Hoja 11. Forma canónica de Jordan

Ejercicio 1.- (*Sep. 95*) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(a) calcular su matriz canónica de Jordan, así como una matriz de paso.
(b) obtener (si existe) el límite: $\lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{1}{3}A\right]^n \cdot B \right)$, siendo $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix} \right)$.

Ejercicio 2.- (*Feb. 95*) Calcular la forma de Jordan, J , de la matriz A para cada valor de a

$$A = \begin{pmatrix} a^2 + a & a - a^2 & a \\ a & 0 & a \\ 1 - a^2 & a^2 - a - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el caso $a = 0$ calcular una matriz invertible P tal que $J = P^{-1}AP$.

Ejercicio 3.- (*May. 95*) i) Sea $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Demostrar, por inducción sobre n que $J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$

ii) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular A^n.

iii) Sea $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ una sucesión de la que sabemos que $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$ y $X_{n+1} = AX_n$, siendo A la matriz del apartado anterior. Calcular el término X_{25}.

Ejercicio 4.- (*May. 94*) De un endomorfismo $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ se sabe que su polinomio característico es $p_T(\lambda) = (1-\lambda)^4(1+\lambda)^2$ y que la $\dim\ker(T-I)^2 = 3$.
Demostrar que

$$-T^5 + T^4 + 2T^3 - 2T^2 - T + I = 0.$$

Ejercicio 5.- (*May. 96*) Sea $f : \mathbb{R}^{\not\triangleleft} \longrightarrow \mathbb{R}^{\not\triangleleft}$ un endomorfismo del que se sabe:
i) rango$(f) = 4$.
ii) Las raíces del polinomio característico de f son λ_1 y λ_2, y las dos son reales.
iii) $dim[ker(f-\lambda_1 id)^{\beta_1}] - dim[ker(f-\lambda_1 id)] = 1$,
$dim[ker(f-\lambda_2 id)^{\beta_2}] - dim[ker(f-\lambda_2 id)] = 2$,
donde β_i es el índice del autovalor λ_i.
Determinar **razonadamente** las posibles formas canónicas de Jordan de f.

Problema 6.- (*Sep. 95*) Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, $n > 1$. Sean S y T endomorfismos de V. Demostrar si son ciertas o no cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) El polinomio característico del endomorfismo $S+T$ no coincide con la suma de los polinomios característicos de S y T.
(ii) El polinomio característico del endomorfismo $\alpha \cdot T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, coincide con el polinomio característico de T multiplicado por α^n.
(iii) El polinomio característico del endomorfismo $S \circ T$ no coincide con el producto de los polinomios característicos de S y T.
(iv) Si T es un endomorfismo autoadjunto entonces sus polinomios mínimo y ca- racterístico coinciden.
(v) Sean λ_1 y λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ los autovalores del endomorfismo T tales que

$$\dim\ker(T-\lambda_1 I)^{k_1-1} = d_1 - 1 \quad \text{y} \quad \dim\ker(T-\lambda_2 I)^{k_2} = d_2 \ ,$$

con $d_1 + d_2 = n$, entonces el polinomio mínimo de T viene dado por

$$pm_T = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2} \ .$$