E.T.S.I. de Montes. Unidad Docente de Matemáticas
PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 1997/98
Hoja 6. Aplicaciones lineales

1.- (a) Demostrar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$
(b) Dada $f : E \to F$ tal que $f(x) = c\ \forall\ x \in E$, Probar que f es lineal si y sólo si $c = 0$ (E y F son espacios vectoriales.)

2.-Consideremos $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], \varphi(p) = p'$ (su derivada). Probar que φ es una aplicación lineal. Calcular la matriz de φ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$. ¿ Es inyectiva ? ¿ Es suprayectiva ?

3.-Dada $f : E \to F$ tal que $f(x) = c\ \forall\ x \in E$, Probar que f es lineal si y sólo si $c = 0$ (E y F son espacios vectoriales.)

4.-Definamos en $\mathbb{R}^+$ las siguientes operaciones:

$$\dagger : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \dagger y = xy$$
$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ \lambda \bullet x = x^\lambda.$$

Comprobar que $(\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet)$ es un espacio vectorial real. Calcular su elemento neutro. Demostrar que

$$\begin{array}{cccc} \phi : & (\mathbb{R}, +, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet) \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

es una aplicación lineal. Demostrar que

$$\begin{array}{cccc} \psi : & (\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +, \cdot) \\ & x & \longmapsto & \log x \end{array}$$

es una aplicación lineal. Calcular la matriz asociada a ϕ cuando se consideran las bases $\{1\}$ y $\{\frac{1}{e}\}$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet)$ respectivamente.

5.- TEOREMA DEBIL DE LA ALTERNATIVA. Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, y consideremos el sistema homogéneo asociado $AX = 0$. Probar:
a) Si el sistema homogéneo sólo admite la solución trivial, entonces el sistema completo tiene una única solución para cualquier elección de B
b) Si el sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, existen elecciones de B tal que el sistema completo no tiene solución.

Problema.- (Ene-95) Sea $A_\alpha \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definida por

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

i) Describir el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $A_\alpha X = 0,\ X \in \mathbb{R}^4$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Encontrar la solución general del sistema no homogéneo $A_\alpha X = Y_0$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en los casos de compatibilidad.

iii) Describir el conjunto $S_\alpha = \{Y \in \mathbb{R}^4 :$ el sistema $A_\alpha X = Y$ es compatible $\}$ para $\alpha \neq 0$.