DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA A LOS RECURSOS NATURALES
E.T.S.I. de MONTES (UPM)

Problemas sobre aplicaciones lineales puestos en exámenes de 1982 al 2003.

Junio del 82.- En el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admiten derivadas de todos los órdenes, se considera el subconjunto E de las funciones de la forma

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que E es un espacio vectorial y que el conjunto $\{f_{1,0}, f_{0,1}\}$ es una base de E.
b) Demostrar que para todo entero no negativo n, la aplicación $\varphi_n : E \to E$ tal que

$$\varphi_n(f_{a,b}) = f^n_{a,b},$$

siendo $f_{a,b}$ la derivada $n-$ésima de $f_{a,b}$, es una aplicación lineal. Dar su matriz respecto de la base anterior.

Febrero del 87.-Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los vectores $v_1 = (1, 0, 2, 2)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 3, 4)$, $v_4 = (-4, 3, 2, 1)$. Calcular una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su núcleo tenga por base a $\{v_1, v_2\}$ y si imagen tenga por base a $\{v_3, v_4\}$.

Feb 87.-Se consideran $V = \mathbb{R}^4$, $V_1 = \{(\alpha, 0, \alpha + \beta, 0) \setminus \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{(0, \mu + \lambda, 0, \lambda - \mu) \setminus \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, y $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_2 - x_4)$

- Demostrar que T es un isomorfismo y que V_1 y V_2 satisfacen que $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.
- Calcular los subespacios $T(V_1)$ y $T(V_2)$ y demostrar que $\mathbb{R}^4 = T(V_1) \oplus T(V_2)$.

Junio del 87.- En $\mathbb{R}^4$ se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4, x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$.
Calcular una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $rg(L) = 2$ y $L(T(x)) = T(L(x)) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^4$.

Sep 87.-Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \setminus x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$, $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \setminus x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$. Calcular la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que satisfaga simultáneamente las siguientes propiedades: a) $rg(T) = 2$ b) $\ker(T) = H_1$ c) $T(H_2) \subset H_2$.

Feb 88.- Sean $U_2 = \{a + bx \setminus a, b \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{a + bx + cx^2 \setminus a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Se define la aplicación lineal $f : U_2 \longrightarrow U_3$ tal que $f(a + bx) = k(a + b) + ax + b/2x^2$ siendo $k \in \mathbb{R}$ una constante

(1) Determinar la matriz de la aplicación f cuando en U_2 se considera la base $\{1, x\}$ y en U_3 se considera la base $\{1, x, x^2\}$.
(2) Determinar la matriz de la aplicación f cuando en U_2 se considera la base $\{1, 1 + x\}$ y en U_3 se considera la base $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.

Feb 88.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_3).$$

(1) Estúdiese la inyectividad y suprayectividad de f.
(2) En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, y en $\mathbb{R}^4$ el subconjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, siendo: $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$, $u_3 = (-1, 3, 1)$, $v_1 = (2, 1, -2, 1)$, $v_2 = (3, -2, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$,.
Demuéstrese que U y V son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente, calculando asimismo la matriz de f en dichas bases.

Jun 88.- Consideramos los espacios vectoriales $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$, y en ellos sus base canónicas $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, y $B' = \{e'_1, e'_2\}$, respectivamente.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2 + x_3, -x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_3 - 2x_4, 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4).$$

Hállese una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que verifique:

(1) $(S \circ T)(e_1) = S(T(e_1)) = 2e'_2$, $(S \circ T)(e_2) = S(T(e_1)) = -4e'_1$,

(2) $(S \circ T)(e_3) = S(T(e_3)) = -2e'_1 + e'_2$, $(S \circ T)(e_4) = S(T(e_4)) = e'_1 - 2e'_2$,

dando su matriz asociada en las bases B y B'.

Febrero del 90.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, 0, x_3 - x_4, 0).$$

Determinar bases del núcleo y de la imagen de $f \circ f$.

Feb 90.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallar una base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores expresados en B tengan la primera coordenada igual a 1, y que cumplan las relaciones:

$$g(e'_1) = 0 \quad g(e'_2) = e'_1 \quad g(e'_3) = e'_2.$$

Determinar la matriz de g respecto de B'.

Febrero del 90.-En el espacio vectorial M, formado por las matrices cuadradas de orden tres, se considera la aplicación lineal $f : M \longrightarrow M$ tal que su matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que $f \circ f = f$ y hallar una base del núcleo y de la imagen.

