TEMA 7. DIAGONALIZACION Y
Y FORMAS CANONICAS

1. Endomorfismos Nilpotentes

Definición 1.1. Endomorfismo Nilpotente. Un endomorfismo $T \in End(V)$ es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \equiv 0$.

Definición 1.2. Matriz Nilpotente. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es nilpotente si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.

Proposición 1.3. *Sea $T \in End(V)$ y sea B una base de V.*
T es nilpotente $\iff$ $M_B T$ es nilpotente.

Proposición 1.4. *Los endomorfismos nilpotentes sólo tienen al cero como autovalor.*

Definición 1.5. Orden de Nilpotencia Decimos que k es el orden de nilpotencia de un endomorfismo $T \in End(V)$ si $T^k = 0$ pero si $T^{k-1} \neq 0$.

Proposición 1.6. *Sea T un endomorfismo nilpotente de orden de nilpotencia k, entonces*

$$T^m = 0, \ \forall m \geq k$$

Proposición 1.7. *Sea T un endomorfismo nilpotente no nulo y sea k su orden de nilpotencia. Entonces se tiene el siguiente encadenamiento:*

$$\{0\} \subsetneq \ker T \subsetneq \ker T^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker T^k = V$$

Teorema 1.8. *(Forma canónica de un endomorfismo nilpotente) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Sea T un endomorfismo de V nilpotente de orden $k \leq n$. Entonces existe una base B de V de tal forma que la $M_B T$ es de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } \delta_i = 0 \text{ ó } 1, \qquad \forall\, i = 1, \cdots, n-1$$

sea $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$M_{B_c} f = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{B_c} f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{B_c} f^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues f es nilpotente de orden 3.

$$\ker f = L\{(1,0,0,0,0)(0,1,-1,0,0)\}$$
$$\ker f^2 = L\{(1,0,0,0,0)(0,1,0,0,0)(0,0,1,0,0)(0,0,0,3,-1)\}$$
$$\ker f^3 = \mathbb{R}^5$$

observar

$$\{0\} \subsetneq \ker f \subsetneq \ker f^2 \subsetneq \ker f^3 = \mathbb{R}^5$$

Sea W_1 un subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\ker f^3 = \ker f^2 \oplus W_1$$

como $dim \ker f^3 = 5$ y $dim \ker f^2 = 4 \implies dim W_1 = 1$ sea $W_1 = L\{(0,0,0,1,0)\}$.

Sea W_2 un subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\ker f^2 = \ker f \oplus W_2$$

como $dim \ker f^2 = 4$ y $dim \ker f = 2 \implies dim W_2 = 2$ sea $W_2 = L\{f(0,0,0,1,0), (0,0,0,1,-1)\}$.

Sea W_3 un subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\ker f = \{0\} \oplus W_3$$

como $dim \ker f = 2$ y $dim\{0\} = 0 \implies dim W_3 = 2$ sea $W_3 = L\{f^2(0,0,0,1,0), f(0,0,0,1,-1)\}$. la matriz de f en la base

$$B = \{f^2(0,0,0,1,0), f(0,0,0,1,0), (0,0,0,1,0) f(0,0,0,1,-1), (0,0,0,1,-1)\}$$

es

$$M_B f \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Por ser T un endomorfismo de V nilpotente de orden k sabemos que $T^k \equiv 0$ y por lo tanto $\ker T^k = V$. Además tenemos la siguiente cadena de núcleos

$$\{0\} \subsetneq \ker T^1 \subsetneq \ker T^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker T^{k-1} \subsetneq \ker T^k = V.$$

