E.T.S.I. de Montes. Unidad Docente de Matemáticas
PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 1997/98
Hoja 5. Espacios vectoriales

4.- Dar un ejemplo de un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ tal que:
a) $S + S \subsetneq S$ b) $S \subsetneq S + S$ c) $S + S = S$ pero S no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

5.- Demostrar que los vectores $v = (1+i, 2i)$ y $w = (1, 1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo $\mathbb{C}$pero son linealmente independientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

1.- Sean U y W los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$U = L(\{(1,2,1,0),(0,-1,0,1)\}) \qquad W = L(\{(0,0,1,1),(1,1,2,2)\})$$

Hallar $\dim U$, $\dim W$ y bases de $U + W$, y $U \cap W$, $\dim(U + W)$ y $\dim(U \cap W)$

2.- Sean U y W los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$U = L(\{(1,2,0,1),(2,1,3,1),(2,4,0,2)\})$$

$$W = L(\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1),(2,2,2,2)\})$$

Hallar dimensión y bases de U, W, $U + W$, y $U \cap W$,

3.- Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $u_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Hallar un subconjunto de $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ que sea base de W.

4.- Sean $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + c + d = 0\}$, $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a + b = 0, c = 2d\}$. Hallar una base para U, W, $U \cap W$, $U + W$.

5.- Sea $W = L\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. Hallar un suplementario de W; una base de W y una base de $\mathbb{R}^4$ que prolongue a la de W.

6.- Sea V el espacio vectorial real de las funciones reales definidas en el intervalo $[0,1]$, respecto de las operaciones usuales. Considérense los subespacios U, de las funciones que se anulan en los extremos del intervalo, y W engendrado por las funciones $x \mapsto e^x$ y $x \mapsto e^{-x}$. Obtener $U \cap W$ y $U + W$, expresando una cualquiera de sus funciones como suma de una de U y otra de W.

7.- a) Dado el polinomio $x - x^3$, calcular coeficientes a, b, c, d, tales que $x - x^3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$. b) Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que existen unos únicos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reales de modo que $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x - \alpha)^k$.

8.- Supongamos que F_1 y F_2 son dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V de dimensión finita. Supongamos que $\dim(F_1 \cap F_2) = k \neq 0$. Demostrar que existen B_1 y B_2 bases de F_1 y F_2 respectivamente tal que cada una de ellas contiene k elementos en la intersección.

9.- En $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ llamemos $S_1 = \{x^k : k\text{impar}, 1 \leq k \leq n\}$ y $S_2 = \{x^k : k \text{ par}, \ 0 \leq k \leq n\}$ (supondremos que 0 es par). Describir $L(S_1)$ y $L(S_2)$. Demostrar que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = L(S_1) \oplus L(S_2)$.

10.- Sean $H = L\{(1,1,2),(1,1,0),(3,3,4)\}$ y
$S = L\{(0,1,1),(0,1,2),(0,0,0),(0,0,1)\}$. Hallar bases de H, S, $H + S$ y $H \cap S$.

12.- Dado el sistema lineal $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$. Demostrar que el conjunto F de vectores (b_1, b_2, b_3) que hacen que ese sistema tenga solución es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Demostrar también que el conjunto H de soluciones del sistema igualado a $(0,0,0)$ es también un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y probar que $\dim(F) + \dim(H) = 3$. ¿Es siempre $\mathbb{R}^3 = F + H$?.

Sep-97.- Demostrar que el conjunto W de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 3\lambda & \lambda \\ 3\lambda & \beta & \beta \end{pmatrix} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \in\ \mathbb{R})$$

Es un subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Calcular un subespacio suplementario de W.

Abr-97.- Sea V el espacio vectorial generado por

$$V = L\{1, x, x^2, \mathrm{sen} x, \cos x\}$$

Y sea $S \subset V$ el subconjunto de V definido por

$$S = \{f \in V / f(0) = f'(0) = f''(0)\}$$

a) Demostrar que S es un subespacio vectorial de V.
b) Hallar un subespacio vectorial suplementario de S en V.