Septiembre del 90.-Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la cual se conoce: $f(1,1,1) = (3,2)$, $f(a,3,1) = (4,5)$, $f(2,2,1) = (b,4)$, $f(1,2,1) = (3,3)$. Determinar loa valores de a y b para que f sea una aplicación lineal. En estos casos hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

Feb 91.- Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 6 & a+1 \end{pmatrix}$$

Determinar los casos en los cuales f no es un isomorfismo. En cada uno de esos casos hallar la dimensión del núcleo y de la imagen de f, determinando bases de cada uno de ellos.

Feb 91.- Se consideran la aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f_a(x, y) = (4x + 2y, 4x + ay, ax + y)$$

siendo a una constante real. Determinar para que valores de a, se obtiene una aplicación f_a, tal que el vector $(2, a, 1)$ pertenece a la imagen de f_a y en estos casos determinar el conjunto $f_a^{-1}(2, a, 1)$.

Feb 91.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales, se considera el subespacio W formado por los polinomios de la forma $ax^3 + bx^2 + bx - a$ (donde a, b números reales arbitrarios). Construir una aplicación $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x], \mathbb{R}_3[x])$, tal que $Im\ T = W$ y $T \circ T = \mathbf{O}$. Representar T mediante su matriz respecto de la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Feb 92.- En los espacios vectoriales $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$W = \{(a+b)x^2 + (2b-a)x : a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\beta \\ -\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Hallar una aplicación lineal expresándola mediante su matriz $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, asociada respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifique las condiciones: 1) $rg(T) = 2$, 2) $T(W) \subseteq S$ y 3) $\ker(T) = V$, *donde V* es *suplementario* de W en $\mathbb{R}^3$.

Feb 92.- Diremos que una sucesión de aplicaciones lineales $E \to F \to G$ es *exacta* en F si $Imf = \ker g$ Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Construir, si es posible, una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ tal que la sucesión $\mathbf{0} \to \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ sea exacta en $\mathbb{R}^4$ y en $\mathbb{R}^5$.

b) Construir, si es posible, una aplicación lineal $e : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que la sucesión $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbf{0}$ sea exacta en $\mathbb{R}^4$ y en $\mathbb{R}^2$.

Feb 92.- Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p)(x) = x \cdot p'(x) + 2k \cdot p"(x)$, $\forall p \in \mathbb{R}_3[x]$, y donde p' y $p"$ denotan la primera y segunda derivadas de p. Consideramos la base $\mathcal{B} = \{1, x^3, 1+x, 1-x^2\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Se pide:

a) Matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$.

b) Calcular los valores de k para los que $dim(Ker\ f) > 1$.

Teórico Feb 92.-Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y $\mathcal{B}$ una base de E. Sea f un endomorfismo de E y A la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$. Consideremos la propiedad P_1 : $\exists m \geq 2$ *de modo que* $rg(A) = rg(A^m)$

(Escribiremos $f \in P_1$ cuando f verifica la propiedad P_1).

Sea entonces $f \in P_1$.

a) Probar que $Im\ f = Im\ f^2 = \cdots = Im\ f^2$.

b) Probar que $Ker\ f = Ker\ f^2 = \cdots = Ker\ f^m$.

c) Probar que $E = Im\ f \oplus Ker\ f$.

Dado ahora $r \in End(E)$, consideremos la propiedad $P_2 : \forall x \in Im\ r$ se verifica que $r(x) = x$.

d) Sea $r \in P_2$ y A la matriz de r respecto una base de E. Calcular $\min\{m > 1 : \ rg(A^m) \ = \ rg(A)\}$.

e) Dado S, subespacio vectorial de E, demostrar que existe $r \in P_2$ tal que $Im\ r = S$.

f) Demostrar que si $r \in P_2$, existe una base $\mathcal{B}$ de E tal que la matriz de r respecto de esa base es diagonal. Dar una base en esas condiciones y su matriz diagonal asociada.

g) Dado $r \in P_2$ y p un número natural cualquiera, calcular las soluciones de $A^p x = 0$, donde A es la matriz asociada a r respecto de una base cualquiera, no necesariamente la calculada en el apartado f) y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, con $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Feb 92.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3, se consideran las bases $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y la base $B' = \{1, -1+x, (x-1)^2, (x-1)^3\}$. Calcular las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B.

