$.

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{cases} f_1' = f_2, \\ f_2' = f_1, \\ f_3' = f_3, \\ f_4' = f_4. \end{cases}}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{cases} f_1' = f_1, \\ f_2' = f_2, \\ f_3' = f_3 - f_1, \\ f_4' = f_4. \end{cases}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{cases} f_1' = f_1, \\ f_2' = f_4, \\ f_3' = f_3, \\ f_4' = f_2. \end{cases}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\begin{cases} f_1' = f_1, \\ f_2' = f_2, \\ f_3' = f_3, \\ f_4' = f_4 - f_3. \end{cases}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\begin{cases} f_1' = f_1, \\ f_2' = f_2, \\ f_3' = f_3, \\ f_4' = \frac{1}{2} f_4. \end{cases}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\begin{cases} f_1' = f_1, \\ f_2' = f_2, \\ f_3' = f_3 + f_4, \\ f_4' = f_4. \end{cases}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 4.

a) La forma bilineal f define un producto escalar $\Longleftrightarrow$ f es simétrica y definida positiva. Ambas cosas se verifican en este caso, ya que A es simétrica y A es definida positiva (observa que los menores principales de A son todos estrictamente positivos). Por tanto, f define un producto escalar.

b) El sistema $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ define una base de S. Aplicando el método de Gram-Smidt para ortogonalizarlo, se llega a la siguiente base ortonormal de S:

$$B = \left\{ u_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), u_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right) \right\}.$$

c) La proyección ortogonal de $v = (1,0,1)$ sobre S es

$$u = \langle v, u_1 \rangle\, u_1 + \langle v, u_2 \rangle\, u_2 = \sqrt{2}\; u_1 - \tfrac{\sqrt{6}}{3}\; u_2 = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0\right).$$

d) $d(v, S^{\perp}) = \|u\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.