Tema 7. Diagonalización y Formas canónicas

- Autovalores, autovectores y polinomio característico.
- Diagonalización de matrices y endomorfismos.
- Endomorfismos nilpotentes. Estructura.
- Polinomios anuladores. Teorema de Cayley-Hamilton. Polinomio mínimo. Propiedades básicas.
- Descomposición en suma directa de autoespacios generalizados. Teorema de Jordan.

Problemas

7.1 (Feb. 2000) Determina la matriz canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a+2-b & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a+1-b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Halla una matriz de paso P , tal que $J = P^{-1}AP$, según los distintos valores de los parámetros reales a y b .

7.2 (Sep. 99) En aquellos casos en los que A tenga rango 3, determina la matriz canónica de Jordan de A , así como una matriz de paso, según los distintos valores de los parámetros reales a y b .

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2a+3 & -3+2a & 2a+ab-b \\ 0 & 2 & -2+2a & ab \\ 0 & 0 & 2a & ab \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

7.3 (Jun. 99) Halla la forma canónica de Jordan de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ de la que sabemos que tiene dos únicos autovalores y que:

- (1) $\dim \ker f^4 - \dim \ker f^3 = 1$
- (2) $f^4(v) \forall v \in \ker f^5$
- (3) $\ker(f - 3I)^3 = L\{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\}$
- (4) $\dim \ker(f - 3I) < \dim \ker(f - 3I)^3$

7.4 (May. 99) a) Para cada valor del parámetro a , calcular la forma canónica de Jordan, J , de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la matriz invertible P tal que $J = P^{-1}AP$ para cada uno de los casos del apartado anterior

7.5 (Feb. 99) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Encontrar una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\Im T = L\{v_1 + v_2, v_3 + v_4\}$ y $\ker T^2 = \mathbb{R}^4$. Dar la matriz asociada a T en la base B de $\mathbb{R}^4$, su forma canónica de Jordan J y una matriz P tal que $A = P^{-1}JP$

7.6 (Feb. 99) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, consideremos la aplicación lineal $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(X) = A^{-1} \cdot X \cdot A.$$

Se pide:

- i) Hallar la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ii) Probar que 1 es autovalor de T . Describir el conjunto E , formado por los autovectores asociados al autovalor 1.
- iii) ¿Qué relación tiene E con $S = \{B \in \mathcal{M}_{2 \times 2} : AB = BA\}$? Dar una base de S .

7.7 (Sep. 98) Dada la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) (**7 puntos**) Calcular la forma canónica de Jordan J de M y una matriz P tal que $M = P^{-1}JP$
- ii) (**3 puntos**) Encontrar una matriz C tal que $M^2(M + I) = C$

7.8 (Jun. 98) Definir un endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique:

- 1) El autoespacio generalizado asociado al autovalor 2 es $V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, x - z - t = 0\}$
- 2) $T(1, 0, 1, 0) = (3, 0, 2, 1)$
- 3) $|M| = 4$ donde M es la matriz de T en la base canónica.
- 4) Existe $\lambda > 0$ tal que $(T - \lambda I)(1, -1, 0, 0) = (1, -1, 1, -1)$ y $(T - \lambda I)^2(1, -1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$

Dar la forma canónica de T , J_T y la matriz de cambio de base Q tal que $M = Q^{-1}J_TQ$

Las operaciones pueden dejarse indicadas

7.9 (May. 98) Dar las posibles formas canónicas de Jordan para un endomorfismo $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ que cumple:

- 1) $rgT = 5$
- 2) $T^2(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \neq 0$, y $T^3(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$
- 3) $\dim \ker(T - I) = 1$
- 4) El polinomio característico de T es $P_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^r(\lambda_2 - \lambda)^{r+1}$ donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{N}$

7.10 (May. 98) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 3 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$.

1.- Probar que la forma canónica de Jordan J_A de A es $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

2.- Probar por inducción que $J_A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

3.- Calcular los valores de a para los que existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, donde la sucesión $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, está definida recurrentemente por $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.11 (Sep. 97) Determinar el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, h , tal que verifique las dos condiciones siguientes.

