PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. Curso 00-01

Tema 5: PROGRAMACIÓN LINEAL. 1^{o}D

• El problema de la programación lineal.
• Solución geométrica.
• Análisis convexo: Conjuntos convexos. Puntos extremos y optimalidad.
• Método del Simplex: Soluciones básicas factibles. Mejoramiento de una solución básica factible y optimalidad. Algoritmo Simplex en formato de tabla .

$\boxed{5.1}$ **Jun 81.-** En el proceso de fabricación de una empresa se producen semanalmente $43, 46$ y 52 Tm de unas sustancias S_1, S_2, S_3 que no pueden venderse directamente al mercado, pero permiten obtener unos productos P_1, P_2, P_3 que reportan beneficios unitarios de $3, 5, 2$ miles de pts. respectivamente. Para cada Tm de de P_1 se necesitan $1, 3$ y 5 Tm de S_1, S_2, S_3; análogamente $1, 2, 0$ Tm de P_2 y $2, 0, 4$ Tm de P_3. Se pide

- a) Plantear y resolver un programa lineal para organizar P_1, P_2, P_3 de forma que se maximicen los beneficios
- b) Para evitar la contaminación existen disposiciones legales que obligan a consumir cada semana la totalidad de la sustancia S_3 producida. Calcular la pérdida de beneficios que el cumplimiento de dichas disposiciones supone para la empresa.

$\boxed{5.2}$ **Jun 82.-** Una fabrica produce automóviles y camiones. Comprende tres talleres que trabajan simultáneamente en ambos tipos de vehículos, en las siguientes condiciones:

- I) Motores: un motor de auto o de camión requiere una hora de trabajo.
- II) Carrocería: una carrocería de auto requiere $1/2$ hora de trabajo y una de camión 2 horas.
- III) Montaje: un montaje de auto requiere $4/5$ hora de trabajo y una de camión $8/5$ horas.

cada uno de los talleres trabaja como máximo 200 horas al mes. El beneficio por auto es de 120.000 pts y por camión de 150.000 pts. Se desea planificar la producción de autos y camiones de modo de maximizar los beneficios mensuales.

$\boxed{5.3}$ **Jun 83.-** Maximizar la función $f(x, y, z) = -x + 3y - 2z$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rrrrr} 3x- & y+ & 2z & \leq & 7 \\ -2x+ & 4y+ & & \leq & 12 \\ -4x+ & 3y+ & 8z & \leq & 10 \\ x, & y, & z & \geq & 0 \end{array}$$

$\boxed{5.4}$ **Jun 84.-** Maximizar la función $z = ax - by$ con $(0 < a < b)$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rrrr} x- & y & \leq & 2 \\ -x+ & y & \leq & 2 \\ x \leq & 3 & & \\ y \leq & 3 & & \\ x, & y & \geq & 0 \end{array}$$

Comprobar el resultado obtenido mediante la resolución gráfica.

$\boxed{5.5}$ **Jun 85.-** Minimizar la función $z = 2x + 3y + 1$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & \geq & 5 \\ 3x+ & 2y & \leq & 16 \\ 3x+ & y & \geq & 3 \\ x- & y & \leq & 2 \\ 3x- & y & \geq & 1 \\ x, & y & \geq & 0 \end{array}$$

$\boxed{5.6}$ **Jun 87.-** Maximizar la función $f(x,y,z,t) = -x - 6y + 3z + t$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rrrrl} x- & 2y+ & z+ & 3t \leq & 8 \\ 2x+ & 3y- & z+ & 2t \leq & 5 \\ x+ & y- & 3z+ & 4t \leq & 6 \\ x, & y, & z, & t \geq & 0 \end{array}$$

$\boxed{5.7}$ **Feb 89.-** Maximizar la función $z(x,y) = 2x + y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rrr} x- & 2y \leq & 1 \\ 2x+ & y \leq & 20 \\ x+ & 3y \leq & 30 \\ -x+ & y \leq & 5 \\ x, & y \geq & 0 \end{array}$$

(1) Representar gráficamente el conjunto de las soluciones factibles.
(2) Encontrar la(s) solución(s) óptima(s).
(3) Determinar el valor máximo pedido.

$\boxed{5.8}$ **Feb 90.-** Encontrar un polinomio $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de coeficientes reales no negativos que maximize $\int_0^1 x^2 p(1/x)dx$ cumpliendo además que $p(1) \leq 2,\ p'(1) \leq 3$.

$\boxed{5.9}$ **Sep 90.-** Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = 3x + y$, donde (x,y)

$\boxed{5.10}$ **Jun 91.-** Todo punto P del plano cartesiano define, junto con el origen y sus proyecciones sobre los ejes X e Y, un rectángulo de perímetro máximo, entre los definidos del modo indicado, y con el punto P moviéndose en la región

$$\begin{array}{rrrl} 2x+ & 5y- & 26 \leq & 0 \\ -x+ & y- & 8 \geq & 0 \\ x+ & y \geq & 2 & \\ -3x+ & y+ & 5 \geq & 0 \end{array}$$

$\boxed{5.11}$ **Feb 92.-** Los puntos $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), D(1,1,2)$ definen en el espacio $\mathbb{R}^3$ un tetraedro. Hallar los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que, estando situados en el interior o en las caras del tetraedro, minimizan la función $F(x,y,z) =$ " Suma de las distancias del punto (x,y,z) a cada una de las caras del tetraedro $ABCD$".

$\boxed{5.12}$ **Feb 93.-** Maximizar y minimizar (razonadamente) la función $z(x,y) = x + y$ dentro de la región delimitada por los semiplanos:

$$\begin{array}{rrl} x+ & y \geq & 4 \\ x+ & 4 \geq & y \\ 10- & x \geq & y \\ x \leq & 2y+ & 4 \end{array}$$

para $x \geq 0,\ y \geq 0$.

