Algebra Lineal. Curso 99-00

Tema 8: ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS.

- Introducción a las formas bilineales.
- Producto escalar. Espacios euclídeos, normas, distancia y ángulos.
- Ortogonalidad. Bases ortonormales. Gram-Schmidt.
- Proyecciones ortogonales.
- Aplicaciones entre espacios euclídeos. Teorema espectral.

$\boxed{8.1}$ **Feb. 99** Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], < \cdot, \cdot >)$, donde $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos y su producto escalar viene dado por:

$$< p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)\, dx.$$

Se sabe que una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], < \cdot, \cdot >)$ es

$$\mathcal{B} = \{1 \ , \ 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) \ , \ 6\sqrt{5}(x^2 - x + \frac{1}{6})\}.$$

Sean $T, S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dos aplicaciones lineales dadas por

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Si denotamos por $d(p, q)$ la distancia existente entre los polinomios p y q y por $(\widehat{p, q})$ el ángulo que forman dichos polinomios,

a) calcular $d(1, x)$ $\cos(\widehat{1, x})$, $d\big(T(1), T(x)\big)$, $\cos\big(\widehat{T(1), T(x)}\big)$,

b) calcular $d\big(S(1), S(x)\big)$, $\cos\big(\widehat{S(1), S(x)}\big)$.

$\boxed{8.2}$ **Mayo. 99.-** Sea $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que F es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

b) Sea W el subespacio generado por el vector $(1, 0, 1)$. Hallar una base ortonormal del subespacio $W^\perp$, el subespacio ortogonal de W.

c) Calcular la proyección ortogonal del vector $(1, 0, 1)$ sobre $W^\perp$.

$\boxed{8.3}$ **Jun. 99.-** Sean $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \setminus p(1) = 0\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}_3[x]$ y $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal definida por

$$T(p(x)) = (1 - x)p'(x) + p(x) \qquad (p \in \mathbb{R}_3[x])$$

a) Prueba que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ y da una base de W.

b) demuestra que para cada $p \in W$ se tiene que $T(p(x)) \in W$ (es decir, W es invariante por T).

Consideramos ahora la aplicación lineal $S : W \longrightarrow W$ tal que $S(q) = T(q) \quad \forall q \in W$ (esto es, S es la restricción de T a W).

c) Obtén la matriz de S respecto de la base de W calculada en el primer apartado de este problema d) Determinar una base del núcleo de S y otra de la imagen de S.

$\boxed{8.4}$ **Sep. 99.-** Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ viene dado por:

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Sea F el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\vec{v}_1 = (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\vec{v}_2 = (1,1,0)$.

a) (3 puntos) Halla una base de $F^\perp$, el subespacio ortogonal de F.

b) (7 puntos) Construye una aplicación lineal autoadjunta $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente

i) $T(\vec{v}_1) = \vec{u}$, donde $\vec{u} \in F$, es ortogonal a $\vec{v}_1$ y $\|\vec{u}\| = 1$.

ii) $F^\perp$ es el autoespacio de T asociado al autovalor 3.

$\boxed{8.5}$ **Mayo 98.-**Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio generado por $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,0)\}$.

a)Probar que la forma bilineal f define un producto escalar.

b) Obtener una base ortogonal de S respecto del producto escalar f.

c)Hallar la proyección ortogonal, respecto a f, de $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ sobre S.

d)Hallar la distancia del vector $\overrightarrow{v}$ a $\perp S$, cuando se considera el producto escalar f.

$\boxed{8.6}$ **Sep. 98**.- Sea $M_2(R)$ las matrices reales 2×2, con el producto escalar $< A, B >=$ traza(A^tB). Consideramos el subespacio V generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

y el subespacio W generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

i) **(4 puntos)** Dar una base ortonormal de V

ii) **(3 puntos)** Hallar los subespacios $V + W$ y $V \cap W$

iii) **(3 puntos)** Calcular los complementarios ortogonales de V y W

$\boxed{8.7}$ **Mayo 97**.- Consideramos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto escalar usual.

a) Sean W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y

$$\begin{array}{rccc} p_W & : \mathbb{R}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}_n \\ & \overrightarrow{v} & \longmapsto & p_w(\overrightarrow{v}). \end{array}$$

la aplicación lineal que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^n$ su proyección ortogonal sobre W.

a.1) Comprobar que $p_w \circ p_w \equiv p_W$.

a.2) Establecer que p_W es una aplicación autoadjunta.

b) Sea ahora $f : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ una aplicación lineal tal que satisface:

b.1) $f \circ f \equiv f$.

b.2) f es una aplicación autoadjunta.