Como $\ker T^{k-1} \subsetneq \ker T^k = V$ existe un subespacio $W_1 \subset V$ tal que

$$V = \ker T^k = \ker T^{k-1} \oplus W_1.$$

Denotaremos por

$$r_1 = \dim W_1 = \dim \ker T^k - \dim \ker T^{k-1}.$$

Sea $W_1 = L\{v_1, \cdots, v_{r_1}\}$, es decir,

$$V = \ker T^k = \ker T^{k-1} \oplus L\{v_1, \cdots v_{r_1}\}.$$

Observar que

$$T^k(v_i) = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, r_1$$
$$T^{k-1}(v_i) \neq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, r_1$$
$$T^k(v_i) = T^{k-1}(T(v_i)) = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, r_1$$

es decir

(1) $\{v_1, \ldots, v_{r_1}\} \in \ker T^k$, $\{v_1, \ldots, v_{r_1}\} \notin \ker T^{k-1}$.
(2) $\{T(v_1), \ldots, T(v_{r_1})\} \in \ker T^{k-1}$.

De igual forma como $\ker T^{k-2} \subsetneq \ker T^{k-1}$ existe entonces un subespacio $W_2 \subset \ker T^{k-1}$ tal que

$$\ker T^{k-1} = \ker T^{k-2} \oplus W_2.$$

Denotaremos por

$$r_2 = \dim W_2 = \dim \ker T^{k-1} - \dim \ker T^{k-2}.$$

Como

$$\{T(v_1), \ldots, T(v_{r_1})\} \in \ker T^{k-1}, \quad \{T(v_1), \ldots, T(v_{r_1})\} \notin \ker T^{k-2}$$

y además $\{T(v_1), \ldots, T(v_{r_1})\}$ es un sistema linealmente independiente en $\ker T^{k-1}$ se sigue entonces

$$W_2 = L\{T(v_1), \ldots, T(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \ldots, v_{r_2}\},$$

es decir,

$$\ker T^{k-1} = \ker T^{k-2} \oplus L\{T(v_1), \ldots T(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \ldots, v_{r_2}\},$$

Observar que

$$T^{k-1}(v_i) = 0 \quad \text{para todo } i = r_1 + 1, \dots, r_2$$
$$T^{k-2}(v_i) \neq 0 \quad \text{para todo } i = r_1 + 1, \dots, r_2$$
$$T^{k-1}(v_i) = T^{k-2}(T(v_i)) = 0 \quad \text{para todo } i = r_1 + 1$$

es decir

- $\{v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\} \in \ker T^{k-1}$, $\{v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}\} \notin \ker T^{k-2}$.
- $\{T(v_{r_1+1}), \cdots, T(v_{r_2})\} \in \ker T^{k-2}$.

$$\begin{aligned} V = \ker T^k = L\{v_1, \cdots v_{r_1}\} \oplus \ker T^{k-1} = \\ = L\{v_1, \cdots v_{r_1}\} \oplus L\{T(v_1), \cdots T(v_{r_1}), v_{r+1}, \dots, v_{r_2}\} \oplus \ker T^{k-2} \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso llegamos a escribir el espacio V de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V =& L\{v_1, \dots v_{r_1}\} \\ &\oplus L\{T(v_1), \dots T(v_{r_1}), v_{r+1}, \dots, v_{r_2}\} \\ &\oplus L\{T^2(v_1), \dots T^2(v_{r_1}), T^(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_2}), v_{r_2+1}, \dots v_{r_3}\} \oplus \\ &\oplus L\{T^3(v_1), \dots T^3(v_{r_1}), T^2(v_{r_1+1}), \dots, T^2(v_{r_2}), T(v_{r_2+1}), \dots T(v_{r_3}), v_{r_3+1}, \dots, v_{r_4}\} \\ &\oplus \cdots\cdots\cdots \oplus \\ &\oplus L\{T^{k-1}(v_1), \dots T^{k-1}(v_{r_1}), T^{k-2}(v_{r_1+1}), \dots T^{k-2}(v_{r_2}), T^{k-3}(v_{r_2+1}), \dots, T^{k-2}(v_{r_3}), \dots, v_{r_{k-1}+1}, \dots, v_{r_k}\} \end{aligned}$$

