Algebra Lineal. Curso 00-01

Tema VI: DETERMINANTES. $1^O D$

• Definición de determinante de orden n.
• Algunas propiedades de los determinantes.
• Desarrollo de un determinante por una fila o columna.
• Fórmula para el cálculo de la matriz inversa. Regla de Cramer.
• Rango de una matriz y determinantes.

$\boxed{5.1}$ **1.-** Calculad los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & n & \cdots & n \\ n & n & n & 4 & \cdots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n+1) \\ 9 & 12 & 15 & \cdots & 3(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & n(n+1) & n(n+2) & \cdots & n(2n-1) \end{vmatrix}$$

$\boxed{5.2}$ **2.-** Se consideran las matrices reales 4x4:

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha-1) & 1 & \beta & \alpha \\ -1 & \alpha & 2 & -1 \\ \alpha & (\beta+1) & (\beta-1) & (\alpha+1) \\ -1 & \gamma & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

a) Demuéstrese que el conjunto

$$W = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 |\ A \text{ no es invertible}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
b) Calcúlese la dimensión de W y encontrad un suplementario de W en $\mathcal{M}_{4x4}(\mathbb{R})$.

$\boxed{5.3}$ **Feb 99.-** Obtener justificadamente, cuando existan, dos matrices invertibles, X e Y, tales que verifiquen la igualdad $AX = YB$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y para las matrices B siguientes:

$$i)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ii)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} \qquad iii)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5.4}$ **Feb 97.-** Calculad el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n-1 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 5 & 4 & 3 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 4 & 3 & 2 \\ \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$\boxed{5.5}$ **Sep 96.-** Sean U e I matrices de orden $n,\ n \geq 2$, tales que siendo u_{ij} e $\imath_{ij}$ los términos situados en la fila i y columna j de U e I respectivamente, se verifica

$$u_{ij} = 1, \forall i, j = 1, \ldots, n; \qquad \imath_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y $A = U - I$.

Calcular $\det(A - \omega I), \omega \in \mathbb{R}$.

$\boxed{5.6}$ **Ene 95.-**

- Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matriz invertible tal que cada uno de sus elementos a_{ij} es un número entero. Probar la siguiente proposición:
  " Cada elemento de A^{-1} es un número entero $\Longleftrightarrow$ $det(A) = \pm 1$".
- Calcular el determinante de una matriz antisimétrica A de orden impar, esto es, $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A = A^{-1}$ (con n impar), donde A^t es la matriz transpuesta de A. ¿Cuál puede ser el valor de $det(A)$ si A es antisimétrica y de orden par?
- Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sean $\mathcal{T}$ un endomorfismo de V, B_1 una base de V y A la matriz asociada a $\mathcal{T}$ en la base B_1. Demostrar que:
  " $det(A) = 0 \Longleftrightarrow$ existe una base B_2 de V tal que para algún $\overrightarrow{v_i} \in B_2,\ \mathcal{T}(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{0}$.

$\boxed{5.7}$ **Feb 90.-** Calcular $A^2,\ A^{-1},\ det(A)$, cuando

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5.8}$ **Feb 90.-**Se considera el determinante de orden $n+1$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 \end{vmatrix}$$

Calcular el valor de D_n y demostrar por inducción que el valor hallado es correcto, para $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\boxed{5.9}$ **Feb 93.-** El objetivo de este ejercicio es calcular, en función de n y de x, el siguiente deteminante:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

i) Calculad $D_1(x),\ D_2(x),\ D_3(x),\ D_4(x)$.
ii) Escribid una fórmula explícita razonable para $D_n(x)$.
iii) Obtened una fórmula recurrente que exprese $D_{n+2}(x)$ en función de $D_{n+1}(x)$ y $D_n(x)$.
iv) Utilizando iii), probad por inducción la veracidad o falsedad de lo conjeturado en ii).

$\boxed{5.10}$ **Jun 92.-** Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Definimos dos aplicaciones lineales $\phi_A : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ y $\psi_A : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ por $\phi_A(X) = A.X$ y $\psi_A(X) = X.A$, para todo $X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.ç

- Calcular las matrices asociadas a ϕ_A y ψ_A en la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.
- Calcular los determinantes de las matrices halladas en el apartado anterior. ¿Qué relación tienen con el determinante de A?
- Sea $B \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Encontrar una condición necesaria y suficiente (dada sobre A)para que la ecuación matricial $A.X = B$ tenga solución única, siendo $X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.
- Sea $\lambda \in (\mathbb{R})$. Encontrar una condición necesaria y suficiente (dada sobre A)para que la ecuación $A.X = \lambda X$ (o $X.A = \lambda X$) tenga solución no nula, siendo $X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.
- Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ que cumplen que $A.X = X.A$, para todo $X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.