Como consecuencia, si se sabe que $p(x) = 3x - 3x^2 + x^3$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de una cierta aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto $x = 1$, hállense los valores $f(1), f'(1), f''(1)$ y $f'''(1)$. Se recuerda el polinomio de Taylor de orden 3 de una cierta aplicación f en el punto $x = 1$ es

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)(x-1)^2/2! + f'''(1)(x-1)^3/3!.$$

Jun 92.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & p & \mapsto & \varphi(p) \end{array}$$

donde $\varphi(p)(x) = p(x+1) - p(x) - p(0)x$.

a) Demostrar que φ es lineal y hallar su matriz asociada en la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Calcúlense bases del núcleo y la imagen de φ.

Feb 93.- Dada la base $B = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ (los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3), Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal definida por: $T(1+x) = 1,\ T(x+x^2) = 1+2x,\ T(x^2+x^3) = 2x+3x^2,\ T(x^3) = x^2$.

- Calcular la matriz asociada a T respecto a dos bases de $\mathbb{R}_3[x]$, especificando las bases que sean elegido para ello.
- Calcular una base de ImT y una de $\ker T$.

Febrero del 93.- Sea E un espacio vectorial real con dimensión $dimE = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo tal que $dim(Ker\ f) = n$. Estudiar, demostrando si es cierta o no, la siguiente proposición:

a) Si $f \circ f = 0$ entonces $Ker\ f = Im\ f$.

b) ¿ Es cierta la proposición anterior si no se supone que $dim(Ker\ f) = n$?.

Feb 93.-Construir una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $Im\,T \subset Ker\,T$ y $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Im\,T$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Dar su expresión matricial respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

Jun 93.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_A: & \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \\ & B & \mapsto & A.B^t, \end{array}$$

es decir, $T(B) = A.B^t$.

- Probar que T_A es lineal, y calcular su matriz respecto de las bases usuales o canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- Calcular $\ker T_A$ e ImT_A.

Sep 93.- Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de las funciones infinitamente derivables con las operaciones usuales generado por $\{\exp x, \exp -x, x^3+x^5, 1\}$. Sea $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación que asigna a cada función $f \in V$ su polinomio de Taylor de orden dos en $x = 0$ (es decir, $T(f) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k$).

- Demostrar que T es lineal y calcular bases de $Ker\ T$ e $Im\ T$.
- Encontrar todas las funciones $g \in V$ que cumplan que $g(0) = g''(0) = 0$.

Feb 94.- Dada la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & I(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx. \end{array}$$

Sea

$$S = \{p \in \mathcal{P}_{99}(\mathbb{R}) : p(x) = p(-x)\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } I(p) = 0\}.$$

Probar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_{99}(\mathbb{R})$ y calcular la dimensión de dicho subespacio S.

Feb 94.-Consideremos los espacios vectoriales $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sea α un número real. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_\alpha: & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & p & \mapsto & T_\alpha(p) \end{array}$$

donde $T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} p(\alpha) & p(\alpha+1) \\ p'(\alpha) & p'(\alpha+1) \end{pmatrix}$, siendo p' la derivada del polinomio p. Se pide:

a) Demostrar que T_α es lineal.

b) Dadas $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\mathcal{B}'_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular las coordenadas de $T_\alpha(1), T_\alpha(x), T_\alpha(x^2), T_\alpha(x^3)$ en la base $\mathcal{B}'_c$.

c) Calcular la matriz asociada a T_α respecto a las bases $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}'_c$ (es decir, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(T_\alpha)$).

d) Consideremos ahora los conjuntos $\mathcal{B} = \{1 + 2x + 2x^2 + 2x^3, x + 2x^2 + 2x^3, x^2 + 2x^3, x^3\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Probar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, respectivamente. Calcular la matriz asociada a T_α respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

e) Calcular la dimensión del núcleo y de la imagen de T_α. Hállese una base de la imagen de T_α.

f) Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Estudiar si existe $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ¿Es único?.

g) Resolver, según los valores de los parámetros α, a, b, c, d el sistema lineal

$$\begin{array}{lllll} x & +\alpha y & +\alpha^2 z & +\alpha^3 t & = a \\ x & +(\alpha+1)y & +(\alpha+1)^2 z & +(\alpha+1)^3 t & = b \\ & +y & +2\alpha z & +3(\alpha)^2 t & = c \\ & +y & +2(\alpha+1)z & +3(\alpha+1)^2 t & = d \end{array}$$

h) Demostrar si es cierta o no la siguiente proposición: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ existe una base, $\mathcal{B}_\alpha$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}'_\alpha$ base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada a T_α respecto a las bases $\mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{B}'_\alpha$ es la matriz identidad.

i) Sea $\mathcal{S}_\alpha = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(\alpha) = p(\alpha + 1) = 0\}$. Demostrar que $\mathcal{S}_\alpha$ es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Construir un suplementario de $\mathcal{S}_\alpha$.

j) Construir una aplicación lineal $L_\alpha : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de rango 2 tal que $L_\alpha(p) = T_\alpha(p)$ para todo $p \in \mathcal{S}_\alpha$.

