ALGEBRA LINEAL. CURSO 1998/99

Tema 4. Aplicaciones lineales

- Definición, primeros ejemplos y operaciones con aplicaciones lineales.
- Núcleo, Imagen y Rango de una aplicación lineal.
- Aplicaciones lineales y dimensiones.
- Aplicaciones lineales y matrices.
- Rango de una matriz.
- Espacio dual.

Problemas

$\boxed{4.1}$ Estudiar si las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ son lineales:

$i)$ $f(x,y,z) = (x+2y, y-z, 1+z)$
$ii)$ $g(x,y,z) = (x+2y, y-z, z)$
$iii)$ $h(x,y,z) = (x+2y, y-z, z^2)$

$\boxed{4.2}$ Demostrar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$.

$\boxed{4.3}$ Dada $f : E \to F$ tal que $f(x) = c\ \forall\ x \in E$, Probar que f es lineal si y sólo si $c = 0$ (E y F son espacios vectoriales.)

$\boxed{4.4}$ Consideremos $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], \varphi(p) = p'$ (su derivada). Probar que φ es una aplicación lineal. ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva?

$\boxed{4.5}$ a) ¿Cuántas aplicaciones lineales T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ verifican $T(1,0,0) = (2,1)$; $T(0,1,0) = (0,1)$; $T(0,0,1) = (1,1)$?. Dar bases de $\ker T$ e $\mathrm{Im}\ T$ en cada caso.

b) La misma pregunta para $T(1,0,0) = (2,1)$; $T(0,1,0) = (0,1)$; $T(0,0,1) = (1,1)$; $T(1,1,1) = (a,b)$. (Expresar el resultado para los distintos valores de a y b).

$\boxed{4.6}$ Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2. Dada la aplicación derivación

$$\begin{array}{rccl} D: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & ax^2+bx+c & \mapsto & 2ax+b, \end{array}$$

elegir bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y calcular su matriz respecto de ellas. Por otra parte, hallar también $\ker D$, $Im\, D$ y una base para cada uno de ellos y sus dimensiones.

$\boxed{4.7}$ Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p)(x) = x \cdot p'(x) + 2k \cdot p''(x), \forall p \in \mathbb{R}_3[x]$, y donde p' y p'' denotan la primera y segunda derivadas de p. Consideramos la base $\mathcal{B} = \{1, x^3, 1+x, 1-x^2\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Se pide:

a) Matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2, x^3\}$.

b) Matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$.

c) Estudiar la dimensión de $\ker f$ dependiendo de los valores de k.

$\boxed{4.8}$ Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y consideremos el sistema homogéneo asociado $AX = 0$. Probar:

a) Si el sistema homogéneo sólo admite la solución trivial, entonces el sistema completo tiene una única solución para cualquier elección de B

b) Si el sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, existen elecciones de B tal que el sistema completo no tiene solución.

$\boxed{4.9}$ **(Ene-95)** Sea $A_\alpha \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definida por

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

i) Describir el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $A_\alpha X = 0,\ X \in \mathbb{R}^4$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Encontrar la solución general del sistema no homogéneo $A_\alpha X = Y_0$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en los casos de compatibilidad.

iii) Describir el conjunto $S_\alpha = \{Y \in \mathbb{R}^4 :$ el sistema $A_\alpha X = Y$ es compatible $\}$ para $\alpha \neq 0$.

$\boxed{4.10}$ Sean $\mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 de términos reales con las operaciones usuales, $\mathcal{P}_\ni(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 de variable real x con las operaciones usuales, $B_\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$, $B_\mathcal{P} = \{1 - x, 1 + x^2, 1 + 2x^2, x^3 - x\}$ una base de $\mathcal{P}_\ni(\mathbb{R})$ y

$$M_{B_\mathcal{M}, B_\mathcal{P}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

la matriz de la aplicación $T: \ \mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R}) \ \longrightarrow \ \mathcal{P}_\ni(\mathbb{R})$ en las bases dadas.

Si $B_{c\mathcal{M}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathcal{M}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$ y $B_{c\mathcal{P}} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_\ni(\mathbb{R})$,

1) Calcular $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ y sus coordenadas en las bases $B_{c\mathcal{P}}$ y $B_\mathcal{P}$.

2) Hallar $M_{B_{c\mathcal{M}}, B_\mathcal{P}}(T), M_{B_\mathcal{M}, B_{c\mathcal{P}}}(T)$ y $M_{B_{c\mathcal{M}}, B_{c\mathcal{P}}}(T)$.

$\boxed{4.11}$ En el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admiten derivadas de todos los órdenes, se considera el subconjunto E de las funciones de la forma

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \text{ con } \ a, b \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que E es un espacio vectorial y que el conjunto $\{f_{1,0}, f_{0,1}\}$ es una base de E.

b) Demostrar que para todo entero no negativo n, la aplicación $\varphi_n : E \to E$ tal que

$$\varphi_n(f_{a,b}) = f_{a,b}^{(n)},$$

siendo $f_{a,b}^{(n)}$ la derivada $n-$ésima de $f_{a,b}$, es una aplicación lineal. Dar su matriz respecto de la base anterior.

$\boxed{4.12}$ En los espacios vectoriales $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$W = \{(a + b)x^2 + (2b - a)x : a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\beta \\ -\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Hallar una aplicación lineal expresándola mediante su matriz $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, asociada respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifique las condiciones:

$$1)\,\mathrm{rg}(T) = 2, \qquad 2)\,T(W) \subseteq S, \qquad 3)\,\mathrm{Ker}(T) = V,$$

donde V es un *suplementario* de W en $\mathbb{R}_3[x]$.

