Examen de Álgebra Lineal de Septiembre de 2004

Una Solución:

Problema 1.

a-1) No. La matriz A no puede ser la matriz de un cambio de base, ya que toda matriz de un cambio de base tiene como vectores columna los nuevos vectores de base expresados en la base inicial y como toda base es un sistema libre, el rango del espacio columna y el rango de la matriz tienen que ser 2 y su determinante no puede ser cero.

a-2) No. Si un endomorfismo es inyectivo, el núcleo del endomorfismo es el conjunto vacío y la imagen es todo el espacio, por lo que el rango del endomorfismo y el de todas las matrices asociadas al endomorfismo, son la dimensión del espacio, 2, por lo que el determinante de la matriz de un endomorfismo inyectivo no puede ser cero.

a-3) Sí. La ecuación característica de una tal matriz es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\text{traza de } A).\lambda + \text{determinante de } A = 0,$$

y en este caso

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\text{traza de } A).\lambda = \lambda(\lambda - \text{traza de } A) = 0,$$

con dos raíces reales (autovalores): $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 =$ traza de A.

a-4) No. Si fuese invertible y A^{-1} la matriz inversa de A, entonces

$$A \cdot A^{-1} = I \Longrightarrow \det A. \det A^{-1} = 1$$

y tanto $\det A$ y $\det A^{-1}$ tienen que ser distintos de cero.

a-5) No. Una transformación ortogonal es siempre inyectiva luego se reduce al a-2). Un razonamiento alternativo, una transformación ortogonal tiene siempre determinante 1 (*giro*) o -1 (*simetría*).

a-6) Sí. Si $\delta = 0$ se trata de una cónica del género parabólico y puede ser bien una parábola (ecuación reducida $x_1^2 + bx_2 = 0$), bien dos rectas paralelas ($x_1^2 = c, c > 0$), bien dos rectas confundidas ($x_1^2 = 0$) o bien *el conjunto vacío (rectas paralelas imaginarias)* ($x_1^2 = c, c < 0$).

a-7) No. La matriz de un sistema algebraico lineal de solución única (de Cramer) es invertible (la solución de $A \cdot X = B$ es $X = A^{-1} \cdot B$) y se reduce a a-4).

b-8) Sí. $\det B = 1 \neq 0$ implica que el rango de B es 2, luego los vectores columna de B forman un sistema libre que puede ser una base, luego B puede ser la matriz de paso de un cambio de base, b-9) Sí. $\det B = 1 \neq 0$ implica que el rango de B es 2, luego la dimensión de la imagen del endomorfismo cuya matriz es B es también 2 y el endomorfismo es suprayectivo.

b-10) Sí. Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

es antisimétrica y verifica

$$\text{traza } B = 0 + 0 = 0; \quad \det B = 0.0 - 1.(-1) = 1.$$

b-11) No. La ecuación característica de B es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\text{traza de } A).\lambda + \det A = 0,$$

y en este caso

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0,$$

que no tiene raíces reales, luego no existen autovalores de B.

b-12) No. Por b-11) no existen autovalores en $\mathbb{R}$; no se cumple la condición necesaria $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 2$.

b-13) No. Para poder ser la matriz de un producto escalar habría de ser simétrica y definida positiva, es decir del tipo $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\Delta_1 = \alpha > 0$ y $\Delta_2 = -\alpha^2 - \beta^2 > 0$, lo que resulta imposible.

b-14) Sí. La matriz de un giro es ortogonal, de determinante 1. Por ejemplo,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

puede ser la matriz de un giro puesto que cumple los dos requisitos. En concreto, representa un giro de 90 grados en el sentido contrario a las agujas del reloj.

b-15) No. La matriz de la parte cuadrática de cualquier cónica γ es simétrica. Si B es simétrica $\det B = -\alpha^2 - \beta^2 \neq 1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b-16) No. Si B es simétrica $\det B = -\alpha^2 - \beta^2 \neq 1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 2.

1) Hemos probado en clase que la aplicación $f^{k)} : E_n \longrightarrow E_n$ con $k < K$, donde E_n es cualquier espacio de funciones al menos K veces derivables de dimensión n, y $f^{k)}$ representa la derivada $k-$ésima de la función f, es lineal. También hemos probado en clase que la aplicación suma de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal, y que la aplicación producto de un escalar por una aplicación lineal es una aplicación

lineal, luego cualquier combinación lineal de las funciones derivada de cualquier orden tal que $k \leq K$ es una aplicación lineal, es decir un endomorfismo en E_n.

2) Por la definición de senh y cosh ambas se pueden expresar como combinación lineal de las funciones e^x y e^{-x}. Si eliminamos las funciones senh y cosh de la familia de generadores de V dada, la nueva familia obtenida es una base de V ya que engendra V y es un sistema libre (No existen reales $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$ con al menos un $\alpha_i \neq 0$ tal que $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{-x} + \alpha_4 x + \alpha_5 .1 + \alpha_6 \operatorname{sen} x + \alpha_7 \cos x = 0$.)

$$B_V = \{e^x, e^{2x}, e^{-x}, x, 1, \operatorname{sen} x \cos x\}, \quad M(T, B_V) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta el significado de las columnas de la matriz de una aplicación lineal, podemos afirmar

$$\begin{array}{c} \ker T = \mathcal{L}\{e^x, e^{2x}, e^{-x}\} \\ \operatorname{Im} T = \mathcal{L}\{x, 1, \operatorname{sen} x, \cos x\} \end{array}.$$

Por otro lado la matriz M de T es una matriz diagonal a bloques, lo que nos permite descomponer el espacio V en suma directa de tres subespacios $V_1 = \mathcal{L}\{e^x, e^{2x}, e^{-x}\}$, $V_2 = \mathcal{L}\{x, 1\}$ y $V_3 = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$,

$$V = \bigoplus_{i=1}^{3} V_i,$$

lo que nos permite, en adelante, estudiar V por medio de los subespacios V_1, V_2, V_3 y el endomorfismo $T : V \longrightarrow V$ por medio de los endomorfismos $T_1 : V_1 \longrightarrow V_1$, $T_2 : V_2 \longrightarrow V_2$ y $T_3 : V_3 \longrightarrow V_3$ (restricciones de T a cada uno de los subespacios).

