Algebra Lineal. Curso 00-01

Tema 4: APLICACIONES LINEALES.$1^O D$

- Definición, ejemplos y operaciones
- Núcleo, imagen y rango de una aplicación lineal
- Aplicación lineal y dimensiones
- Aplicaciones lineales y matrices

1.- Sean $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 de términos reales con las operaciones usuales, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 de variable real x con las operaciones usuales, $B_{\mathcal{M}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B_{\mathcal{P}} = \{1-x, 1+x^2, 1+2x^2, x^3-x\}$ una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y

$$M_{B_{\mathcal{M}},B_{\mathcal{P}}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

la matriz de la aplicación $T: \quad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ en las bases dadas.

Si $B_{c\mathcal{M}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $B_{c\mathcal{P}} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,

1) Calcular $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ y sus coordenadas en las bases $B_{c\mathcal{P}}$ y $B_{\mathcal{P}}$.

2) Hallar $M_{B_{c\mathcal{M}},B_{\mathcal{P}}}(T)$, $M_{B_{\mathcal{M}},B_{c\mathcal{P}}}(T)$ y $M_{B_{c\mathcal{M}},B_{c\mathcal{P}}}(T)$.

1.- Definamos en $\mathbb{R}^+$ las siguientes operaciones:

$$\dagger : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \; x \dagger y = xy$$

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \; \lambda \bullet x = x^\lambda.$$

$(\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet)$ es un espacio vectorial real. Demostrar que

$$\begin{array}{cccc} \phi: & (\mathbb{R}, +, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet) \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

es una aplicación lineal. Demostrar que

$$\begin{array}{cccc} \psi: & (\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +, \cdot) \\ & x & \longmapsto & \log x \end{array}$$

es una aplicación lineal. Calcular la matriz asociada a ϕ cuando se consideran las bases $\{1\}$ y $\{\frac{1}{e}\}$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^+, \dagger, \bullet)$ respectivamente.

2.-a) Estudiar si f es aplicación lineal siendo

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, y-z, 1+z) \end{array}$$

b) Demostrar que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$

c) Dada $f: E \to F$ tal que $f(x) = c \;\forall\, x \in E$, Probar que f es lineal si y sólo si $c = 0$ (E y F son espacios vectoriales.)

3.-Consideremos $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], \varphi(p) = p'$ (su derivada). Probar que φ es una aplicación lineal. Calcular la matriz de φ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$. ¿ Es inyectiva ? ¿ Es suprayectiva ?

4.- a) ¿ Cuántas aplicaciones lineales T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ verifican $T(1,0,0) = (2,1);\ T(0,1,0) = (0,1);\ T(0,0,1) = (1,1)$?. Dar bases de $\ker T$ e $\Im T$ en cada caso.

b) La misma pregunta para $T(1,0,0) = (2,1);\ T(0,1,0) = (0,1);\ T(0,0,1) = (1,1);\ T(1,1,1) = (a,b)$. (Expresar el resultado para los distintos valores de a y b).

Feb 90.-Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2, 0, x_3 - x_4, 0)$. Determinar bases del núcleo y de la imagen de $f \circ f$.

Feb 91.-Se consideran la aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f_a(x,y) = (4x + 2y, 4x + ay, ax + y)$ siendo a una constante real. Determinar para que valores de a, se obtiene una aplicación f_a, tal que el vector $(2,a,1)$ pertenece a la imagen de f_a y en estos casos determinar el conjunto $f_a^{-1}(2,a,1)$.

Sep 93.- Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de las funciones infinitamente derivables con las operaciones usuales generado por $\{\exp x, \exp -x, x^3 + X^5, 1\}$. Sea $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación que asigna a cada función $f \in V$ su polinomio de Taylor de orden dos en $x = 0$ (es decir, $T(f) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k$).

- Demostrar que T es lineal y calcular bases de $Kert$ e ImT.
- Encontrar todas las funciones $g \in V$ que cumplan que $g(0) = g''(0) = 0$.

Feb 95.-Sea la aplicación lineal T_m ($m \in \mathbb{R}$) definida por $T_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T_m(x,y,z) = (mx + y + z, x + my + z, x + y + mz)$. Calcular el rango de T_m, la imagen de T_m y el núcleo de T_m.

Feb 96.- 1) En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio $\mathcal{W}$ generado por los vectores $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$. Sea

$$\varepsilon_{\mathcal{W}} = \{T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ lineal} \setminus \mathcal{W} \subset KerT\}$$

(Nótese que $\varepsilon_{\mathcal{W}}$ es un subconjunto del conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$).

Demuéstrese que $\varepsilon_{\mathcal{W}}$, con las operaciones usuales, es un espacio vectorial real y calcúlese su dimensión.

2)Consideramos en $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) un sistema $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linealmente independiente y sea $\mathcal{W}$ el subespacio generado por el anterior sistema de vectores. Pruébese que

$$\varepsilon_{\mathcal{W}} = \{T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ lineal} \setminus \mathcal{W} \subset KerT\}$$

con las operaciones usuales, es un espacio vectorial real y calcúlese su dimensión.

Problema.- TEOREMA DEBIL DE LA ALTERNATIVA. Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, y consideremos el sistema homogéneo asociado $AX = 0$. Probar:

a) Si el sistema homogéneo sólo admite la solución trivial, entonces el sistema completo tiene una única solución para cualquier elección de B

b) Si el sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, existen elecciones de B tal que el sistema completo no tiene solución.

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL.