Ene 95.- Consideramos la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(-2, 1, 3)(-1, 4, 1)(-1, 3, 1)\}$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicación lineal dada por

$$T(-2, 1, 3) = (5, -3)\ T(-1, 4, 1) = (\alpha, 1)\ T(-1, 3, 1) = (1, \beta)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar para que valores de α y β la aplicación lineal T es inyectiva.

b) Obténganse justificadamente los valores de α y β par que la aplicación lineal T sea sobreyectiva.

De otra aplicación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ conocemos que $S(0, -1, 1) = (3, 1)$, $S(2, -1, 4) = (16, 17)$, $S(1, 1, 1) = (5, 8)$.

c) Comprobar que existe una única aplicación lineal que verifica los requisitos impuestos a S.

d)¿ Para qué valores de α y β las aplicaciones lineales T y S son la misma aplicación lineal?.

e)Para los valores de α y β hallados en d), calcúlense bases del núcleo y la imagen de T.

Feb 95.- Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial generado por la base $\mathcal{B} = \{\exp x, \exp -x, \sin x, \cos x\}$. Definamos la aplicación lineal $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(f) = (f(0), f'(0), f''(0))$.

- Calcúlese la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}$ y la canónica en $\mathbb{R}^3$.
- Sea $f \in V$. Obténgase (respecto a f) todas las funciones $g \in V$ que cumplan que $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$ y $g''(0) = f''(0)$

Feb 95.- Sea la aplicación lineal $T_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(m \in \mathbb{R})$ tal que

$$T_m(x, y, z) = (mx + y + z, x + my + z, x + y + mz).$$

Calcular el rango de T_m, la imagen de T_m y el núcleo de T_m.

Abril 95.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Sea $T : (\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x])$ la aplicación definida por $T(p(x)) = p(x + 1)$.

- Probar que T es lineal.
- Calcular la ImT y el $KerT$.
- ¿Existe alguna base B de $\mathbb{R}_3[x]$) tal que $M_(B_c, B)T = I$?. Razonar al respuesta

Junio del 95.- En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices reales 2×2, sea la aplicación $T_\alpha : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{11}+a_{22}+a_{21} \\ a_{11}+a_{12}+a_{22} & a_{11}+a_{12}+a_{21} \end{pmatrix}$.

(1) Demostrar que T es lineal.
(2) Calcular la matriz asociada a T en la base canónica.
(3) Comprobar que si $A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es simétrica entonces $T(A)$ es simétrica y que si $A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es antisimétrica entonces $T(A)$ es antisimétrica
(4) Calcular el $KerT$ y ImT.

Sep 95.- Dados el vector $v=(1,1,1)$ y el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. Determinar una aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) $T^3=I$ (I es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^3$).
(ii) $T\neq I$.
(iii) $T(v)=v,\ T(W)\subset W$.
(iv) T es ortogonal.

INDICACIÓN: Puede ser útil establecer que $T(W)=W$ y considerar la restricción de T a W.

Feb 96.- 1) En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio $\mathcal{W}$ generado por los vectores $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$. Sea

$$\varepsilon_{\mathcal{W}}=\{T:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4 \text{ lineal} \setminus \mathcal{W}\subset Ker\,T\}$$

(Nótese que $\varepsilon_{\mathcal{W}}$ es un subconjunto del conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$).
Demuéstrese que $\varepsilon_{\mathcal{W}}$, con las operaciones usuales, es un espacio vectorial real y calcúlese su dimensión.

2) Consideramos en $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$) un sistema $\{v_1,\ldots,v_k\}$ linealmente independiente y sea $\mathcal{W}$ el subespacio generado por el anterior sistema de vectores. Pruébese que

$$\varepsilon_{\mathcal{W}}=\{T:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4 \text{ lineal} \setminus \mathcal{W}\subset KerT\}$$

con las operaciones usuales, es un espacio vectorial real y calcúlese su dimensión.