4) Teniendo en cuenta lo dicho en 3) obtendremos J por ensamblaje diagonal de las tres canónicas de Jordan J_1, J_2, J_3 y la base asociada B como unión de las tres bases respectivas B_1, B_2, B_3.

Subespacio V_1:

$$M_1 = M(T_1, B_1^c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ya es diagonal luego

$$J_1 = M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \{e^x, e^{2x}, e^{-x}\}.$$

Subespacio V_2:

$$M_2 = M(T_2, B_2^c) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de T_2 es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ con un autovalor $\lambda = 2$ doble (multiplicidad algebraica $\alpha = 2$).

El subespacio propio asociado será $S = \ker(M_2 - \lambda I) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = O \right\} = \{(x, y) : x = 0\} = \{(0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ y el subespacio propio generalizado $S^2 = \ker(M_2 - \lambda I)^2 = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = O \right\} = \mathbb{R}^2$.

Una base B_2 en la que $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz de T_2 es $B_2 = \{(0, 1), (1, 0)\} \equiv \{1, x\}$.

Subespacio V_3:

$$M_3 = M(T_3, B_3^c) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de T_3 es $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ que sobre $\mathbb{C}$ tiene dos raíces (autovalores): $\lambda_1 = 4 + 2i$; $\lambda_2 = 4 - 2i$.

Los subespacios propios asociados vienen dados por:

$S_1 = \ker(M_3 - (4 + 2i)I) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \cdot X = O \right\} = \{(x, y) : x = -yi\} = \{(-\mu i, \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = \ker(M_3 - (4 - 2i)I) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{bmatrix} \cdot X = O \right\} = \{(x, y) : x = yi\} = \{(\nu i, \nu), \nu \in \mathbb{R}\}$.

Una base B_3 en la que $J_3 = \begin{bmatrix} 4 + 2i & 0 \\ 0 & 4 - 2i \end{bmatrix}$ es la matriz de T_3 es $B_3 = \{(-i, 1), (i, 1)\} \equiv \{-i \operatorname{sen} x + \cos x, i \operatorname{sen} x + \cos x\}$.

La matriz canónica de Jordan de T es $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-2i \end{bmatrix}$ y una base en la que J es la matriz de T es $B = \cup_{i=1}^{3} B_i = \{e^x, e^{2x}, e^{-x}, 1, x, -i \operatorname{sen} x + \cos x, i \operatorname{sen} x + \cos x\}$.

Problema 3.

De

$$\Gamma \equiv 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 10yz + 8x + \frac{22}{\sqrt{2}}y + \frac{14}{\sqrt{2}}z + 10 =^t X \cdot A \cdot X + L \cdot X + a = 0,$$

deducimos para su expresión en la base canónica:

- parte cuadrática: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$
- parte lineal: $L = \begin{bmatrix} 8 & 22/\sqrt{2} & 14/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
- constante: a=10.

Determinemos el *giro* que nos lleve los ejes de coordenadas a las direcciones principales de la cuádrica:

Diagonalizamos A por semejanza.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda.I) = (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 25) = (4-\lambda)(9-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$

Estudiamos las direcciones principales de la cuádrica (direcciones de los autovectores).

Para $\underline{\lambda_1 = 4}$:

$S_1 = \ker(A - 4I) = \left\{ V_1 \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} = \{(\lambda, 0, 0), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$

Para $\underline{\lambda_2 = 9}$:

$S_2 = \ker(A - 9I) = \left\{ V_2 \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = z\} = \{(0, \mu, \mu), \forall \mu \in \mathbb{R}\}.$

Para $\underline{\lambda_3 = -1}$:

$S_3 = \ker(A+I) = \left\{ V_3 \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = -z\} = \{(0,-\nu,\nu), \forall \nu \in \mathbb{R}\}$.

Para que el cambio de base sea un *giro* la matriz de paso deberá ser ortogonal de determinante 1. Elegimos, pues, autovectores normados que aseguren $\det(P) = 1$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow B^e = \{(1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\},$$

B^e es la base obtenida por un *giro* de matriz de paso P a partir de la base canónica.

La ecuación de la cuádrica Γ en la base B^e toma la forma

$${}^tX' \cdot A' \cdot X' + L' \cdot X' + b = 0, \text{ con } A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; L' = L \cdot P = \begin{bmatrix} 8 & 18 & -4 \end{bmatrix}; b = a = 10$$

$$\text{y } \Gamma \equiv 4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 + 8x' + 18y' - 4z' + 10 = 0$$

Determinemos, ahora, la *traslación* que lleve el origen de coordenadas al centro de la cuádrica:

Por compleción de cuadrados

$$4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 + 8x' + 18y' - 4z' + 10 = 4(x'+1)^2 + 9(y'+1)^2 - (z'+2)^2 + 1.$$

Tras la *traslación* $\begin{cases} x'' = & x' + 1 \\ y'' = & y' + 1 \\ z'' = & z' + 2 \end{cases}$ la ecuación reducida de la cuádrica es $4x''^2 + 9y''^2 - z''^2 + 1 = 0$; se trata de un hiperboloide de dos hojas.