E.T.S.I. de Montes. Unidad Docente de Matemáticas
PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 1997/98
Hoja 7. Aplicaciones lineales

Ejercicio 1.- Sean $\mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 de términos reales con las operaciones usuales, $\mathcal{P}_{\ni}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 de variable real x con las operaciones usuales, $B_{\mathcal{M}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$, $B_{\mathcal{P}} = \{1-x, 1+x^2, 1+2x^2, x^3-x\}$ una base de $\mathcal{P}_{\ni}(\mathbb{R})$ y

$$M_{B_{\mathcal{M}},B_{\mathcal{P}}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

la matriz de la aplicación $T: \ \mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R}) \ \longrightarrow \ \mathcal{P}_{\ni}(\mathbb{R})$ en las bases dadas.

Si $B_{c\mathcal{M}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$ y $B_{c\mathcal{P}} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_{\ni}(\mathbb{R})$,

1) Calcular $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ y sus coordenadas en las bases $B_{c\mathcal{P}}$ y $B_{\mathcal{P}}$.

2) Hallar $M_{B_{c\mathcal{M}},B_{\mathcal{P}}}(T)$, $M_{B_{\mathcal{M}},B_{c\mathcal{P}}}(T)$ y $M_{B_{c\mathcal{M}},B_{c\mathcal{P}}}(T)$.

Ejercicio 2.- En el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admiten derivadas de todos los órdenes, se considera el subconjunto E de las funciones de la forma

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \text{ con } \ a, b \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que E es un espacio vectorial y que el conjunto $\{f_{1,0}, f_{0,1}\}$ es una base de E.

b) Demostrar que para todo entero no negativo n, la aplicación $\varphi_n : E \to E$ tal que

$$\varphi_n(f_{a,b}) = f_{a,b}^{(n)},$$

siendo $f_{a,b}^{(n)}$ la derivada $n-$ésima de $f_{a,b}$, es una aplicación lineal. Dar su matriz respecto de la base anterior.

Ejercicio 3.- En los espacios vectoriales $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$W = \{(a+b)x^2 + (2b-a)x : a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\beta \\ -\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Hallar una aplicación lineal expresándola mediante su matriz $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, asociada respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifique las condiciones:

$$1)\mathrm{rg}(T) = 2, \qquad 2)T(W) \subseteq S, \qquad 3)\mathrm{Ker}(T) = V,$$

donde V es *suplementario* de W en $\mathbb{R}_3[x]$.

Ejercicio 4.-(Feb. 96)(a) En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio $\mathcal{W}$ generado por los vectores $(1,0,0,0)$ y $(0,1,0,0)$. Sea

$$\mathcal{E}_{\mathcal{W}} = \{T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ lineal} \mid \mathcal{W} \subset \mathrm{Ker}(T)\}$$

(nótese que $\mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ es un subconjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$). Demuéstrese que $\mathcal{E}_{\mathcal{W}}$, con las operaciones usuales, es un espacio vectorial real y cálculese su dimensión.

(b) Consideremos en $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ un sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linealmente independiente y sea $\mathcal{W}$ el subespacio generado por el anterior sistema de vectores. Pruébese que

$$\mathcal{E}_{\mathcal{W}} = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ lineal} \mid \mathcal{W} \subset \mathrm{Ker}(T)\}$$

operaciones usuales, es un espacio vectorial real y cálculese su dimensión.

Problema 5.-(Feb. 96) Para cada número real α consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \\ & S(x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & (\alpha x_1 - x_2 + \alpha x_4, 2x_2 - x_3 - x_4, \alpha x_3 + \alpha x_4, \alpha x_1 - x_2 + \alpha^2 x_4). \end{array}$$

Determinar, para cada valor de α que lo permita, una aplicación lineal

$$T:\ \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \longrightarrow \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}$$

tal que cumpla <u>simultáneamente</u>:

$$\begin{array}{rrcl} i) & \mathrm{rg}(S+T) & = & 2. \\ ii)) & S \circ (S+T) & \equiv & 0. \end{array}$$

Expresar T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}$.

Problema 6.-(Feb. 92) Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y $\mathcal{B}$ una base de E. Sea f un endomorfismo de E y A la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$. Consideremos la propiedad $P_1 : \exists m \geq 2$ *de modo que* $rg(A) = \mathrm{rg}(A^m)$

(Escribiremos $f \in P_1$ cuando f verifica la propiedad P_1).

Sea entonces $f \in P_1$.

a) Probar que $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2 = \cdots = \mathrm{Im}\ f^m$.

b) Probar que $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2 = \cdots = \mathrm{Ker}\ f^m$.

c) Probar que $E = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$.

Dado ahora $r \in End(E)$, consideremos la propiedad $P_2 : \forall x \in \mathrm{Im}\ r$ se verifica que $r(x) = x$.

d) Sea $r \in P_2$ y A la matriz de r respecto una base de E. Calcular $\min\{m > 1 :\ \mathrm{rg}(A^m) = \mathrm{rg}(A)\}$.

e) Dado S, subespacio vectorial de E, demostrar que existe $r \in P_2$ tal que $\mathrm{Im}\ r = S$.

f) Demostrar que si $r \in P_2$, existe una base $\mathcal{B}$ de E tal que la matriz de r respecto de esa base es diagonal. Dar una base en esas condiciones y su matriz diagonal asociada.

g) Dado $r \in P_2$ y p un número natural cualquiera, calcular las soluciones de $A^p x = 0$, donde A es la matriz asociada a r respecto de una base cualquiera, no necesariamente la calculada en el apartado f) y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, con $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, n$.