Feb 96.- Para cada número real α consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & S(x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & (\alpha x_1 - x_2+\alpha x_4, 2x_2-x_3-x_4, \alpha x_3+\alpha x_4, \alpha x_1 - x_2+\alpha^2 x_4). \end{array}$$

Determinar, para cada valor de α que lo permita, una aplicación lineal

$$T:\ \mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$$

tal que cumpla <u>simultáneamente</u>:

$$\begin{array}{rrcl} i) & \mathrm{rg}(S+T) & = & 2. \\ ii)) & S\circ(S+T) & \equiv & 0. \end{array}$$

Expresar T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Feb 96.- Sea E el $\mathbb{R}$ espacio vectorial engendrado por la familia $F=\{1,\sin,\cos\}$ con las operaciones usuales de la suma y producto de función por escalar. Consideramos las aplicaciones $f_\alpha : E\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $\alpha\in[0,\pi/2)$, de las que se sabe:

$$f_\alpha(\sin(\alpha+x))=(\pi,1)\ f_\alpha(\cos(\alpha+x))=(0,e)\ f_\alpha(\tan(\alpha))=(\pi,1)$$

Obtener razonadamente:

(1) Los valores de $\alpha\in[0,\pi/2)$ para que las igualdades anteriores determinen una aplicación lineal.
(2) La matriz A_α de la aplicación f_α respecto de la base de E, extraída de F, y la base canónica de $\mathbb{R}^2$, según los distintos valores de α.
(3) $\ker f_\alpha$ e $\Im f_\alpha$
(4) El transformado mediante f_α, cuando sea lineal, de $\cos^2 x/2$ expresándolo en la base de $\mathbb{R}^2$ $B=\{(\pi,1),(0,e)\}$

Jun 96.- Para cada número real α consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ determinadas por $f(x,y,z,t) = (\alpha x - y + \alpha t, 2y - z - t, \alpha z + \alpha t, \alpha x - y + \alpha^2 t)$, y. una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que cumpla simultáneamente: 1) $rg(f+g) = 2$ 2) $f \circ (f+g) \equiv 0$.

Expresad T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Jun 96.- Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, determinadas por

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-4z, 2x+2y+2z) \ , \quad \text{y}$$

$$g(2,1,1) = (1,1,0) \ , \ g(1,1,1) = (1,3,1) \ , \ g(2,0,1) = (0,2,-1) \ .$$

Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $(f+g)$.

Feb 97.-Se consideran las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su matriz respecto de las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que verique las condiciones siguientes:
1) $h \circ g = f$
2) $h(1,0,0,0) = (0,0,1)$.

Feb 97.- Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & A.X - X.A \end{array}$$

- Probar que f es lineal.
- Tomemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que el conjunto W de las matrices $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale que $A.X = X.A$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- Dar una bases del subespacio W.

Jun 97.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sean f y g dos endomorfismos tales que: a) $f + g = id$ b)$g \circ f \equiv 0$.
- Pruebese que también se tiene $f \circ f \equiv f$, así como $f \circ g \equiv 0$.
- Demostrar que $\mathbb{R}^n = Imf \oplus Img$.
- Consideremos el endomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $h(1,0,3) = (1,1,-6)$, $h(2,1,1) = (1,0,4)$, $h(-2,-1,0) = (1,0,4)$. Determinar razonadamente si $h \circ h \equiv h$ o $h \circ h \not\equiv h$.

Feb 98.-Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que verifican las tres condiciones siguientes: 1) $rgh = 2$, $h(1,1,1)^t = (4,2,2)^t$ y 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde H es la matriz de h respecto de las bases canónicas.

Describir los elementos de $\mathcal{H}$ dando su matriz asociada respecto de las bases canónicas.¿es $\mathcal{H}$ un subespacio de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$?.

Feb 98.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $T : V \rightarrow V$ un isomorfismo y $S : V \rightarrow V$ una aplicación lineal con $\ker S \neq \{0\}$. Estudiar, demostrando si son verdaderas o falsas, las siguientes afirmaciones.

i) rg($T \circ T$)=rg T
ii) rg($S \circ S$)=rg S
iii) rg($T \circ S$)=rg S

iv) rg($S \circ T$)=rg T
v) rg($T \circ S$)=rg($S \circ T$)

Feb 99.- Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 y $L(V, V)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en V. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $L(V, V)$ son o no subespacios vectoriales:
i) $\{T \in L(V, V) \;/\; rg(T) = 4\}$
ii) $\{T \in L(V, V) \;/\; rg(T) \leq 4\}$
iii) $\{T \in L(V, V) \;/\; rg(T) \leq 2\}$
iv) $\{T \in L(V, V) \;/\; rg(T) = 0\}$
v) $\{T \in L(V, V) \;/\; rg(T \circ T) = rg(T)\}$

