Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices

• Sistemas lineales. Solución de un sistema lineal.
• Sistemas homogéneos.
• Sistemas equivalentes. Operaciones elementales.
• Método de Gauss.
• Definición de matriz. Operaciones con matrices.
• Matriz elemental. Inversa de una matriz.

1.- Sistemas lineales. Solución de sistemas lineales.

Definición 1.1.- Llamamos sistema de "n" ecuaciones con " m" incógnitas $(x_1, x_2, x_3, \dots x_m)$ a:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & a_{13}x_3+ & \cdots & +a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & a_{23}x_3+ & \cdots & +a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & a_{n3}x_3+ & \cdots & +a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

Donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ con $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$ reciben el nombre de coeficientes y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{1, \cdots, n\}$ el de términos independientes.
Normalmente, por comodidad, expresaremos el sistema S como

$$S\begin{cases} E_1(x_1, x_2, \dots, x_m) & = & b_1 \\ E_2(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{cases}$$

Definición 1.2.- Decimos que $(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ con $s_i \in \mathbb{R}$ $i \in \{1, 2 \cdots m\}$ es una solución del sistema S si verifica las "n" ecuaciones de S, es decir, si al sustituir en el sistema x_i por s_i las igualdades se convierten en identidades numéricas.

Definición 1.3.- Atendiendo al número de soluciones los sistemas se clasifican en

- **Sistemas incompatibles.** No admiten ninguna solución

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

- **Sistemas compatibles.**
  - **Sistemas compatibles determinados.** Admiten una única solución

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

  - **Sistemas compatibles indeterminados.** Admiten más de una solución

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + y = -4 \end{cases}$$

2.- Sistemas homogéneos.

Definición 2.1.- Un sistema lineal que tiene todos sus términos independientes igual a cero, es decir, $b_i = 0\ \forall i \in \{1, 2 \cdots n\}$ recibe el nombre de sistema homogéneo.

Todo sistema lineal

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots & +a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & +a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & a_{n3}x_3 + & \cdots & +a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

tiene asociado el sistema homogéneo

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots & +a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & +a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & a_{n3}x_3 + & \cdots & +a_{nm}x_m & = & 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo es siempre compatible puesto que $(0, 0, \ldots, 0)$ es siempre solución del sistema, nos referiremos a dicha solución como solución trivial.

Proposición 2.2.-Si un sistema homogéneo tiene una solución distinta de cero $\Longrightarrow$ tiene infinitas soluciones.

Dem.-

Si $(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ es solución del sistema homogéneo entonces $(\lambda s_1, \lambda s_2, \cdots, \lambda s_m)$ es solución de S.H. para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.$\blacksquare$

Proposición 2.2.-Si $(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ es una solución de un sistema lineal y $(h_1, h_2, \cdots, h_m)$ una solución del sistema homogéneo asociado $\Longrightarrow$ $(s_1 + h_1, s_2 + h_2, \cdots, s_m + h_m)$ es también solución del sistema lineal.

Dem.- Si

$$\begin{cases} E_1(s_1, s_2, \ldots, s_m) &= b_1 \\ E_2(s_1, s_2, \cdots, s_m) &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_n(s_1, s_2, \cdots, s_m) &= b_n \end{cases} \qquad \begin{cases} E_1(h_1, h_2, \ldots, h_m) &= 0 \\ E_2(h_1, h_2, \cdots, h_m) &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ E_n(h_1, h_2, \cdots, h_m) &= 0 \end{cases}$$

se sigue entonces

$$\begin{cases} E_1(s_1 + h_1, s_2 + h_2, \ldots, s_m + h_m) &= b_1 \\ E_2(s_1 + h_1, s_2 + h_2, \cdots, s_m + h_m) &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_n(s_1 + h_1, s_2 + h_2, \cdots, s_m + h_m) &= b_n \end{cases}$$

■

Proposición 2.3.-Si un sistema lineal tiene dos soluciones distintas $\Longrightarrow$ tiene infinitas soluciones.

Dem.-
Sean $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ y $s' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_m)$ dos soluciones de un sistema lineal S, se sigue entonces que $s - s' = (s_1 - s'_1, s_2 - s'_2, \ldots, s_m - s'_m)$ es solución del sistema homogéneo asociado a S.
Además como $s - s' \neq 0$ entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones y aplicando la proposición anterior(2.2) llegamos a que el sistema lineal tiene infinitas soluciones.

■

Proposición 2.4.-Si un sistema lineal tiene una única solución $\Longrightarrow$ su sistema homogéneo asociado sólo tiene la solución trivial.

Dem.- Por reducción al absurdo si el sistema homogéneo asociado tuviese al menos dos soluciones entonces el sistema lineal por la proposición 2.2 tendría al menos dos.

