Ejercicio 1.- Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.- Discutir y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas de ecuaciones, en función de los parámetros que aparecen:

$$\begin{array}{c} a) \\ (\textit{Feb. 86}) \end{array} \begin{cases} x_1 & +ax_2 & +ax_3 & +ax_4 & = a \\ ax_1 & +x_2 & +ax_3 & +ax_4 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +x_3 & +ax_4 & = a \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & +x_4 & = a \end{cases} \qquad \begin{array}{c} b) \\ (\textit{Feb. 85}) \end{array} \begin{cases} (1+a)x & +ay & +(1+a)z & = b \\ (-1+a)x & +(-1+a)y & +(-1+a)z & = 0 \\ (2+a)x & +(1+a)y & +(2+a)z & = b \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{c} a) \\ (\textit{Jun. 83}) \end{array} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & x & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & x & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & x & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & x & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} b) \\ (\textit{Feb. 97}) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n-1 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 5 & 4 & 3 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 4 & 3 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4.- a) Sea E una matriz elemental de tamaño $n \times n$ (esto es, el resultado de efectuar una operación elemental a la matriz identidad $n \times n$). Sea A una matriz cualquiera de tamaño $n \times n$. Probar que $\det(EA) = \det(E)\det(A)$.

b) Deducir de lo anterior que si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Problema 5.- (*Jun. 92*) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Definamos dos aplicaciones lineales $\Phi_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\Psi_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ por $\Phi_A(X) = A \cdot X$ y $\Psi_A(X) = X \cdot A$, para toda $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calcular las matrices asociadas a Φ_A y Ψ_A respecto a la base $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

b) Calcular los determinantes de las matrices halladas en el apartado anterior. ¿Qué relación tienen con el determinante de A?

c) Sea ahora $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Encontrar una condición necesaria y suficiente (dada sobre A) para que la ecuación matricial $A \cdot X = B$ tenga solución única, siendo $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

d) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Encontrar una condición necesaria y suficiente (sobre A) para que la ecuación $A \cdot X = \lambda X$ (o $X \cdot A = \lambda X$) tenga solución no nula, siendo $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

e) Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que cumplen que $A \cdot X = X \cdot A$, para cada $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.