Feb 99.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya representación matricial en la base canónica es $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar <u>razonadamente</u> una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$S \circ T = T \circ S \qquad \text{y} \qquad S(1,0,0) = (1,1,1)$$

Jun 99.-Sean $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}_3[x]$ y $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal definida por $T((p)(x)) = (1-x)p'(x) + p(x)$.
a) Demostrar que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ y dar una base de W.
b) Probar que para cada $p \in W$ se tiene que $T(p) \in W$.
Consideremos ahora la aplicación lineal $S : W \longrightarrow W$ tal que $S(q) = T(q)$ para todo $q \in W$.
c)Obtener la matriz de S respecto de la base de W calculada en a).
d) Calcúlense bases del núcleo y la imagen de S.

Feb 00.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por

$$\begin{gathered} T(1,0,0) = (1,0,1) \\ T(0,1,0) = (0,1,0) \\ T \circ T = T \end{gathered}$$

Obtén la matriz asociada en la base canónica de una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T \circ S = 0, \quad S \circ S = S \qquad \text{y} \qquad S(1,1,1) = (0,0,3)$$

Feb 00.- Sean

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ¿es la matriz A equivalente a la matriz C?. Resuelve $AX = C$.
(b) Si la aplicación $Id : \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$, $Id(p) = p \quad \forall p \in \mathbb{R}_4[x]$, tiene por matriz asociada en la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y cierta base B_1 a la matriz A encuentra dicha base B_1.
Expresa el polinomio $p(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 3x^3 + x^4$ en potencias de $(x-1)$.
(c) Si ahora A matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$, en la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, encuentra, si es posible, un par de bases B_2 y B_3 tales que $M_{B_2,B_3}(f) = I$.

Jun 00.- Se considera el conjunto W de matrices reales 3×3 que son de la siguiente forma

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} c & d & e \\ b & c & d \\ a & b & c \end{pmatrix}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

con la suma usual de matrices y el producto usual de matrices por números reales
(1) Demostrar que W con dichas operaciones es un espacio vectorial real y dar una base.
(2) Sea $S \subset W$ el subconjunto de las matrices de W que son además simétricas. Demostrar que S es un subespacio vectorial de W y calcular un suplementario de S en W

(3) (Notad que si $A \in W$ entonces $A^t \in W$). Sea

$$\begin{array}{rccc} T: & W & \longrightarrow & W \\ & A & \mapsto & T(A) = \frac{A+A^t}{2} \end{array}$$

Demostrar que T es lineal y calcular su matriz asociada respecto a una base (a elegir por el alumno)

(4) Probar que T es diagonalizable y calcular una base de autovectores de T

Feb 01.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Definamos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & T(X) = AX. \end{array}$$

Se pide:

(1) Calcular la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, y hallar una base del núcleo y una base de la imagen de T.

(2) Resolver la ecuación matricial $AX = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ denota la matriz nula del espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(3) Encontrar la forma general de todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que la ecuación matricial $AX = B$ tiene solución.

Feb 01.- Sea $f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide construir $g:\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicación lineal que verifique las condiciones siguientes:

(1) $dim(\ker(g \circ f)) \leq dim(\ker(g))$

(2) $(g) =\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$

¿Es única la aplicación lineal g? Calcular la matriz de la aplicación lineal g que se haya construido, respecto de las bases canónicas. **Feb 03.-** Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que tres:

- a) **(4 puntos)** Probar que los subconjuntos U y W,

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x]:\ p(x) = p(-x)\}$$
$$W = \{p \in \mathbb{R}_3[x]:\ p(x) = -p(-x)\}$$

  son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$ y dar una base de cada uno de ellos.

- b) **(2 puntos)** Probar que $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$, obteniendo para cada $p \in \mathbb{R}_3[x]$ polinomios $u \in U$ y $w \in W$ tales que $p = u + w$.
- c) **(4 puntos)** Se considera la aplicación $T_1, T_2:\ \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida del modo siguiente: para cada $p \in \mathbb{R}_3[x]$

$$T_1(p)(x) = p(x) + p(-x)$$
$$T_2(p)(x) = p(x) - p(-x)$$

  Demostrar que las aplicaciones T_1, T_2 son lineales y que verifican:

$$T_1{}^2 = 2T_1 \qquad T_1 \circ T_2 = 0$$