■

Observar que el recíproco de esta proposición no es cierto como se puede comprobar en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

3.- Sistemas equivalentes.

Definición 3.1.- Sean S, S' dos sistema lineal compatibles. Diremos que S es equivalente a S', denotado por $S \approx S'$, si S y S' tienen el mismo conjunto de soluciones.

Proposición 3.2.-
Las siguientes operaciones transforman un sistema en otro equivalente

- Permutar dos ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$
- Sumar una ecuación a otra.
- Sumar una ecuación una combinación lineal de las restantes.

Dem.-
(1) Si $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ es solución del sistema

$$S \left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ E_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ E_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_j \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{array} \right.$$

es fácil ver que también es solución del sistema

$$S' \left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ E_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_j \\ \vdots & & \vdots \\ E_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{array} \right.$$

Así pues $S \approx S'$ como queríamos.
(2) Si $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ es solución del sistema

$$S \left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ E_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{array} \right.$$

es fácil ver que también es solución del sistema

$$S' \left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda E_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & \lambda b_i \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{array} \right.$$

Así pues $S \approx S'$ como queríamos.

(3) Si $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ es solución del sistema

$$S \left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ E_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ E_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_j \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{array} \right.$$

es fácil ver que también es solución del sistema

$$S' \left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ E_i + E_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_i + b_j \\ \vdots & & \vdots \\ E_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) & = & b_j \\ \vdots & & \vdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) & = & b_n \end{array} \right.$$

Así pues $S \approx S'$ como queríamos.

(4) Es una combinación de las dos anteriores

Observaciones.

- Si en un sistema aparece una ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_m = 0$ el sistema es equivalente al que se obtiene al suprimir esa ecuación.
- Si en un sistema aparece una ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_m = b_m \neq 0$ el sistema es incompatible.

4.- <u>Método de Gauss.</u>

- Caso n=m.

  Dado el sistema

$$S\begin{cases} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

(1) Como el sistema tiene n incógnitas algún $a_{i1} \neq 0$ lo que nos permite suponer que $a_{11} \neq 0$ (sino cambiaríamos la primera ecuación por la ecuación $i_{ésima}$.)

(2) multiplicamos la primer ecuación (en adelante E_1) por $\lambda = 1/a_11$, llegando así al siguiente sistema equivalente

$$S_1\begin{cases} x_1+ & \cdots & +a_{1n}/a_{11}x_n & = & b_1/a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

(3) A las filas E_i con $i = 2, \ldots, n$ les sumamos $(-a_{i1})E_1$ y obtenemos

$$S_1'\begin{cases} x_1+ & a_{12}'x_2 & \cdots & +a_{1n}'x_n & = & b_1' \\ 0+ & a_{22}'x_2+ & \cdots & +a_{2n}'x_n & = & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0+ & a_{n2}'x_2+ & \cdots & +a_{nn}'x_n & = & b_n' \end{cases}$$

(a) Si aparece una ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_m = 0$ se suprime y pasamos al caso $n < m$.

(b) Si aparece una ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_m = b \neq 0$ ya hemos acabado pues el sistema es incompatible.

(c) Si todos los coeficientes de una misma incógnita son cero se suprime y pasamos al caso $n > m$.

(d) Si $a_{i2}' = 0 \; \forall i = 2, \ldots, n$ pasamos al caso $n > m$.

(e) Si algún $a_{i2}' \neq 0$ volvemos a repetir el proceso al sistema

$$S_2\begin{cases} a_{22}'x_2 & \cdots & +a_{2n}'x_n & = & b_2' \\ a_{32}'x_2+ & \cdots & +a_{3n}'x_n & = & b_3' \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}'x_2+ & \cdots & +a_{nn}'x_n & = & b_n' \end{cases}$$

- Caso $n < m$.

  Hacemos ceros como antes, si no hay incompatibilidades la matriz resultante será

$$\begin{cases} x_1+ & \lambda_{12}x_2 & \cdots & +\lambda_{1n}x_n & \cdots & +\lambda_{1m}x_m & = & \beta_1 \\ 0+ & x_2+ & \cdots & +\lambda_{2n}x_n & \cdots & +\lambda_{2m}x_m & = & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0+ & 0+ & \cdots & +x_n+ & \cdots & +\lambda nmx_m & = & \beta_n \end{cases}$$

consideramos $x_{n+1} = \mu_1,\ x_{n+2} = \mu_2, \ldots, x_m = \mu_{m-n}$ como parámetros y resolvemos llegando de este modo a un sistema compatible indeterminado.

- Caso $n > m$. Hacemos ceros como en el primer caso, si no hay incompatibilidades obtenemos $n - m$ filas cero y nos hayamos en el caso $n = m$.