$\boxed{4.13}$ Construir una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $Im\,T \subset Ker\,T$ y $(1, a, 1, 1, 1) \in Im\,T$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Dar su expresión matricial respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

$\boxed{4.14}$ **(Feb. 96)** Para cada número real α consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \\ & S(x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (\alpha x_1 - x_2 + \alpha x_4, 2x_2 - x_3 - x_4, \alpha x_3 + \alpha x_4, \alpha x_1 - x_2 + \alpha^2 x_4). \end{array}$$

Determinar, para cada valor de α que lo permita, una aplicación lineal

$$T:\ \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \longrightarrow \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}$$

tal que cumpla <u>simultáneamente</u>:

$$\begin{array}{rrcl} i) & \mathrm{rg}(S+T) & = & 2. \\ ii)) & S \circ (S+T) & \equiv & 0. \end{array}$$

Expresar T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}$.

$\boxed{4.15}$ Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de las aplicaciones lineales $h:\ \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \longrightarrow \mathbb{R}^{\nVDash}$, tales que verifican las tres condiciones siguientes:
1) $\mathrm{rg}\,h = 2$
2) $h(1, 1, 1, 1)^t = (4, 2, 2)^t$
3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
donde H es la matriz asociada a h en las bases canónicas.

Describir los elementos de $\mathcal{H}$ dando su matriz asociada respecto a las bases canónicas. ¿Es $\mathcal{H}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}, \mathbb{R}^{\nVDash})$?

$\boxed{4.16}$ **(Feb. 92)** Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y $\mathcal{B}$ una base de E. Sea f un endomorfismo de E y A la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$. Consideremos la propiedad $P_1 : \exists m \geq 2$ *de modo que* $rg(A) = \mathrm{rg}(A^m)$

(Escribiremos $f \in P_1$ cuando f verifica la propiedad P_1).

Sea entonces $f \in P_1$.

a) Probar que $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2 = \cdots = \mathrm{Im}\ f^m$.

b) Probar que $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2 = \cdots = \mathrm{Ker}\ f^m$.

c) Probar que $E = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$.

Dado ahora $r \in End(E)$, consideremos la propiedad $P_2 : \forall x \in \mathrm{Im}\ r$ se verifica que $r(x) = x$.

d) Sea $r \in P_2$ y A la matriz de r respecto una base de E. Calcular $\min\{m > 1 :\ \mathrm{rg}(A^m) = \mathrm{rg}(A)\}$.

e) Dado S, subespacio vectorial de E, demostrar que existe $r \in P_2$ tal que $\mathrm{Im}\ r = S$.

f) Demostrar que si $r \in P_2$, existe una base $\mathcal{B}$ de E tal que la matriz de r respecto de esa base es diagonal. Dar una base en esas condiciones y su matriz diagonal asociada.

g) Dado $r \in P_2$ y p un número natural cualquiera, calcular las soluciones de $A^p x = 0$, donde A es la matriz asociada a r respecto de una base cualquiera, no necesariamente la calculada en el apartado f) y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, con $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

$\boxed{4.17}$ **(Feb. 96)**.- Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial engendrado por la familia $F = \{1, \text{sen}x, \cos x\}$ con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de función por escalar. Consideremos las aplicaciones $f_\alpha : E \to \mathbb{R}^2$, con $\alpha \in (0, \pi/2]$ tales que:

$$\begin{array}{c} f_\alpha(\text{sen}(\alpha + x)) = (\pi, 1) \\ f_\alpha(\cos(\alpha + x)) = (0, e) \qquad\qquad (*) \\ f_\alpha(tg\alpha) = (\pi, 1) \end{array}$$

Obtener razonadamente:

(1) Los valores de $\alpha \in [0, \pi/2)$ para los que las igualdades de (*) determinan una aplicación lineal

(2) La matriz A_{alpha} de la aplicación f_{alpha} respecto de una base de E, extraída de F, y la base canónica de $\mathbb{R}^2$, según los valores de α.

(3) $\text{Ker} f_\alpha$ e $\text{Im} f_{alpha}$, en el caso lineal.

(4) El transformado mediante f_α, cuando sea lineal, de $\cos^2(x/2)$, expresándolo en la base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(\pi, 1), (0, e)\}$

Problema 3.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $T : V \to V$ un isomorfismo y $S : V \to V$ una aplicación lineal con $\ker S \neq \{0\}$. Estudiar, demostrando si son verdaderas o falsas, las siguientes afirmaciones.

i) $\text{rg}(T \circ T)=\text{rg } T$
ii) $\text{rg}(S \circ S)=\text{rg } S$
iii) $\text{rg}(T \circ S)=\text{rg } S$
iv) $\text{rg}(S \circ T)=\text{rg } T$
v) $\text{rg}(T \circ S)=\text{rg}(S \circ T)$

Problema 2.- (a) Sean V y U dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de dimensiones $dim(V) = n$ y $dim(U) = m$. Sea $T : V \to U$ una aplicación lineal. Discutir razonadamente la existencia o no de una aplicación lineal $S : U \to V$ en cada uno de los siguientes casos:

(i) $Im(S) = ker(T)$
(ii) $ker(S) = Im(T)$
(iii) $Im(S) = ker(T)$ y $ker(S) = Im(T)$
(iv) $S \circ T = 0$
(v) $S \circ T = I$

Problema 3.- Sean $V = \mathbb{R}^4$ y $U = \mathbb{R}^3$ y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la representación matricial de una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ en las bases canónicas. Definir, cuando sea posible, una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ en cada uno de los casos del problema anterior.