## PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL.

**Tema 0:** Introducción.

**1.-** Hallar la ecuación de las rectas $r$ y $s$ paralelas a las bisectrices del primer y tercer cuadrante y del segundo y cuarto cuadrante respectivamente, y que pasan por el punto $(-3,4)$.

**2.-** Probar que si dos rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$ son perpendiculares entonces $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

**3.-** Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en el plano:

$$\begin{array}{ccccc} y+x=0 & y-x=3 & y-x=0 & y-x=5 & 2y+2x=15 \\ y-x=12 & 2y+2x=1 & 2y+2x=3 & 2y+2x=5 & y-x=13 \\ 2y+2x=7 & 3y-3x=\pi & 2y+2x=9 & y-x=10 & 3y-3x=2\pi \\ y-x=6 & y-x=4 & 2y+2x=13 & x+y=-2 & -x-y=1 \end{array}$$

$$y+x=r \text{ , donde } r=1,....,18$$

$$3x-3y=\sup\{\frac{n}{n+1}:n\in\mathbb{N}\}+\sup\{\frac{n+1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$$

$$8x+8y=1-\inf\{\frac{n+1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$$

$$9x-9y=9\inf\{\frac{n+1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$$

**4.-** En el plano se consideran los puntos $P(2,0)$ y $Q(-3,-3)$.

a) Obténgase la longitud de los lados y los otros dos vértices del cuadrado que tiene a $P$ y $Q$ por vértices opuestos.

b) Obténgase la longitud de los lados y los otros dos vértices de cada cuadrado que tenga un lado definido por los vértices $P$ y $Q$.

**5.-** Consideremos, en el plano, la ecuación:

$$2\alpha x + y\alpha^2 = 0, \quad \alpha\in\mathbb{R} \tag{1}$$

a) ¿Para qué valores de $\alpha$ la ecuación (1) determina una recta?

b) Probar que por cada punto del plano pasan a lo sumo dos rectas de la familia (1).

**6.-** Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales la suma de las distancias a las rectas $x+y=1$ y $x+y=2$ es igual a $b$, en los casos: i) $b=5$ ii) $b=1/\sqrt{2}$ iii) $b=1/5$.

**7.-** a) Determinar la ecuación del plano $\pi_1$ que contiene al punto $P(0,1,-3)$ y a la recta

$$\rho \equiv \begin{cases} x = & 1+\lambda \\ y = & 2-\lambda \\ z = & 3+2\lambda \end{cases}$$

b) Obtener la ecuación del plano $\pi_2$ que pasa por $P$, es paralelo a $\rho$ y es perpendicular a $\pi' \equiv x + y - 3z + 2 = 0$.

**9.-** Sea $\phi$ el plano que pasa por el punto $(2, 2, 1)$ y es paralelo al plano de ecuación $x - y + 3z = 1$. Sea $r$ la recta que pasa por el punto $(-1, 2, -2)$ y se cruza ortogonalmente con las rectas

$$\rho \equiv \begin{cases} x = & 5 + \lambda \\ y = & 7 - \lambda \\ z = & 13 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = & 0 \\ y = & 7 - \lambda \\ z = & 13 - \lambda \end{cases}$$

contenida en el plano $2x - 3y + 6z + 7 = 0$ y que corta a la recta $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{7}$.

**14.-** Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

que pasan por $(1, 0)$.

**15.-** Dada la circunferencia $C \equiv \left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 10/3 \\ x + y + z = 3 \end{matrix} \right\}$.

a) Determinar el centro y el radio de $C$.

b) Hallar la ecuación (o las ecuaciones) cartesiana de la esfera (esferas) $E$ de radio 1 tal que su intersección con el plano $\pi \equiv x + y + z = 3$ es $C$.

**16.-** Hallar la ecuación de la esfera (o de las esferas) que tiene el centro en la recta $r \equiv \left\{ \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{matrix} \right\}$, y es tangente a los planos $2x - y - 2z = -11$ y $2x - y - 2z = 7$.

**17.-** Un segmento de longitud $l$ se mueve en el plano de forma que uno de sus extremos esté siempre sobre un eje coordenado y el otro extremo sobre el otro eje. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto medio del segmento?.

**18.-** Hallar la ecuación cartesiana del plano simétrico del plano $2x - y + z = 1$ respecto de la recta

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

**19.-** Considera la familia uniparamétrica de curvas:

$$4xp + y^2 + 4p^2 + 2x + 4y + 4 = 0, p \in \mathbb{R}.$$

Calcular la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano por los que pasa una $y$ sólo una curva de la familia anterior.