Algebra Lineal. Curso 00-01

Tema 7: FORMA CANÓNICA DE JORDAN. $1^O D$

$\boxed{7.1}$ **Feb 01.-** Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que n, y consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ & p & \longmapsto & p^{n)} + p^{n-1)} + \cdots p' + p \end{array}$$

donde $p^{k)}$ es la derivada k-ésima de p.

(i) **(7 puntos)** Calcular su forma canónica de Jordan.

(ii) **(3 puntos)** Hallar una base de Jordan en el caso $n = 2$

$\boxed{7.2}$ **Sep 00.-** Sea W el subespacio de las matrices reales 4×4 generado por el sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinar todas las matrices de W cuya forma canónica de Jordan pertenece a W.

$\boxed{7.3}$ **Sep 00.-** Sea $a \in \mathbb{R}$. Se considera la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T_a: & \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ & p & \longmapsto & T_a(p) \end{array}$$

donde $T_a(p)(x) = \frac{p(x)-p(a)}{x-a}$.

Calcular la forma canónica de Jordan de T_a y una base para T_a.

$\boxed{7.4}$ **Jun 00.-** Sean, en adelante, n un número par y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo nilpotente con orden de nilpotencia 2.

1) Demostrar que $rg\ (T) \leq \frac{n}{2}$.
2) Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq \frac{n}{2}$. Construir una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nilpotente con orden de nilpotencia 2 tal que $rg\ (S) = k$.
3) Demostrar que $rg\ (T) = \frac{n}{2}$ si solo si $Im\ (T) = \ker T$.
4) Calcular la forma de Jordan de T en función de su rango.

$\boxed{7.5}$ **Jun 00.-** Calcular la forma canónica de Jordan de la matriz M dependiendo del parámetro real a

$$M = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$$

En el caso $a = 0$, dar una matriz P de modo que $M = P^{-1} \cdot J \cdot P$.

$\boxed{7.6}$ **Mayo 00.-** Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3[x]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y fijamos la base de $\mathbb{R}^3[x]$

$$B = \{1, x^2 - x + 1, x^3 - x^2, x^3\}$$

Sea $T : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3[x]$ la aplicación lineal tal que su matriz asociada a la base B es $M_B(T) = A$. Calcular la forma canónica de Jordan, J, de la matriz A y una base B' de los polinomios de $\mathbb{R}^3[x]$ tal que $M_{B'}(T) = J$.

$\boxed{7.7}$ **May 00.-** Sea $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diremos que es una matriz *dorada* si se cumple que

$$D^{k+2} = D^{k+1} + D^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

recuerda que $D^0 = I$ para cualquier matriz D.

- **(2 puntos)** Notad que la igualdad anterior en $k = 0$ se convierte en $D^2 = D + I$. Demostrar que D es dorada $\iff$ $D^2 - D - I = 0$.
- **(2.5 puntos)** Demostrar que si D es una matriz dorada entonces es invertible y diagonalizable.
- **(2.5 puntos)** Describe todas las matrices diagonales, $n \times n$ que son doradas. Usando la relación de semejanza, dar una forma general de todas las matrices doradas de tamaño $n \times n$.
- **(2 puntos)** Demostrar que si D es una matriz dorada entonces $I - D$ es también dorada y calcular la inversa de $I - D$.
- **(1 puntos)** Sean $D_1, D_2, \cdots, D_s$ matrices doradas y $C_1 = \begin{pmatrix} c_1 1 \\ \vdots \\ c_1 n \end{pmatrix}, \cdots, C_s = \begin{pmatrix} c_s 1 \\ \vdots \\ c_s n \end{pmatrix}$; s vectores de $\mathbb{R}^n$. Sea $X_k = \sum_{i=1}^{s} D_i^k C_i$. Demuestra que la sucesión de vectores $\{X_k\}$ cumple la condición de Fibonacci, esto es,

$$X_{k+2} = X_{k+1} + X_k \qquad \forall k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

$\boxed{7.8}$ **Feb 00.-** Calcular la forma canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a+2-b & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a+1-b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz de paso P, de modo que $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$, según los distintos valores de los parámetros reales a y b.

