E.T.S.I. de Montes. Unidad Docente de Matemáticas
PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 1997/98
Hoja 12. Espacios Euclideos

Problema 1.- (*Feb. 97*) Consideremos el espacio euclideo $(\mathbb{R}^4, < \cdot, \cdot >)$, donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto escalar ususal. Sea el subespacio $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 0)$. Calcular:
a) una base ortogonal de $W^\perp$, el subespacio ortogonal de W.
b) la distancia del vector $v = (2, 2, -1, 1)$ al subespacio W.

Problema 2.- (*Jun. 96*) Sea el espacio euclideo $(\mathbb{R}^4, < \cdot, \cdot >)$. Se consideran las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$< f(x), y >= - < x, f(y) >, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Se pide:
1)Comprobar que tales funciones son aplicaciones lineales y que sus matrices respecto de una base ortonormal son antisimétricas.
2)Demostrar que

$$\ker f = (\mathrm{Im} f)^\perp \ \text{ y } \ \mathbb{R}^n = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$$

Problema 3.- (*May. 96*) En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices 2×2, se considera la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} < \cdot, \cdot >: & M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & < A, B > & \mapsto & < A, B >= traza(A^t \cdot B) \end{array}$$

i) Comprobar que la aplicación anterior define un producto escalar en $M_2(\mathbb{R})$
ii) Obtener una base ortonormal del subespacio S formado por las matrices simétricas reales 2×2.
iii) Calcular la distancia de la matriz $\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}$ al subespacio S.

Problema 4.- (*Sep. 95*) Dados el vector $v = (1, 1, 1)$ y el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$. Determinar una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
i)$T^3 = I$
ii)$T \neq I$
iii) $T(v) = v, \ T(W) \subset W$
iv) T es ortogonal.
INDICACION: Puede ser útil establecer que $T(W) = W$ y considerar la restricción de T a W.

Problema 5.- (*May. 95*) Consideramos el espacio euclideo $(\mathbb{R}^4, <, >)$, donde $<, >$ es el producto escalar usual $\mathbb{R}^4$. Sea T el endomorfismo autoadjunto cuya matriz asociadad en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular una base ortonormal en la que la matriz asociada a T sea diagonal.

Problema 6.- (*Feb. 95*) Consideremos el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$, siendo $< \cdot, \cdot >)$, el producto escalar usual. Diremos que una aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >) :\to (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$ es antisimétrica si $T^* = -T$, donde T^* es la aplicación adjunta de T. En lo que sigue T siempre representa una palicación antisimétrica.
a) Supongamos que B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Compruebese que la matriz asociada a T en la base B es una matriz antisimétrica. ($A \in M_n$ se dice antisimétrica si $A = -A^t$)
b) Demuéstrese que si λ es una autovalor de T (por tanto , $\lambda \in \mathbb{R}$) entonces $\lambda = 0$
c) Demuéstrese que $T^2 = T \circ T$ es autoadjunta (simétrica).
d) Demuéstrese que si $z \in \mathbb{C}$ es raiz del polinomio característico de T, es decir $P_T(z) = 0$, entonces la parte real de z es nula.
e) Demuéstrese que si A es una matriz antisimétrica, entonces $|A| \geq 0$