Tema 4: Aplicaciones lineales. $1^O D.$ **(continuación)**

Junio del 82.- En el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admiten derivadas de todos los órdenes, se considera el subconjunto E de las funciones de la forma

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que E es un espacio vectorial y que el conjunto $\{f_{1,0}, f_{0,1}\}$ es una base de $E.$
b) Demostrar que para todo entero no negativo $n,$ la aplicación $\varphi_n : E \to E$ tal que

$$\varphi_n(f_{a,b}) = f^n_{a,b},$$

siendo $f_{a,b}$ la derivada $n-$ésima de $f_{a,b}$, es una aplicación lineal. Dar su matriz respecto de la base anterior.

Feb 87.- Se consideran $V_1 = \{(\alpha, 0, \alpha + \beta, 0) \backslash \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{(0, \mu + \lambda, 0, \lambda - \mu) \backslash \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ y $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_2 - x_4)$

- Demostrar que T es un isomorfismo y que V_1 y V_2 satisfacen que $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.
- Calcular los subespacios $T(V_1)$ y $T(V_2)$ y demostrar que $\mathbb{R}^4 = T(V_1) \oplus T(V_2)$.

Feb 88.- Sean $U_2 = \{a + bx \backslash a, b \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{a + bx + cx^2 \backslash a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Se define la aplicación lineal $f : U_2 \longrightarrow U_3$ tal que $f(a + bx) = k(a + b) + ax + b/2x^2$ siendo $k \in \mathbb{R}$ una constante

(1) Determinar la matriz de la aplicación f cuando en U_2 se considera la base $\{1, x\}$ y en U_3 se considera la base $\{1, x, x^2\}$.
(2) Determinar la matriz de la aplicación f cuando en U_2 se considera la base $\{1, 1 + x\}$ y en U_3 se considera la base $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.

Feb 88.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_3).$

(1) Estúdiese la inyectividad y suprayectividad de f.
(2) En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, y en $\mathbb{R}^4$ el subconjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, siendo: $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$, $u_3 = (-1, 3, 1)$, $v_1 = (2, 1, -2, 1)$, $v_2 = (3, -2, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$,.
Demuéstrese que U y V son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente, calculando asimismo la matriz de f en dichas bases.

Feb 90.- En el espacio vectorial M, formado por las matrices cuadradas de orden tres, se considera la aplicación lineal $f : M \longrightarrow M$ tal que su matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que $f \circ f = f$ y hallar una base del núcleo y de la imagen.

Sep 90.- Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la cual se conoce: $f(1, 1, 1) = (3, 2)$, $f(a, 3, 1) = (4, 5)$, $f(2, 2, 1) = (b, 4)$, $f(1, 2, 1) = (3, 3)$. Determinar loa valores de a y b para que f sea una aplicación lineal. En estos casos hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

Feb 91.- Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 6 & a+1 \end{pmatrix}$$

Determinar los casos en los cuales f no es un isomorfismo. En cada uno de esos casos hallar la dimensión del núcleo y de la imagen de f, determinando bases de cada uno de ellos.

Feb 92.- Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p)(x) = x \cdot p'(x) + 2k \cdot p"(x)$, $\forall p \in \mathbb{R}_3[x]$, y donde p' y $p"$ denotan la primera y segunda derivadas de p. Consideramos la base $\mathcal{B} = \{1, x^3, 1+x, 1-x^2\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Se pide:
a) Matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$.
b) Calcular los valores de k para los que $dim(Ker\ f) > 1$.

Jun 92.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & p & \mapsto & \varphi(p) \end{array}$$

donde $\varphi(p)(x) = p(x+1) - p(x) - p(0)x$.
a) Demostrar que φ es lineal y hallar su matriz asociada en la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Calcúlense bases del núcleo y la imagen de φ.

Feb 93.- Sea E un espacio vectorial real con dimensión $dimE = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo tal que $dim(Ker\ f) = n$. Estudiar, demostrando si es cierta o no, la siguiente proposición:
a) Si $f \circ f = 0$ entonces $Ker\ f = Im\ f$.
b) ¿ Es cierta la proposición anterior si no se supone que $dim(Ker\ f) = n$?.

Jun 93.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \\ & B & \mapsto & A.B^t, \end{array}$$

es decir, $T(B) = A.B^t$.

- Probar que T_A es lineal, y calcular su matriz respecto de las bases usuales o canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- Calcular $\ker T_A$ e ImT_A.

Ene 95.- Consideramos la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(-2,1,3)(-1,4,1)(-1,3,1)\}$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicación lineal dada por $T(-2,1,3) = (5,-3)$, $T(-1,4,1) = (\alpha,1)$ y $T(-1,3,1) = (1,\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
a) Estudiar para que valores de α y β la aplicación lineal T es inyectiva.
b) Obténganse justificadamente los valores de α y β par que la aplicación lineal T sea sobreyectiva.
De otra aplicación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ conocemos que $S(0,-1,1) = (3,1)$, $S(2,-1,4) = (16,17)$, $S(1,1,1) = (5,8)$.
c) Comprobar que existe una única aplicación lineal que verifica los requisitos impuestos a S.
d)¿ Para qué valores de α y β las aplicaciones lineales T y S son la misma aplicación lineal?.
e)Para los valores de α y β hallados en d), calcúlense bases del núcleo y la imagen de T.

Jun 95.- En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices reales 2×2, sea la aplicación $T_\alpha : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{11}+a_{22}+a_{21} \\ a_{11}+a_{12}+a_{22} & a_{11}+a_{12}+a_{21} \end{pmatrix}$.

(1) Demostrar que T es lineal.
(2) Calcular la matriz asociada a T en la base canónica.
(3) Comprobar que si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es simétrica entonces $T(A)$ es simétrica y que si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es antisimétrica entonces $T(A)$ es antisimétrica
(4) Calcular el $KerT$ y ImT.