

E.T.S.I. de Montes. Unidad Docente de Matemáticas
PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 1997/98
Hoja 12. Espacios Euclideos

Problema 1.- (Feb. 97) Consideremos el espacio euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual. Sea el subespacio $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 0)$. Calcular:

- a) una base ortogonal de $W^\perp$, el subespacio ortogonal de W .
- b) la distancia del vector $v = (2, 2, -1, 1)$ al subespacio W .

Problema 2.- (Jun. 96) Sea el espacio euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Se consideran las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\langle f(x), y \rangle = - \langle x, f(y) \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Se pide:

- 1) Comprobar que tales funciones son aplicaciones lineales y que sus matrices respecto de una base ortonormal son antisimétricas.
- 2) Demostrar que

$$\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$$

Problema 3.- (May. 96) En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices 2×2 , se considera la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle A, B \rangle &\mapsto \langle A, B \rangle = \operatorname{traza}(A^t \cdot B) \end{aligned}$$

- i) Comprobar que la aplicación anterior define un producto escalar en $M_2(\mathbb{R})$
- ii) Obtener una base ortonormal del subespacio S formado por las matrices simétricas reales 2×2 .
- iii) Calcular la distancia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ al subespacio S .

Problema 4.- (Sep. 95) Dados el vector $v = (1, 1, 1)$ y el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$. Determinar una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

- i) $T^3 = I$
- ii) $T \neq I$
- iii) $T(v) = v, T(W) \subset W$
- iv) T es ortogonal.

INDICACION: Puede ser útil establecer que $T(W) = W$ y considerar la restricción de T a W .

Problema 5.- (May. 95) Consideramos el espacio euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual $\mathbb{R}^4$. Sea T el endomorfismo autoadjunto cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular una base ortonormal en la que la matriz asociada a T sea diagonal.

Problema 6.- (Feb. 95) Consideremos el espacio euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$, el producto escalar usual. Diremos que una aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es antisimétrica si $T^* = -T$, donde T^* es la aplicación adjunta de T . En lo que sigue T siempre representa una aplicación antisimétrica.

- a) Supongamos que B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Compruébese que la matriz asociada a T en la base B es una matriz antisimétrica. ($A \in M_n$ se dice antisimétrica si $A = -A^t$)
- b) Demuéstrese que si λ es un autovalor de T (por tanto, $\lambda \in \mathbb{R}$) entonces $\lambda = 0$
- c) Demuéstrese que $T^2 = T \circ T$ es autoadjunta (simétrica).
- d) Demuéstrese que si $z \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio característico de T , es decir $P_T(z) = 0$, entonces la parte real de z es nula.
- e) Demuéstrese que si A es una matriz antisimétrica, entonces $|A| \geq 0$