$\boxed{7.9}$ **Jun 99.-** Hallar la forma canónica de Jordan de $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ una aplicación lineal de la que sabemos que tiene dos únicos autovalores y que:

a) $dim \ker f^4 - dim \ker f^3 = 1$.

b) $f^4(v) = 0 \quad \forall\, v \in \ker f^5$.

c) $\ker(f - 3id)^3 = L\{(1,0,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0,0)\}$.

d)$dim \ker(f - 3id) < dim \ker(f - 3id)^3$.

$\boxed{7.10}$ **Feb 99.-** Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Encontrar una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $ImT = L\{v_1 + v_2, v_3 + v_4\}$ y $\ker T^2 = \mathbb{R}^4$. Dar la matriz, A, asociada a T en la base B de $\mathbb{R}^4$, su forma canónica de Jordan J y una matriz de P tal que $A = P^{-1}JP$.

$\boxed{7.11}$ **Feb 99.-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, consideremos la aplicación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(X) = A^{-1} \cdot X \cdot A.$$

Se pide:

i) Hallar la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$.

ii) Probar que 1 es autovalor de T. Describir el conjunto E, formado por los autovectores asociados al autovalor 1.

iii) ¿Qué relación tiene E con $S = \{B \in \mathcal{M}_{2\times 2} : AB = BA\}$?. Dar una base de S.

$\boxed{7.12}$ **Sep 98**.-Dada la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) **(7 puntos)** Calcular la forma canónica de Jordan J de M y una matriz P tal que $M = P^{-1}JP$

ii) **(3 puntos)** Encontrar una matriz C tal que $M^2(M+I) = C$

$\boxed{7.13}$ **Jun 98.-** Definir un endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique:

- El autoespacio generalizado asociado al 2 es $V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus y = 0;\ x - z - t = 0\}$.
- $T(1, 0, 1, 0) = (3, 0, 2, 1)$.
- $|M| = 4$ donde M es la matriz de T en la base canónica.
- Existe un $\lambda > 0$ tal que $(T - \lambda I)(1, -1, 0, 0) = (1, -1, 1, -1)$ y $(T - \lambda I)^2(1, -1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Dar la forma canónica de T, J_T y la matriz de cambio de base Q tal que $M = Q^{-1}J_TQ$.

$\boxed{7.14}$ **Mayo 98.-** Dar una forma canónica de Jordan para el endomorfismo $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ que cumple:

1) $rgT = 5$
2) $\dim \ker(T - I) = 1$
3) $\lambda_1,\ \lambda_2$ son los dos autovalores reales y distintos de T
4) El polinomio característico de T es $P_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^r(\lambda_2 - \lambda)^{r+1}$
5) $T^2(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0,$ y $T^3(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \neq 0$

$\boxed{7.15}$ **(May. 98)** Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 3 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$.

1.- Probar que la forma canónica de Jordan J_A de A es $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

2.- Probar por inducción que $J_A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

3.- Calcular los valores de a para los que existe el límite $\lim_{n\to\infty} \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{smallmatrix}\right)$, donde la sucesión $\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{smallmatrix}\right)$, está definida recurrentemente por $\left(\begin{smallmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{smallmatrix}\right) = A \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{smallmatrix}\right)$, $\quad \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\boxed{7.16}$ **(Sep. 97)**Determinar el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, h, tal que verifique las dos condiciones siguientes.

i) Los subespacios $L\{(1, 0, 1)\}$ y el de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ son sus autoespacios (subespacios propios)

ii) $h(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$

$\boxed{7.17}$ **(Sep. 96)** Sea el sistema matricial

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} A^4 - A^2 = O \\ A^3 + A^2 - A - I = O \end{cases}$$

donde $A, I \in M_{3x3}(\mathbb{R})$.

