SOLUCIÓN DE LA HOJA DE PROBLEMAS 9.

$\boxed{9.1}$ **Sep. 00**

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&5&0&0\\3&0&0&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-6&0\\3&0&0&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-6&0\\3&-6&0&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-3F_1}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-6&0\\0&-6&-9&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3-3C_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-6&0\\0&-6&-9&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+6F_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-6&0\\0&0&-45&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+6C_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-45&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_4-2/45F_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-45&2\\0&0&0&+319/45\end{pmatrix}\xrightarrow{C_4+2/45C_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-45&0\\0&0&0&+319/45\end{pmatrix}$$

Así pues tenemos
I.P=3, I.Neg.=1, I.Nul=0,
Otra forma de hacerlo es haciendo sólo las operaciones por filas, es decir:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&5&0&0\\3&0&0&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-6&0\\3&0&0&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-3F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-6&0\\0&-6&-9&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+6F_2}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-6&0\\0&0&-45&2\\0&0&2&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4-2/45F_3}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-6&0\\0&0&-45&2\\0&0&0&+319/45\end{pmatrix}$$

Observar que:

$$P^t=(M_{B,B_c})^t=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-15&6&1&0\\-2/3&4/15&-2/45&1\end{pmatrix}$$

donde $P^t.A.P=D$.

También podemos resolver el problema completando cuadrados:

$$\mathcal{Q}(x,y,z,t)=x^2+5y^2+7t^2+4xy+6xz+4zt=(x+2y+3z)^2+y^2-9z^2+7t^2-12yz+4zt=$$
$$(x+2y+3z)^2+(y-6z)^2-45z^2+7t^2+4zt=$$
$$(x+2y+3z)^2+(y-6z)^2-45(z-2/45t)^2+311/45t^2$$

$\boxed{9.2}$ **Feb. 00**

- **(3 puntos)** Como A es simétrica podemos suponer que es la matriz de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en base canónica, $A = M_{B_c}(f)$. Entonces sabemos que existe una base ortonormal B' tal que $D = M_{B'}(f)$. Así pues tenemos $A = P^{-1}.D.P$, con $P = C_{B_c,B'}$ y donde D es una matriz diagonal con $0 < \lambda_i < 1$. Además se tiene que $P^{-1} = P^t$. Entonces la matriz de la forma cuadrática, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es $A^2 - A = P^{-1}(D^2 - D)P$ y por lo tanto sus autovalores son ${\lambda_i}^2 - \lambda < 0$ y la forma cuadrática es definida negativa.
- **(4 puntos)**

$$\langle x, Ax\rangle = Q(x) = \langle x', Dx'\rangle = \lambda_1.x_1^2 + \lambda_2.x_2^2 + \cdots + \lambda_n.x_n^2 \leq$$

$$\max\{\sigma(A)\}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \max\{\sigma(A)\}\|x\| \overbrace{=}^{\|x\|=1} \max\{\sigma(A)\}$$

$$\langle x, Ax\rangle = Q(x) = \langle x', Dx'\rangle = \lambda_1.x_1^2 + \lambda_2.x_2^2 + \cdots + \lambda_n.x_n^2 \geq$$

$$\min\{\sigma(A)\}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \min\{\sigma(A)\}\|x\| \overbrace{=}^{\|x\|=1} \min\{\sigma(A)\}$$

como el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es un conjunto acotado entonces $\{\langle x, Ax\rangle : \|x\| = 1\}$ alcanza el máximo y el mínimo.
- **(3 puntos)**

$$\min\{\sigma(A)\} \cdot \|x\|^2 \leq Q_1(X) = X^t \cdot A \cdot X \leq \max\{\sigma(A)\} \cdot \|x\|^2$$

y

$$\min\{\sigma(B)\} \cdot \|x\|^2 \leq Q_2(X) = X^t \cdot B \cdot X \leq \max\{\sigma(B)\} \cdot \|x\|^2.$$

Así que

$$(\min\{\sigma(A)\} - \max\{\sigma(B)\}) \cdot \|x\|^2 \leq Q_1(X) - Q_2(X) \leq \max\{\sigma(A)\} - \min\{\sigma(B)\}\|x\|^2$$

y por lo tanto $Q(X) = Q_1(X) - Q_2(X)$ es definida positiva.