3.- Ejemplos.

(1) Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+y+z=10 \\ -x+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \xrightarrow{F_2 \Longleftrightarrow F_1} \begin{cases} -x+2z=2 \\ 2x+y+z=10 \\ x+y+z=1 \end{cases} \xrightarrow{F_2+2F_1,\ F_3+F_1}$$

$$\begin{cases} -x+2z=2 \\ -y-z=8 \\ y+3z=3 \end{cases} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{cases} -x+2z=2 \\ -y-z=8 \\ 2z=11 \end{cases}$$

(2) Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_2+x_4-2x_5=-1 \\ 2x_1-2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=4 \\ 4x_1+4x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_3=1 \\ x_1+x_2=-2 \\ x_2+x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-x_3=-1 \end{cases}$$

5.- Definición de Matriz. Operaciones con matrices

definición 5.1.- Una matriz A de orden $m \times n$ es un conjunto de mn elementos pertenecientes a un cuerpo $\mathbb{K}$, dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

Al conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes sobre $\mathbb{K}$ lo denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

definición 5.2.- Operaciones con matrices

- **Igualdad.** Dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ son iguales si $(a_{ij}) = (b_{ij})$ $forall\, i = 1, 2, \ldots, m\ j = 1, 2, \ldots, n.$
- **Suma.** Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$. Se define la matriz suma $C = A + B$ como la matriz de orden $m \times n$ tal que

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}.$$

Propiedades de la suma. Sean A, B y $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
(1) Conmutativa: $A + B = B + A$.
(2) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
(3) Elemento neutro: $\exists O \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \setminus A + O = O + A = A$.
(4) Elemento simétrico: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\ \exists B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \setminus A + B = O$.

- b) **Producto por un escalar.** Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ y $\lambda \in K$. Se define

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

Propiedades. Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
(1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
(2) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
(3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
(4) $1A = A$.

- c) **Producto de matrices.** Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ con $B = (b_{jh})_{\substack{j=1,2,\ldots,n \\ h=1,2,\ldots,p}}$. Se define su producto

$$AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,p}} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,p}}$$

Propiedades del Producto. Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{K}), C \in M_{p\times h}(\mathbb{K})$,
(1) Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.
El producto no es conmutativo.

- d) **Trasposición.** Dada una matriz a $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ se define su traspuesta, que se denota por A^t, como la matriz de tamaño $n \times m$

$$A^t = (a'_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m}} \text{ con } a'_{ij} = a_{ji}.$$

Propiedades. Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(1) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
(2) $(A+B)^t = A^t + B^t$.
(3) $(A^t)^t = A$.
(4) $(AB)^t = B^t A^t$.

definición 5.3.-a) Diremos que una matriz es simétrica si $A = A^t$.
b) Llamamos matriz nula a aquella matriz tal que $a_{ij} = 0\ \forall i = 1, 2, \dots, m$ $\forall j = 1, 2, \dots, n$.
c) Una matriz $n \times m$ es cuadrada si $n = m$. A los elementos de la forma $a_{ii},\ \forall i = 1, 2, \dots, n$. son la diagonal de la matriz y su traza es la suma de todos ellos $Tr = \sum_{i=1} n a_{ii}$.

6.- Matriz elemental. Inversa de una matriz.

Definición 6.1.- Llamamos operaciones elementales de tipo fila:

- Permutación de la fila i y j.
- El producto de la fila i por una constante $\lambda \neq= 0$.
- Sumar a la fila i la j multiplicada por un número λ.

De manera análoga se definen las operaciones por columnas.
Definición 6.2.- Las matrices elementales son
(1) cambio de filas $F_{ij}A$ o de columnas AC_{ij}

$$F_{ij} = C_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(2) producto de una fila por un escalar $F_i(k)A$ o de una columna AC_i

i

$$F_i(K) = C_i(K) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \dots & \dots & k & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(3) sumar a la fila *i* K-veces la fila *j*

$$F_{ij}(k) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & k & \dots & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & \dots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(4) sumar a la columna i k-veces la columna j

$$C_{ij}(k) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & \dots & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & \dots & k & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición 6.3.-Una matriz A cuadrada de orden n se dice que es invertible o que tiene inversa si existe una matriz B de orden n tal que $A.B = B.A = I.$

Proposición 6.4.- la inversa de una matriz si existe es única.

Proposición 6.5.- Podemos calcular la inversa de una matriz por medio de operaciones elementales, es decir:

$$F_r \cdots F_2 F_1 A = I \quad \Longrightarrow A^{-1} = F_r \cdots F_2 F_1 I.$$

Proposición 6.6.- Resolución de sistemas matriciales (vectoriales). Ejemplo. Resolver el siguiente sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$