Observamos que

$$r_k = \dim \ker T$$

Y que

$$\sum_{j=1}^{k} r_j = n$$

Reordenamos todos estos vectores en orden decreciente de potencias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} B = \{&T^{k-1}(v_1), T^{k-2}(v_1), \dots, T(v_1), v_1, \\ &T^{k-1}(v_2), T^{k-2}(v_2), \dots, T(v_2), v_2, \\ &\dots \\ &T^{k-1}(v_{r_1}), T^{k-2}(v_{r_1}), \dots, T(v_{r_1}), v_{r_1}, \\ &T^{k-2}(v_{r_1+1}), T^{k-3}(v_{r_1+1}), \dots, T(v_{r_1+1}), v_{r_1+1}, \\ &T^{k-2}(v_{r_1+2}), T^{k-3}(v_{r_1+2}), \dots, T(v_{r_1+2}), v_{r_1+2}, \\ &\dots \\ &T^{k-2}(v_{r_2}), T^{k-3}(v_{r_2}), \cdots, T(v_{r_2}), v_{r_2}, \\ &T^{k-3}(v_{r_2+1}), T^{k-4}(v_{r_2+1}), \cdots, T(v_{r_2+1}), v_{r_2+1}, \\ &\dots \\ &v_{r_{k-1}+1}, \dots, v_{r_k}\} \end{aligned}$$

Quedando la matriz del endomorfismo en esta base de la forma:

$$M_BT = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ 0&0&0&\cdots&0\end{smallmatrix} &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && \begin{smallmatrix} 0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ 0&0&0&\cdots&0\end{smallmatrix} &&&&&&& \\ &&& \ddots &&&&&& \\ &&&& \begin{smallmatrix} 0&1\\ 0&0\end{smallmatrix} &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& \begin{smallmatrix} 0&1\\ 0&0\end{smallmatrix} &&& \\ &&&&&&& 0 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

□

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ en la base canónica. $p_f(\lambda) = (2-\lambda)^4$ así pues el único autovalor de f es $\lambda = 2$ con $m_A(2) = 4$ y $m_G(2) = 2$ por lo tanto f no es ni diagonalizable ni nilpotente.

Fijémonos en el endomorfismo $(f - 2id) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cuya matriz en base canónica es

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El endomorfismo $(f - 2id)$ es nilpotente ya que $(f - 2id)^2 = 0$.

Formamos su cadena

$$\{0\} \subsetneqq \ker(f - 2id) = L\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\} \subsetneqq \ker((f-2id)^2) = \mathbb{R}^4.$$

$$\mathbb{R}^4 = \ker((f-2id)^2) = \ker(f-2id) \oplus W_1, \quad W_1 = L\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

$$\ker(f-2id) = \{0\} \oplus W_2, \quad W_2 = L\{(f-2id)(0,0,1,0),(f-2id)(0,0,0,1)\} = L\{(3,0,0,0),(0,3,0,0)\}$$

entonces

$$\mathbb{R}^4 = \ker((f-2id)^2) = \ker(f-2id) \oplus W_1 = \{0\} \oplus W_2 \oplus W_1 = W_2 \oplus W_1.$$

Por lo tanto $B = \{(f-2id)(0,0,1,0),(0,0,1,0),(f-2id)(0,0,0,1),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y la matriz de $(f - 2id)$ en B es

$$M_B(f - 2id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $M_B(f) = M_B(f - 2id) + 2I$, es decir,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sea $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$p_T(\lambda) = (2-\lambda)^3(-1-\lambda)^2$ así pues los autovalores de T son $\lambda = 2, -1$ con $m_A(2) = 3$ $m_A(-1) = 2$ y $m_G(2) = 2$ $m_G(-1) = 2$ por lo tanto T no es ni diagonalizable ni nilpotente.

