

TEMA 4. APLICACIONES LINEALES

- 1.- Definición y propiedades.
- 2.- Aplicaciones lineales inyectivas y Suprayectivas.
- 3.- Núcleo, imagen, matriz asociada y rango de una aplicación lineal.
- 4.- Operaciones con aplicaciones lineales y matrices.

1.- Definición y propiedades.

• Aplicación lineal.

- **Definición.** $f : A \rightarrow B$ es una aplicación $\iff \forall a \in A \ \exists! b \in B$ tal que $f(a) = b$.

- **Definición.** Llamamos aplicación lineal u homomorfismo del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $(U, +, \cdot)$ en el $\mathbb{K}$ espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ a toda aplicación $f : U \rightarrow V$ tal que

$$* \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) \oplus f(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U$$

$$* \quad f(\lambda \cdot u) = \lambda \odot f(u) \quad \forall u \in U \text{ y } \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

- **Definición.** $f : U \rightarrow V$ es una aplicación lineal del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $(U, +, \cdot)$ en el $\mathbb{K}$ espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ $\iff f(\lambda \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \lambda \odot f(u_1) \oplus \beta \odot f(u_2)$ $\forall u_1, u_2 \in U$ y $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$.

• Propiedades de las aplicaciones lineales.

Sean $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $f : U \rightarrow V$ una aplicación lineal

- $f(0_U) = 0_V$

$$- \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(u_i), \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ y } \forall u_i \in U$$

– **Proposición 5.1** Si W es un subespacio vectorial de U entonces $T(W)$ es un subespacio vectorial de V .

– **Proposición 5.2** Sea H un subespacio de V entonces $f^{-1}(H) = \{u \in U / f(u) \in H\}$ es subespacio vectorial de U

– **proposición 5.3** Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente en U entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es un conjunto linealmente dependiente en V .

* Observar que si $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente en V entonces $\{u_1, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente en U .

– **proposición 5.4** Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un sistema de generadores de U entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es un sistema de generadores de $f(U)$.

2. Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

– Repaso

* $f : A \rightarrow B$ es una aplicación inyectiva $\iff f(a) = f(b)$ implica que $a = b$.

* $f : A \rightarrow B$ es una aplicación sobreyectiva $\iff \forall b \in B \ \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$. Es decir f es sobre si $f(A) = \{b \in B / \exists a \in A \text{ con } f(a) = b\}$

* $f : A \rightarrow B$ es una aplicación biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva.

- **Definición.** Llamamos núcleo de una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ al conjunto de todos los vectores de U que tienen por imagen al cero de V .

$$\text{Ker}(f) = \{u \in U / f(u) = 0\}.$$

- **Definición.** Llamamos imagen de una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ al conjunto de todos los vectores de V que son imagen de algún elemento de U .

$$\text{Im}(f) = \{v \in V / \exists u \in U \text{ con } f(u) = v\}.$$

- **Proposición 5.5** El Núcleo y la Imagen de una aplicación lineal son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales correspondientes.

- **Tipos de aplicaciones.** A toda aplicación lineal inyectiva la llamamos **monomorfismo**, **epimorfismo** si es sobreyectiva e **isomorfismo** si es biyectiva. Si $U = V$ entonces decimos que la aplicación lineal f es un **endomorfismo** y si además es biyectiva que es un **automorfismo**.

- **Proposición 5.6** Una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ es inyectiva o monomorfismo si y sólo si transforma sistemas linealmente independientes en sistemas linealmente independientes.

* Sean V y U espacios vectoriales tales que: $\dim U = n$ y $\dim V = m$ y $f : U \rightarrow V$ una aplicación lineal. Sea $n > m$ ¿Puede ser f inyectiva?

- **Proposición 5.7** Sean V y U espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : U \rightarrow V$

una aplicación lineal. f sobreyectiva $\iff \text{Im} f = V$

* Sean V y U espacios vectoriales tales que: $\dim U = n$ y $\dim V = m$ y $f : U \rightarrow V$ una aplicación lineal. Sea $n < m$ ¿Puede ser f un epimorfismo?

- **Proposición 5.8** Una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ es un isomorfismo si y sólo si transforma una bases de U en bases de V .

* Sean V y U espacios vectoriales si $f : U \rightarrow V$ es un isomorfismo ¿qué relación existe entre las dimensiones de U y V .

- **Proposición 5.9** Sean U y V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Sea $B =$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ base de U . Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ entonces existe una única aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ tal que: $f(u_i) = v_i$, para $i = 1, \dots, n$

* Una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ queda perfectamente definida si conocemos las imágenes de los vectores de una base de U .

* En la proposición anterior si $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ son linealmente independientes ¿Cómo ha de ser f ?

– **Definición** 5.10 Dos espacios vectoriales U y V sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ son

isomorfos, y lo denotamos por $U \approx V$, si existe una aplicación lineal biyectiva $f : U \rightarrow V$, es decir, si existe un isomorfismo entre los espacios U y V .

– **Corolario.** $U \approx V \iff \dim U = \dim V$.

– **problema.** Ver que todo $\mathbb{R}$ espacio vectorial V , con $\dim V = n$, es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

- **Pregunta.** Si $f : U \rightarrow V$ es una aplicación lineal con $\dim U = \dim V$ ¿es f isomorfismo?