Probar que f es la proyección ortogonal sobre cierto subespacio U de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{8.8}$ **Mayo 96**.- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales 2×2, se considera la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} < \cdot, \cdot > \quad : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \quad < A, B >= \text{traza}(A^t \cdot B). \end{aligned}$$

i) Comprobar que la aplicación anterior define un producto escalar en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ii) Obtener una base ortonormal del subespacio $\mathcal{S}$ formado por las matrices simétricas reales 2×2.

iii) Calcular la distancia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ al subespacio $\mathcal{S}$.

$\boxed{8.9}$ **Jun. 96** Sea el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$. Se consideran las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$< f(x), y >= - < x, f(y) > \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Se pide:

1) **(6 puntos)** Comprobar que tales funciones son aplicaciones lineales y que sus matrices respecto a una base ortonormal son antisimétricas.

2) **(4 puntos)** Demostrar que

$$\ker f = (\operatorname{Im} f)^{\perp} \quad \text{y}$$
$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \bigoplus \ker f \ .$$

$\boxed{8.10}$ **Feb 95.-** Consideramos $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Diremos que una aplicación lineal T , $T(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) :\longrightarrow (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es antisimétrica si $T^* = -T$ siendo T^* la aplicación adjunta de T. Sea T una aplicación antisimétrica.

1.- Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Compruebe que su matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ es una matriz antisimétrica ($A \in \mathcal{M}_n$ se dice antisimétrica si $A = -A^t$).
2.- Demuéstrese que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de T entonces $\lambda = 0$.
3.- Demuéstrese que si T es antisimétrica entonces $T^2 \equiv T \circ T$ es autoadjunto (simétrico).
4.- Demuéstrese que si $z \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio característico de T (es decir, $P_T(z) = 0$), entonces la parte real de z es nula.
5.- Demuéstrese que si A es una matriz antisimétrica, entonces $|A| \geq 0$

$\boxed{8.11}$ **Sep. 95**.- Dados el vector $v = (1, 1, 1)$ y el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$. Determinar una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) $T^3 = I$ $\quad$ (I es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^3$).
(ii) $T \neq I$.
(iii) $T(v) = v, \ T(W) \subset W$.
(iv) T es ortogonal.

Indicación: Puede ser útil establecer que $T(W) = W$ y considerar la restricción de T a W.

$\boxed{8.12}$ **Sep 95.-**.- Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, $n > 1$. Sean S y T endomorfismos de V. Demostrar si son ciertas o no cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) El polinomio característico del endomorfismo $S + T$ no coincide con la suma de los polinomios característicos de S y T.

(ii) El polinomio característico del endomorfismo $\alpha \cdot T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, coincide con el polinomio característico de T multiplicado por α^n.

(iii) El polinomio característico del endomorfismo $S \circ T$ no coincide con el producto de los polinomios característicos de S y T.

(iv) Si T es un endomorfismo autoadjunto entonces sus polinomios mínimo y ca- racterístico coinciden.

(v) Sean λ_1 y λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) los autovalores del endomorfismo T tales que

$$\dim \ker(T - \lambda_1 I)^{k_1 - 1} = d_1 - 1 \quad \text{y} \quad \dim \ker(T - \lambda_2 I)^{k_2} = d_2 \ ,$$

con $d_1 + d_2 = n$, entonces el polinomio mínimo de T viene dado por

$$pm_T = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ .$$

$\boxed{8.13}$ **Feb.94-** En el subespacio $E = L\{1, sen\ x, cos\ x\}$ de $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ se define el siguiente producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx, \quad \forall f, g \in E.$$

a) Calcúlese una base ortonormal de E con respecto a ese producto escalar.

b) Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} D_k : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & f^{k)} \end{array},$$

siendo $f^{k)}$ la derivada $k-$ésima de la función f. Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{N}$ para los que D_k es autoadjunta.