El endomorfismo $(T - 2id) : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$$M_{B_c}(T - 2id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{B_c}(T - 2id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\ker(T - 2id) = L\{3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\}$

$$\ker\,(T - 2id)^2 = L\{3e_1 + e_2, 3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\}$$
$$\ker\,(T - 2id)^3 = L\{3e_1 + e_2, 3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\}$$
$$\ker\,(T - 2id)^n = L\{3e_1 + e_2, 3e_2 + e_5, 3e_3 + e_4\} \quad \forall n \geq 2$$

Consideremos ahora el endomorfismo $T - 2id$ pero en vez de definido en todo $\mathbb{R}^5$ definido sólo en $\ker(T - 2id)^2 \subset \mathbb{R}^5$ es decir

$$(T - 2id)|_{\ker(T-2id)^2} : \ker(T - 2id)^2 \longrightarrow \ker(T - 2id)^2$$

. el endomorfismo $T - 2id$ es nilpotente ya que $(T - 2id)^2)|_{\ker(T-2id)^2} = 0$. Formamos su cadena

$$\{0\} \subsetneqq \ker(T - 2id)|_{\ker(T-2id)^2} \subsetneqq \ker((T - 2id)^2) = \ker(T - 2id)^2.$$

$$\ker((T - 2id)^2) = \ker(T - 2id) \oplus W_1, \quad W_1 = L\{3e_1 + e_2\}$$

$$\ker(T - 2id) = \{0\} \oplus W_2, \quad W_2 = L\{(T - 2id)(3, 1, 0, 0, 0), \} = L\{(0, 3, 0, 0, 1), (0, 0, 3, 1, 0)\}$$

entonces

$$\ker((T - 2id)^2) = \ker(T - 2id) \oplus W_1 = W_2 \oplus W_1.$$

Por lo tanto $B = \{(T - 2id)(3, 1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 1, 0)\}$ es una base de $\ker((T - 2id)^2)$ y la matriz de $(T - 2id)|_{\ker((T-2id)^2)}$ en B es

$$M_B(T - 2id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $M_B(T|_{\ker((T-2id)^2)}) = M_B(T - 2id)|_{\ker((T-2id)^2)} + 2I$, es decir,

$$M_B((T|_{\ker((T-2id)^2)})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El endomorfismo $(T + id) : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$$M_{B_c}(T + id) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{B_c}(T + id)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(T+id) = L\{e_5, e_4\}$

$$\ker{(T-2id)^2} = L\{e_5, e_4\}$$
$$\ker{(T-2id)^n} = L\{e_5, e_4\} \quad \forall n \geq 1$$

Consideremos ahora el endomorfismo $T+id$ pero en vez de definido en todo $\mathbb{R}^5$ definido sólo en $\ker(T+id) \subset \mathbb{R}^5$ es decir

$$(T+id)|_{\ker(T+id)} : \ker(T+id) \longrightarrow \ker(T+id)$$

. el endomorfismo $T+id$ es nilpotente ya que $(T+id)|_{\ker(T+id)} = 0$. Formamos su cadena

$$\{0\} \subsetneqq \ker(T+id)|_{\ker(T+id)^2} = \ker(T+id).$$

$$\ker((T+id)) = \{0\} \oplus W_1, \quad W_1 = L\{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0)\}$$

entonces

$$\ker(T+id) = W_1.$$

Por lo tanto $B = \{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0)\}$ es una base de $\ker((T+id))$ y la matriz de $(T+id)|_{\ker((T+id)}$ en B es

$$M_B(T+id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $M_B(T|_{\ker(T+id)}) = M_B(T+id)|_{\ker(T+id)} - I$, es decir,

$$M_B((T|_{\ker(T+id)})) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resumiendo

$$M_B((T|_{\ker((T-2id)^2)})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_B((T|_{\ker(T+id)})) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si tomo la base $B' = \{(T-2id)(3,1,0,0,0),(3,1,0,0,0),(0,0,3,1,0),(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^5$ tenemos

- $T((T-2id)(3,1,0,0,0)) = (2,0,0,0,0)$
- $T((3,1,0,0,0)) = (1,2,0,0,0)$
- $T(0,0,3,1,0)) = (0,0,2,0,0)$
- $T(0,0,0,0,1) = (0,0,0,-1,0)$
- $T(0,0,0,1,0)) = (0,0,0,0,-1)$

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema de Jordan

Definición 1.9. Llamaremos **Matriz Elemental o Reducida de Jordan** de orden k y autovalor λ a la matriz de orden k cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que valen λ, y los situados inmediatamente encima de la diagonal principal, que son unos.