- **Proposición 5.11** Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ambos de dimensión finita. entonces se tiene:

(1) $\dim V \geq \dim W \iff$ existe una aplicación lineal sobreyectiva $T : V \rightarrow W$

(2) $\dim V \leq \dim W \iff$ existe una aplicación lineal inyectiva $T : V \rightarrow W$

(3) $\dim V = \dim W \iff$ existe una aplicación lineal biyectiva $T : V \rightarrow W$

- **Proposición. Caracterización de la inyectividad.** Sean V y U espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : U \rightarrow V$ una aplicación lineal.

$$T \text{ es inyectiva} \iff \ker T = \{0\}$$

- **Teorema 5.12** Sean V y W $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, $T : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y V de dimensión finita, entonces

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$$

- **Definición.** Llamamos Rango de una aplicación lineal a la dimensión de su imagen
- **Corolario.** Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ambos de la misma dimensión. $T : V \rightarrow W$ Entonces basta con que se verifique que $\text{Im}T = W$ o que $\ker T = \{0\}$ para concluir que T es biyectiva

3. Operaciones con aplicaciones lineales.

Sean $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $f, g : U \rightarrow V$ aplicaciones lineales

- **Suma.** La aplicación

$$\begin{array}{ccc} f + g : & U & \rightarrow V \\ u & \mapsto & (f + g)(u) = f(u) + g(u) \end{array}$$

es una aplicación lineal.

- **Producto por un escalar de $\mathbb{K}$.** La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \lambda f : & U & \rightarrow V \\ u & \mapsto & (\lambda f)(u) = \lambda(f(u)) \end{array}$$

es una aplicación lineal.

- **Proposición 5.13** El conjunto $L(U, V) = \{f : U \rightarrow V : f \text{ es aplicación lineal}\}$

con las operaciones definidas anteriormente es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

- **Composición.** Sean $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ aplicaciones lineales. La aplicación composición $: U \rightarrow W$

$$\begin{array}{ccc} f \circ g : & U & \rightarrow & V \\ & u & \mapsto & (f \circ g)(u) = f(g(u)) \end{array}$$

es una aplicación lineal.

- **Inversa de una aplicación.** hacer ver que en una aplicación cualquier no tiene inversa salvo que sea biyectiva o inyectiva si nos restringimos a su imagen
 - * Sea $f : U \rightarrow V$ lineal y biyectiva (isomorfismo), entonces $f^{-1} : V \rightarrow U$ (definida por $f^{-1}(v) = u \iff f(u) = v \quad \forall v \in V$) es lineal

4.- Aplicaciones lineales y matrices

- **Matriz asociada a una aplicación lineal.**

Sean V y U espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ con $\dim U = n$ y $\dim V = m$. Sean $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de U y V respectivamente y $f : U \rightarrow V$ una aplicación lineal. Puesto que $f(u_i) \in V$ para todo $i = 1, \dots, n$ entonces se tiene que existen a_{ij} con $j = 1, \dots, m$ tal que $f(u_i) = a_{i1}v_1 + \dots + a_{im}v_m$:

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1m}v_m \\ f(u_2) = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2m}v_m \\ \vdots \\ f(u_n) = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nm}v_m \end{cases}$$

así pues si $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ entonces $f(u) = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_mv_m$ donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La matriz

$$M(f)_{B_U B_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la aplicación lineal f en las bases B_U y B_V

- **Proposición 5.4.1** Dada una matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m}}$ podemos construir una única aplicación lineal, fijando dos espacios vectoriales U y V y dos bases de ellos $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$, que tenga como matriz asociada a las bases B_U y B_V a la matriz A .

- **Proposición 5.4.2** El rango de una matriz es igual a la dimensión de la imagen de la aplicación lineal que le corresponde.

- **Proposición 5.4.3** Si $T : V \rightarrow W$ aplicación lineal con $\text{Im}(T) = r$ entonces existen bases de V y de W en las que la matriz asociada a T en dichas bases es de la forma

$$M(T) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de orden r .

- **Proposición 5.4.4** Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

- * Sean $T, S : V \rightarrow W$ aplicaciones lineales, entonces:

$$M(T + S)_{B_V B_W} = M(T)_{B_V B_W} + M(S)_{B_V B_W}$$

- * Sea $T : V \rightarrow W$ aplicación lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces:

$$M(\lambda T)_{B_V B_W} = \lambda M(T)_{B_V B_W}$$

- **Teorema 5.4.5** Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W . La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : L(V, W) & \longrightarrow & M_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & M(T)_{B_V B_W} \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

- **Proposición 5.4.6** Sean U , V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de U , $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_s\}$ base de W . Sean $T : U \rightarrow V$ y $S : V \rightarrow W$ aplicaciones lineales, entonces:

$$M(S \circ T)_{B_U B_W} = (M(S)_{B_V B_W})(M(T)_{B_U B_V})$$

- **Proposición 5.4.7** Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, Sean $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W . Sea $T : V \rightarrow W$ aplicación lineal.

$$T \text{ es isomorfismo} \iff M(T)_{B_V B_W} \text{ es invertible}$$

- **Corolario.** La matriz asociada a un cambio de base es invertible.

- **Definición de matrices Equivalentes.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ decimos que A y B son equivalentes si existen dos matrices $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ invertibles tales que $B = PAQ$

* ¿Qué relación hay entre matrices de una aplicación lineal en dos pares de bases distintas ?

- **Proposición 5.4.8** Si dos matrices son equivalentes entonces tienen el mismo rango

5.- Endomorfismos

- **Definición de matrices Semejantes.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ decimos que A y B son semejantes si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$

* ¿Qué relación hay entre la matriz de un endomorfismo en una base y la matriz de ese mismo endomorfismo en otra base distinta?

- **Proposición 5.5.1** Dos matrices si son semejantes tienen el mismo rango, determinante y traza