- i) Los subespacios $L\{(1, 0, 1)\}$ y el de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ son sus autoespacios (subespacios propios)
- ii) $h(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$

7.12 (Sep. 96) Sean U e I matrices de orden n , $n \geq 2$, tales que siendo u_{ij} e v_{ij} los términos situados en la fila i y columna j de U e I respectivamente, se verifica

$$u_{ij} = 1, \forall i, j = 1, \dots, n; \quad v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y $A = U - I$.

Se pide:

1. Calcular $\det(A - \omega I)$, $\omega \in \mathbb{R}$.
2. Determinar razonadamente los autovalores de A .
3. Determinar bases de los subespacios propios de A .
4. ¿Es A diagonalizable? Obtener, en cualquier caso, la forma reducida de Jordan de A .

7.13 (Sep. 96) Sea el sistema matricial

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} A^4 - A^2 = O \\ A^3 + A^2 - A - I = O \end{cases}$$

donde $A, I \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

1. Probar que si $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es solución de $(\mathcal{S})$, entonces B es diagonalizable.
2. Calcular todas las soluciones del sistema $(\mathcal{S})$.

7.14 (Jun. 96) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 7 & 1 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 10 & 1 & 1 & -2 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

- a) Obtener la matriz canónica de Jordan de A .
- b) Calcular **razonadamente** los rangos de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} & (A + 2I)^4, & (A + 2I)^{21}, \\ & (A - I)^4, & (A - I)^{21}, \\ & (A + 3I)^9(A - I)^3, & (A + 3I)^3(A - I)^9. \end{aligned}$$

7.15 (Feb. 96) En un bosque de robles se ha detectado la presencia de tres especies de hongos perjudiciales para los árboles. Tras estudios en el laboratorio, el tratamiento con un producto específico permite controlar la población anual de las tres especies de hongos en función de las poblaciones del año anterior mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 4z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 2z_n \end{aligned}$$

donde x_n, y_n, z_n son el número de hongos de cada una de las tres especies que hay después de un tratamiento de n años con dicho producto.

- (a) ¿Conseguirá el producto eliminar totalmente las tres especies de hongos independientemente de cuales sean las poblaciones al iniciar el tratamiento?
- (b) Se ignora si el producto es dañino para las plantaciones aledañas. Por ello, y asegurando la desaparición de los tres tipos de hongos, es conveniente emplear el tratamiento durante la menor cantidad de años posible. ¿Cuál es el periodo mínimo de años que han de transcurrir para tener la certeza de la erradicación total de las tres especies?

7.16 (Sep. 95) Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n , $n > 1$. Sean S y T endomorfismos de V . Demostrar si son ciertas o no cada una de las siguientes afirmaciones:

- El polinomio característico del endomorfismo $S + T$ no coincide con la suma de los polinomios característicos de S y T .
- El polinomio característico del endomorfismo $\alpha \cdot T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, coincide con el polinomio característico de T multiplicado por α^n .
- El polinomio característico del endomorfismo $S \circ T$ no coincide con el producto de los polinomios característicos de S y T .
- Si T es un endomorfismo autoadjunto entonces sus polinomios mínimo y característico coinciden.
- Sean λ_1 y λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) los autovalores del endomorfismo T tales que

$$\dim \ker(T - \lambda_1 I)^{k_1-1} = d_1 - 1 \quad \text{y} \quad \dim \ker(T - \lambda_2 I)^{k_2} = d_2 ,$$

con $d_1 + d_2 = n$, entonces el polinomio mínimo de T viene dado por

$$pm_T = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} .$$

7.17 (May. 95) i) Sea $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Demostrar, por inducción sobre n que

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} .$$

ii) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular A^n .

iii) Sea $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ una sucesión de la que sabemos que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $X_{n+1} = AX_n$, siendo A la matriz del apartado anterior. Calcular el término X_{25} .

7.18 (Jun. 94) Diremos que un endomorfismo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *separable* si se cumple que

$$\ker T \cap \text{Im} T = \{0\} .$$

Estudiar, demostrando si son ciertas o no, las siguientes proposiciones:

- Todo endomorfismo diagonalizable es *separable*.
- Todo endomorfismo *separable* es diagonalizable.
- Un endomorfismo $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *separable* si y sólo si existe un endomorfismo diagonalizable $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\ker S = \ker D$ e $\text{Im} S = \text{Im} D$.

7.19 (Jun. 92) Hallar la forma canónica de Jordan de todas las matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que verifican la ecuación

$$A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0 .$$