Ejemplos 1.10. *matriz elementales de Jordan de orden 1, 2, 3, etc.*

Definición 1.11. Llamaremos **Matriz de Jordan** a cualquier matriz cuadrada formada por la yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de la diagonal, de la forma

$$M_BT = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_q} \end{pmatrix}$$

Sea $T \in End(V)$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ un autovalor de T. La aplicación $T - \lambda_0 id \in End(V)$. Consideramos la cadena

$$\{0\} \subseteqq \ker(T-\lambda_0 id) \subseteqq \ker(T-\lambda_0 id)^2 \subseteqq \ker(T-\lambda_0 id)^3 \subseteqq \ker(T-\lambda_0 id)^4 \ldots \subseteqq \ker(T-\lambda_0 id)^n \ldots$$

Como $E_i(\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0 id)^i$ son todos subespacios de un espacio de dimensión finita, existe algún $m \leqq n$ tal que $\ker(T-\lambda_0 id)^m = \ker(T-\lambda_0 id)^{m+1}$; sea $j \in \mathbb{N}$ el menor de estos números naturales m.

Proposición 1.12. *Si* $E_j(\lambda_0) = E_{j+1}(\lambda_0)$, *entonces* $E_p(\lambda_0) = E_j(\lambda_0)$ *para todo* $p \geq j$.

Demostración. Inducción sobre r en la expresión $E_j(\lambda_0) = E_{j+r}(\lambda_0)$, para todo $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 1.13. llamamos **Autoespacio Generalizado** del autovalor λ_0 al subespacio $\ker(T-\lambda_0 id)^j$

$$\{0\} \subsetneqq \ker(T-\lambda_0 id) \subsetneqq \ker(T-\lambda_0 id)^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \ker(T-\lambda_0 id)^j = \ker(T-\lambda_0 id)^{j+1}$$

Proposición 1.14. $T(\ker(T-\lambda_0 id)^j) \subset \ker(T-\lambda_0 id)^j$.

Demostración. sea $x \in \ker(T-\lambda_0 id)^j$ entonces $(T-\lambda_0 id)^j(x) = 0$, y por lo tanto $(T-\lambda_0 id)^j(T(x)) = T((T-\lambda_0 id)^j(x)) = 0$ como queríamos. $\square$

Corolario 1.15. *La aplicación* $T - \lambda_0 id|_{(T-\lambda_0 id)^j} \in End((T-\lambda_0 id)^j)$ *es nilpotente de orden* j.

Proposición 1.16. $1 \leqslant \dim\ker(T-\lambda_0 id)^j \leqslant m_A(\lambda_0)$.

Demostración. $\ker(T-\lambda_0 id) \subseteqq \ker(T-\lambda_0 id)^j$ y como $dim\ker(T-\lambda_0 id) = 1$ entonces $1 \leqslant \ker(T-\lambda_0 id)^j$. $\square$

Corolario 1.17. $j \leq m_A(\lambda_0)$

Definición 1.18. Indice de un Autovalor. Dado λ autovalor de un endomorfismo f diremos que $\nu(\lambda) \in \mathbb{R}$ es el índice de λ si $\ker(f - \lambda id)^{\nu(\lambda)} = \ker(f - \lambda id)^p$ para todo $p \geq \nu(\lambda)$.

Proposición 1.19. *La aplicación $T - \lambda_i I$ Es nilpotente sobre el subespacio* $\ker(T - \lambda_i I)^{m_A(\lambda_i)}$.

