

E.T.S.I. de Montes. Unidad Docente de Matemáticas
PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 1997/98
Hoja Repaso Semana Santa

Ejercicio 1.- (*Jun. 97*) Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -a^2 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la forma canónica de Jordan de f en función del parámetro $a (\in \mathbb{R})$ y determinar, en cada caso, una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de f sea su matriz canónica de Jordan.

Ejercicio 2.- (*May. 97*) Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} b & a-b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a^2 & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular la forma canónica de Jordan de f en función de los parámetros a y b .

(b) En los casos en los que f sea diagonalizable, determinar una base de $\mathbb{R}^3$ constituida por autovectores de f .

Ejercicio 3.- (*Sep. 97*) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2(a-4) & -1 & a-6 & 0 \\ a^2-3a & a+2 & 4a & a \\ 3-a & -1 & -1 & 0 \\ a-3 & 1 & a+2 & a+1 \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R})$$

Obtener **únicamente** para aquellos valores de a para los que el número 2 es un autovalor triple de A (multiplicidad algebraica igual a 3), su matriz de Jordan, así como una matriz de paso.

Ejercicio 4.- (*Jun. 95*) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 7 & 1 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 10 & 1 & 1 & -2 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

a) Obtener la matriz canónica de Jordan de A .

b) Calcular **razonadamente** los rangos de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} (A+2I)^4, & \quad (A+2I)^{21}, \\ (A-I)^4, & \quad (A-I)^{21}, \\ (A+3I)^9(A-I)^3, & \quad (A+3I)^3(A-I)^9. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.- (Sep. 96) Sea el sistema matricial

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} A^4 - A^2 = O \\ A^3 + A^2 - A - I = O \end{cases}$$

donde $A, I \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}}(\mathbb{R})$.

1. Probar que si $B \in \mathcal{M}_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}}(\mathbb{R})$ es solución de $(\mathcal{S})$, entonces B es diagonalizable.
2. Calcular todas las soluciones del sistema $(\mathcal{S})$.

Ejercicio 6.- (Jun. 95) Sea $T \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ tal que $T(1, 1, 0, 0) = (2, 2, 0, 0)$, $T(1, 0, 1, 0) = (2, 0, 2, 0)$, y el autoespacio asociado a un cierto valor λ , es decir $\ker(T - \lambda I)$ está definido por $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y - z + t = 0\}$. Además, la traza del endomorfismo T vale 6.

Calcular la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 7.- (Sep. 96) Sean U e I matrices de orden n , $n \geq 2$, tales que siendo u_{ij} e v_{ij} los términos situados en la fila i y columna j de U e I respectivamente, se verifica

$$u_{ij} = 1, \forall i, j = 1, \dots, n; \quad v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y $A = U - I$.

Se pide:

1. Calcular $\det(A - \omega I)$, $\omega \in \mathbb{R}$.
2. Determinar razonadamente los autovalores de A .
3. Determinar bases de los subespacios propios de A .
4. ¿Es A diagonalizable? Obtener, en cualquier caso, la forma reducida de Jordan de A .

Ejercicio 8.- (Feb. 96) En un bosque de robles se ha detectado la presencia de tres especies de hongos perjudiciales para los árboles. Tras estudios en el laboratorio, el tratamiento con un producto específico permite controlar la población anual de las tres especies de hongos en función de las poblaciones del año anterior mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 4z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 2z_n \end{aligned}$$

donde x_n, y_n, z_n son el número de hongos de cada una de las tres especies que hay después de un tratamiento de n años con dicho producto.

(a) ¿Conseguirá el producto eliminar totalmente las tres especies de hongos independientemente de cuales sean las poblaciones al iniciar el tratamiento?

(b) Se ignora si el producto es dañino para las plantaciones aledañas. Por ello, y asegurando la desaparición de los tres tipos de hongos, es conveniente emplear el tratamiento durante la menor cantidad de años posible. ¿Cuál es el periodo mínimo de años que han de transcurrir para tener la certeza de la erradicación total de las tres especies?