$\boxed{9.3}$ **Jun 99.-**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2+\alpha \\ 1 & -2 & 2+\alpha & 2+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1,\ F_3-F_1,\ F_4-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1+\alpha \\ 0 & -1 & 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2,\ F_4+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-\alpha F_3,} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-(\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

- Si $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ entonces se tiene que I.P=3, I.Neg.=1, I.Nul=0
- Si $\alpha \in (0, 1)$ entonces se tiene que I.P=4, I.Neg.=0, I.Nul=0
- Si $\alpha = 0, 1$ entonces se tiene que I.P=3, I.Neg.=0, I.Nul=1

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{9.4}$ **Jun 98.-**

- Si $a = 0$.

$$\mathcal{Q}(x,y,z) = -2xy + 2yz = (y-x+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xz = (y-x+z)^2 - (x-z)^2 - y^2$$

entonces se tiene que I.P=1, I.Neg.=2, I.Nul=0

- Si $a \neq 0$

$$\mathcal{Q}(x,y,z) = ax^2 - 2xy + ay^2 + 2yz + az^2 =$$
$$a(x-1/ay)^2 - 1/ay^2 + ay^2 + 2yz + az^2 =$$
$$a(x-1/ay)^2 + a(x-1/az)^2 - 2/ay^2 + ay^2 =$$
$$a(x-1/ay)^2 + a(x-1/az)^2 + \frac{a^2-2}{a}y^2$$

  - Si $a \in (-\infty, -\sqrt{2})$ entonces se tiene que I.P=1, I.Neg.=2, I.Nul=0
  - Si $a \in (-\sqrt{2}, 0)$ entonces se tiene que I.P=0, I.Neg.=3, I.Nul=0
  - Si $a \in (0, \sqrt{2})$ entonces se tiene que I.P=2, I.Neg.=1, I.Nul=0
  - Si $a \in (\sqrt{2}, \infty)$ entonces se tiene que I.P=3, I.Neg.=0, I.Nul=0
  - Si $a = -\sqrt{2}$ entonces se tiene que I.P=0, I.Neg.=2, I.Nul=1
  - Si $a = \sqrt{2}$ entonces se tiene que I.P=2, I.Neg.=0, I.Nul=1

$\boxed{9.5}$ **May 98.-**

i) Falso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) Falso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) $Q(X) = X^t A^t A X = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$

iv) $0 = Q(X) = \|AX\|^2$ si y solo si $AX = 0$ y si A es de rango máximo entonces $Q(X) = 0$ solo para $X = 0$. Así que $Q(X) > 0$ para todo $X \in E$ y por lo tanto es definida positiva.

v) Si $Q(X) = \|Ax\|^2 > 0$ entonces $AX > 0$ para todo $X \in E$ de este modo llegamos a que A es de rango máximo.

$\boxed{9.6}$ **Sep 98.-** Sean $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal, cuyas matrices respecto de una base B coinciden, es decir, . Definamos $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 0\}$.

i) **(6 puntos)**Como $A = M_B(Q) = M_B(T)$, sabemos que existe una base B' ortonormal tal que $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$, con D diagonal. Dado que Q es semidefinida, entonces $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = \{1, \ldots, n\}$. Supongamos

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & o \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es decir $\ker T = H = L(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

ii) **(4 puntos)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{9.7}$ **Mayo 97.-**

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma & \alpha \\ 1 & \gamma & \beta+1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+\gamma F_1,\ F_3-F_1,} \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_4,} \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-C_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-\gamma C_1, C_3-C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = \beta = 0$ entonces se tiene que I.P=1, I.Neg.=0, I.Nul=3
- $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ entonces se tiene que

$$\begin{cases} \text{I.P} = 2,\ \text{I.Neg.} = 0, \text{I.Nul} = 2 & \text{si } \beta > 0, \\ \text{I.P} = 1, \text{I.Neg.} = 1, \text{I.Nul} = 2 & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

- $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$ entonces se tiene que
  I.P=2, I.Neg.=1, I.Nul=1
- $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ entonces se tiene que

$$\begin{cases} I.P = 3, I.Neg. = 1, I.Nul = 0 & \text{si } \beta > 0, \\ I.P = 2, I.Neg. = 2, I.Nul = 0 & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

$\boxed{9.8}$ **Feb 96.-**

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1+2C_2} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1,\ F_3-2/3F_1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-1/3F_2} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-2/45F_3}$$

Así pues tenemos que I.P=1, I.Neg.=1, I.Nul=1

$\boxed{9.9}$ **Mayo 96.-** $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+1/2F_2,\ F_3+1/2F_4} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1+1/2C_2,\mathbb{C}_3+1/2C_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2-F_1,\ F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Así pues tenemos que I.P=2, I.Neg.=2, I.Nul=0 $\alpha \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+1/2F_4} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3+1/2C_4} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-1/\alpha F_1,\ F_4-F_3}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Así pues tenemos que
I.P=2, I.Neg.=2, I.Nul=0