Demostración. □

Teorema 1. Teorema de Descomposición de un Espacio Vectorial. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ finitamente generado, $\dim V = n$, T un endomorfismo de V. Supongamos que todas las raíces del $P_T(\lambda)$ están en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, $q \leq n$, los autovalores distintos de $P_T(\lambda)$, con $m_A(\lambda_i)$ las multiplicidades algebraicas de λ_i. Entonces:*

i) $V = \ker(T - \lambda_1 I)^{m_A(\lambda_1)} \oplus \ldots \oplus \ker(T - \lambda_q I)^{m_A(\lambda_q)}$

ii) $T(\ker(T - \lambda_i I)^{m_A(\lambda_i)}) \subset \ker(T - \lambda_i I)^{m_A(\lambda_i)}$ $\forall i = 1, \ldots, q$

iii) $\dim[\ker(T - \lambda_i I)^{m_A(\lambda_i)}] = m_A(\lambda_i)$

Teorema 1.20. Teorema de Jordan *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ finitamente generado no nulo, sea T un endomorfismo de V y tal que sus autovalores pertenecen a $\mathbb{K}$. Entonces existe una base ordenada B de V con respecto a la cual la matriz asociada a T es una matriz diagonal por cajas de la forma:*

$$M_B T = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_q} \end{pmatrix}$$

Ejemplos 1.21.

- A la matriz que se obtiene en el teorema anterior la llamaremos MATRIZ DE JORDAN DE T, observar que esta matriz no es única.

- PREGUNTAS:
  - ¿Cuál es el número de veces que aparece un autovalor λ_i en la diagonal de una matriz de Jordan?
  - ¿Cuál es el número de matrices elementales de Jordan de un mismo autovalor?
  - ¿Hay algún tamaño de estas matrices elementales de Jordan que sepamos seguro que va aparecer? ¿Cuál es este tamaño?
  - ¿Cuántas cajas de tamaño el orden de nilpotencia de un autovalor habrá en la matriz?

- EJEMPLOS:

  1.- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, sea T un endomorfismo de V del cual sabemos que:
  - $\sigma(T) = \{3, 1, -1, -2, 0\}$
  - $\dim\ker(T-3I) = \dim\ker(T-3I)^2 = 2$
  - $\dim\ker(T-I) = 1$
  - $\dim\ker(T-I)^2 = \dim\ker(T-I)^3 = 2$
  - $\dim\ker(T+I) = 3$
  - $\dim\ker(T+I)^2 = \dim\ker(T+I)^3 = 5$
  - $\dim\ker(T+2I) = 3$
  - $\dim\ker(T+2I)^2 = 6$
  - $\dim\ker(T+2I)^3 = \dim\ker(T+2I)^4 = 7$
  - $\dim\ker T = 4$
  - $\dim\ker T^2 = 6$
  - $\dim\ker T^3 = 8$
  - $\dim\ker T^4 = \dim\ker T^5 = 10$

  a) ¿Es T un isomorfismo?
  b) Determinar razonadamente la dimensión de V
  c) Calcular las multiplicidades y el índice de cada autovalor.
  d) Calcular los polinomios característico y mínimo de T
  e) Obtened la matriz de Jordan de T.

  2.- Calcular matrices de Jordan para cada una de las siguientes matrices y las matrices de paso P correspondientes, también sus polinomios mínimos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 7 & 1 \\ -3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Polinomios de matrices,Tª y de Cayley-Hamilton

Definición 1.22. Polinomios de endomorfísmos Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $f \in end(V)$. Definimos $p(f)$ como

$$p(f) = a_0f^0 + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_nf^n$$

donde $f^0 = id, \quad f^{p+1} = fp \circ f$.

Proposición 1.23.
- $f^p \circ f^q = f^q \circ f^p = f^{p+q}$.
- *Si* $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces*
  - $p(f) + q(f) = (p+q)(f)$.
  - $p(f) \circ q(f) = (pq)(f)$.
  - $\lambda p(f) = (\lambda p)(f)$.
- $p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$.