$\boxed{5.13}$ **Feb 94.-** Encontrar un polinomio $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que maximiza $\int_0^1 p(x)dx$ cumpliendo además que $p(0) = 0,\ p'(0) \geq 0,\ p''(0) \geq 0, p'(0) + \frac{p''(0)}{2} \leq 1$.

$\boxed{5.14}$ **Feb 98.-** Una empresa dedicada a la apicultura ha recogido 1200 kg de miel de roble, 2400 kg de miel de romero y 1000 kg de miel de jara. Dicha empresa pretende comercializar tres mezclas A, B y C de estas mieles puras. La composición de un kilogramo de cada mezcla viene dado por la siguiente tabla:

	miel de roble	miel de romero	miel de jara
mezcla A	200g	600g	200g
mezcla B	300g	300g	400g
mezcla C	200g	800g	

Los beneficios netos por kilogramo vendido de cada una de las mezclas son de 0.6 euros para la mezcla A, 0.5 euros para la mezcla B y 0.4 euros para la mezcla C. ¿Cuánto se debe comercializar de cada una de las mezclas para que el beneficio sea máximo?

$\boxed{5.15}$ **Sep 98.-**.- Determinar el

$$\max I(p) = \max \int_0^1 p(x)\,dx, \text{ con } p \in P.$$

donde $P = \{p \in \mathbb{R}_2^+[x] \setminus p'(1) \leq 1, p(2) \leq 1\}$ y $\mathbb{R}_2^+[x]$ representa el conjunto de polinomios de coeficientes reales no negativos de grado menor o igual que 2 en x. Dar el polinomio p_0 para el que se alcanza dicho máximo.

$\boxed{5.16}$ **Feb 99.-** Se pretende minimizar los costes de distribución de agua a una cierta ciudad, a la que pueden suministrar tres embalses E_1, E_2 y E_3, situados a distancias $d_1 = 100\,km$, $d_2 = 80\,km$ y $d_3 = 50\,km$, respectivamente. Se sabe que el máximo aporte diario de cada uno de estos embalses está limitado a 90 hectómetros cúbicos por día (Hm^3/día), 60 Hm^3/día y 110 Hm^3/día, respectivamente. Debido al valor ecológico del humedal creado en torno al embalse E_3, su aporte diario está limitado por el aporte del embalse E_1. Sabiendo que el coste unitario medio del transporte de un Hm^3/día por kilómetro es 0.5 euros, y que, debido al consumo medio por día de la ciudad, la cantidad diaria de agua que ha de ser suministrada es de 100 Hm^3/día, calcular el aporte diario de cada embalse que minimiza los costos de distribución. Dar este valor mínimo.

$\boxed{5.17}$ **Feb 99.-** Sea H el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 co coeficientes reales tales que $p(0) \geq 0,\ p'(0) \geq 0,\ p''(0) \geq 0,\ p'''(0) \geq 0$ y $p(1) \leq 1,\ p'(1) \leq 1,\ p''(1) \leq 2$. ¿Para que polinomios $p \in H$ la integral $\int_0^2 p(x)dx$ alcanza su máximo valor?¿Cuál es ese valor máximo?

$\boxed{5.18}$ **Sep 99.-** Una empresa de fertilizantes tiene 1000 Tm de nitratos, 1800 Tm de fosfatos y 1500 Tm de potasa. Dicha empresa quiere comercializar tres tipos de fertilizantes: Normal, Super y SuperPlus. Estos fertilizantes están compuestos por nitratos, fosfatos y potasa en los porcentajes que figuran en la tabla siguiente. También incluimos el precio final de venta (por Tm) de cada mezcla así como el precio de coste (por Tm) de sus componentes :

	nitrato	fosfato	potasa	precio / Tm
Normal	20%	60%	20%	48 euros
Super	20%	40%	40%	59 euros
SuperPlus	25%	25%	50%	70 euros
coste / Tm	15 euros	5 euros	10 euros	

Recordando que el beneficio es la diferencia entre la cantidad obtenida por las ventas y los gastos de producción, calcula la cantidad de cada fertilizante que se ha de preparar para que los beneficios sean máximos.

$\boxed{5.19}$ **Feb 00.-** De una explotación minera extraemos 500 Kg de As, 200 Kg de Al y 200 Kg de Ga en un mes, con los que vamos a formar las siguientes dos aleaciones:

- GaAs en una proporción de $3/5$ de As y $2/5$ de Ga.
- AlAs en una proporción de $2/3$ de As y $1/3$ de Al.

Sabiendo que obtenemos beneficios de 1000 euros por cada Kg de GaAs y de 800 por cada una de AlAs ¿Cuántos Kg de cada aleación tendremos que producir en un mes para que el beneficio sea máximo?

$\boxed{5.20}$ **Sep 00.-** Una empresa de carburantes va a lanzar al mercado tres nuevos tipos de combustibles: regular, extra e hiper obtenidos tras mezclar gasóleo con diferentes aceites vegetales según los siguientes porcentajes

	gasóleo	colza	soja	girasol	beneficio
Regular	30%	30%	30%	10 %	400
Extra	60%	10%	20%	10 %	500
Hiper	90%	5%	5%		600

sabiendo que la empresa tiene gasóleo, aceite de colza y aceite de soja, de los que dispone $10.000 Hl$ de cada uno de ellos, y $1000 Hl$ de aceite de girasol, y que el beneficio neto en euros por Hl de cada combustible viene dado en la última columna de la tabla ¿Cuánto se debe comercializar de cada combustible para que el beneficio sea máximo?¿Cuál es ese beneficio máximo?