1. Probar que si $B \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ es solución de $(\mathcal{S})$, entonces B es diagonalizable.
2. Calcular todas las soluciones del sistema $(\mathcal{S})$.

$\boxed{7.18}$ **Mayo 96.-**.- Sea $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ un endomorfismo del que se sabe:
i) rango$(f) = 4$.
ii) Las raíces del polinomio característico de f son λ_1 y λ_2, y las dos son reales.
iii) $dim[\ker(f - \lambda_1 id)^{\beta_1}] - dim[\ker(f - \lambda_1 id)] = 1$,
$dim[\ker(f - \lambda_2 id)^{\beta_2}] - dim[\ker(f - \lambda_2 id)] = 2$,
donde β_i es el índice del autovalor λ_i.
Determinar **razonadamente** las posibles formas canónicas de Jordan de f.

$\boxed{7.19}$ **Jun 96.-** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 7 & 1 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 10 & 1 & 1 & -2 & -2 & -9 \end{pmatrix} .$$

a) Obtener la matriz canónica de Jordan de A.
b) Calcular **razonadamente** los rangos de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{ccc} (A+2I)^4 & , & (A+2I)^{21} , \\ (A-I)^4 & , & (A-I)^{21} , \\ (A+3I)^9(A-I)^3 & , & (A+3I)^3(A-I)^9 . \end{array}$$

$\boxed{7.20}$ **(Feb. 96)** En un bosque de robles se ha detectado la presencia de tres especies de hongos perjudiciales para los árboles. Tras estudios en el laboratorio, el tratamiento con un producto específico permite controlar la población anual de las tres especies de hongos en función de las poblaciones del año anterior mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 4z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 2z_n \end{aligned}$$

donde x_n, y_n, z_n son el número de hongos de cada una de las tres especies que hay después de un tratamiento de n años con dicho producto.

(a) ¿Conseguirá el producto eliminar totalmente las tres especies de hongos independientemente de cuales sean las poblaciones al iniciar el tratamiento?

(b) Se ignora si el producto es dañino para las plantaciones aledañas. Por ello, y asegurando la desaparición de los tres tipos de hongos, es conveniente emplear el tratamiento durante la menor cantidad de años posible. ¿Cuál es el periodo mínimo de años que han de trascurrir para tener la certeza de la erradicación total de las tres especies?

$\boxed{7.21}$ **Sep 95.-**.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) calcular su matriz canónica de Jordan, así como una matriz de paso.
(b) obtener (si existe) el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{1}{3}A\right]^n \cdot B\right)$$

siendo $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{7.22}$ **Sep 95.-**.- Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, $n > 1$. Sean S y T endomorfismos de V. Demostrar si son ciertas o no cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) El polinomio característico del endomorfismo $S+T$ no coincide con la suma de los polinomios característicos de S y T.
(ii) El polinomio característico del endomorfismo $\alpha\cdot T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, coincide con el polinomio característico de T multiplicado por α^n.
(iii) El polinomio característico del endomorfismo $S \circ T$ no coincide con el producto de los polinomios característicos de S y T.
(iv) Si T es un endomorfismo autoadjunto entonces sus polinomios mínimo y característico coinciden.
(v) Sean λ_1 y λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) los autovalores del endomorfismo T tales que

$$\dim\ker(T-\lambda_1 I)^{k_1-1} = d_1 - 1 \quad \text{y} \quad \dim\ker(T-\lambda_2 I)^{k_2} = d_2 \ ,$$

con $d_1 + d_2 = n$, entonces el polinomio mínimo de T viene dado por

$$pm_T = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2} \ .$$

$\boxed{7.23}$ **Feb 94.-** Calcular razonadamente la forma canónica de Jordan J de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & a-a^2-3 & a^2+3 \\ a-1 & a & a-2 & 1 \\ 4-a & 0 & a^2-a+4 & -a^2-3 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. En el caso particular en el que $a = 2$, encontrar una matriz P de modo que $J = P^{-1}\cdot A \cdot P$.