Definición 1.24. Polinomios de matices Sea $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definimos $p(A)$ como

$$p(f) = a_0A^0 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

donde $A^0 = I, \quad A^{p+1} = ApA$.

Proposición 1.25.
- $A^pA^q = A^{p+q}$.
- *Si* $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *entonces*
  - $p(A) + q(A) = (p+q)(A)$.
  - $p(A)q(A) = (pq)(A)$.
  - $\lambda p(A) = (\lambda p)(A)$.
- $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.

EJEMPLOS: 1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $p(x) = 2x^2 - 3\lambda + 1$ y

$$P(A) = 2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -20 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

2.-Sea $g(x) = x^{1998}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -4 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Así que $g(A) = A^{1998} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -4 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{1998} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Proposición 1.26. *Si*

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

y $A \in M_n(\mathbb{K})$ *Entonces*

$$f(A) = (A-\alpha_1)(A-\alpha_2)\cdots(A-\alpha_n)$$

Proposición 1.27. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo, sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *entonces existe un polinomio* $f \in \mathbb{K}[x]$ *no nulo tal que* $f(A) = 0$

Demostración. $\square$

Proposición 1.28. *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $T : V \to V$ lineal, entonces $\exists f \in \mathbb{K}[x],\ f \neq 0 \,/\, f(T) = 0$*

Teorema 1.29. Teorema de Cayley-Hamilton

$$p_A(A) = 0,\ p_T(T) = 0$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{K})$, se verifica que $p_A(A) = 0$. Es decir, si $p_A(\lambda) = b_n\lambda^n + ... + b_1\lambda + b_0$, ocurre que $b_nA^n + ... + b_1A + b_0I = 0$.
Sean $B = A - \lambda I$ y $C = adj(B)$ (la matriz en cuya entrada $c_{i,j}$ aparece el adjunto, con su signo correspondiente, al elemento $b_{j,i}$. cuando se habló de matrices inversas, se tiene que $B \cdot adj(B) = \det(B) \cdot I$.

1) Probar que existen $B_0, \cdots, B_{n-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tales que

$$C = B_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + B_1\lambda + B_0.$$

2) Probar que $B \cdot C = det(B) \cdot I_n$.

3) Probar que

$$det(B) \cdot I_n = B \cdot C = (A - \lambda I) \cdot C = A \cdot C - \lambda C$$

o, equivalentemente:

$$b_nI_n\lambda^n + \cdots + b_1I_n\lambda + b_0I_n = AB_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + AB_1\lambda + AB_0 - B_0\lambda - \cdots - B_{n-1}\lambda^n.$$

Deducir de ahí, igualando coeficientes, que

$$\begin{array}{rcl} b_0I_n & = & AB_0 \\ b_1I_n & = & AB_1 - B_0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{n-1}I_n & = & A_{n-1}B - B_{n-2} \\ b_nI_n & = & -B_{n-1} \end{array}$$

4) Multiplicar las ecuaciones anteriores por $I, A, \cdots, A^{n-1}, A^n$ y sumarlas. Deducir de ahí que $p_A(A) = 0$.

EJEMPLOS: 1.- Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 8$ y

$$P_A(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS: 1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobar que $p_B(B) = 0$

2.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcular A^{-1}

3.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Calcular los polinomios mínimos de A, B y C.

Definición 1.30. Llamamos polinomio mónico aquel polinomio cuyo coeficiente de grado máximo es 1, es decir, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$.

Definición 1.31. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces llamamos polinomio minimo de A, $pmA(x)$ al polinomio mónico de menor grado tal que $pmA(A) = 0$.

Teorema 1.32. *y* pm_A *divide a* p_A.

Demostración. □

Teorema 1.33. p_A *y* pm_A *tienen las mismas raíces.*

Demostración. □