UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de geometría y Topología

TOPOLOGÍA SEMIFINITA SUPERIOR EN HIPERESPACIOS: DESDE LA TOPOLOGÍA NO HAUSDORFF A LA GEOMETRÍA DE LOS MÉTRICOS COMPACTOS

Antonia González Gómez

Contenidos

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer en primer lugar al director de esta tesis, profesor Manuel Alonso Morón, su ayuda, esfuerzo y guía a lo largo de todos estos años.

Agradezco también al departamento de Geometría y Topología de la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, el haberme ofrecido la oportunidad de realizar mi tesis doctoral.

No olvido tampoco a mis amigos del departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales de E.T.S.I. de Montes, por su aliento y docta experiencia; en particular me gustaría dar las gracias al profesor Fernando Blasco Contreras por el tiempo que me ha dedicado para resolver las dudas que han ido apareciendo en la edición de esta tesis.

Lo que para mi han sido muchos años de trabajo arañando ratos de aquí y allá para acabar el presente trabajo, para mi familia ha sido un tiempo privado a ellos. Tanta alegría como es para ellos ver terminada esta tesis, es para mí satisfacción expresarles ahora mi agradecimiento y cariño.

Quiero acordarme también de Marcelino que no está, pero siempre estuvo curioso y orgulloso por el desarrollo de este trabajo.

Gracias en fin todos aquellos, que a su manera, han hecho posible este trabajo.

INTRODUCCIÓN

Como el título de esta memoria refleja, este trabajo está esencialmente dedicado al estudio de los hiperespacios con la *topología semifinita superior*, ver el artículo de E. Michael [Mi.1] como una de las referencias clásicas para su definición.

Nuestro punto de partida es la conjunción del artículo de E. Cuchillo-Ibañéz, M. A. Morón y F. R. Ruiz del Portal [Cu-Mo-R.1] con el de José M. R. Sanjurjo [Sa.3] y la intención de poner de manifiesto cómo los hiperespacios pueden ser utilizados para describir fenómenos y propiedades topológicas de muy distinta índole.

Es también importante para nosotros mostrar otra interacción entre la topología no Hausdorff y algunas propiedades geométricas de los espacios métricos compactos.

En [Cu-Mo-R.1] los autores utilizan la *topología semifinita inferior* en hiperespacios como fuente de ejemplos y de caracterizaciones de algunas propiedades básicas en topología general.

En [Sa.3] el autor da una descripción intrínseca de la teoría de la forma debida a K. Borsuk (ver [Bo.1], [Bo.2], [Bo.4], [Bo.5] y [Bo.6]). En 1968, K. Borsuk introdujo la teoría de la forma como una nueva clasificación de los espacios métricos compactos, que extiende a la teoría de homotopía y coincide con ella en la clase de los espacios con buen comportamiento local como por ejemplo, los ANR's (ver los textos [Bo.9] y [Hu.1]). Su idea fue sumergir los espacios métricos compactos en AR's, especialmente en el cubo de Hilbert, y comparar los sistemas de entornos de dichas copias por medio de lo que llamó sucesiones fundamentales o bien por sus restricciones a las cuales denominó aplicaciones aproximativas. De esta manera evita la rigidez que produce la relación de homotopía de aplicaciones continuas cuando al menos uno de los espacios tiene un "pobre" comportamiento local (como por ejemplo, que no tengan conexión local). Consigue así eludir que espacios globalmente similares, como pueden ser el círculo de Varsovia y la esfera unidimensional $\mathbf{S^1}$, sean esencialmente distintos por la nueva clasificación, como es el caso en homotopía debido a las malas propiedades locales del Círculo de Varsovia.

La teoría de la forma en espacios métricos compactos, o alguno de sus aspectos, ha sido descrita de distintas maneras en [Sa.1], [Gi-Sa.1] y [Mo-R.3]. También, dicha teoría, ha sido extendida a otras clases de espacios de diferentes maneras. Recomendamos los texto de K. Borsuk [Bo.6], S. Mardešić y J. Segal [Mar-Se.3] y J. Dydak y J. Segal [Dy-Se.1] para aquellos interesados en un estudio más amplio de la teoría de la forma. Por último, en [Mar.3] y [Mar-Se.4] aparecen dos recientes artículos sobre aspectos históricos de la teoría de la forma y algunas de sus aplicaciones.

Hemos dividido este trabajo en cuatro capítulos:

Capítulo I:

En él hacemos un estudio de los hiperespacios con la *topología semifinita superior* paralelo al establecido en [Cu-Mo-R.1] para los hiperespacios con la *topología semifinita inferior*. Es de destacar que el hiperespacio de un espacio de Tychonov X con la *topología semifinita superior*, al que denotaremos por 2^X_{upp}, es una compactificación conexa de dicho espacio que es T_0 y no es T_1; además, si X es un espacio normal Hausdorff 2^X_{upp} comparte con la compactificación de Stone-Čech de X la propiedad de extensión de aplicaciones. En el marco de los espacios metrizables la propiedad de que el hiperespacio 2^X_{upp} cumpla el segundo axioma de numerabilidad caracteriza la compacidad del espacio X. El tipo topológico del espacio X determina, y está determinado, por el tipo topológico del hiperespacio 2^X_{upp}. Además los grupos de autohomeomorfismos de X y de 2^X_{upp} son isomorfos, aunque X y de 2^X_{upp}

sean espacios topológicos muy diferentes. Demostramos también un "Teorema de complementos" en el sentido que comprobamos que dos espacios de Tychonov X e Y son homeomorfos si y solo si los complementos de sus copias canónicas, $2^X_{upp} - X$ y $2^Y_{upp} - Y$, son homeomorfos. El capítulo finaliza dando una descripción de la compactificación de Stone-Čech de espacios normales Hausdorff X, utilizando para ello las *topologías semifinitas superior e inferior*, tras hacer notar que en dichos espacios los ultrafiltros de cerrados son conjuntos cerrados en el hiperespacio 2^X_{upp}.

Muchos de los resultados obtenidos en este capítulo se pueden extender a clases de espacios más amplias que los espacios de Tychonov, pero entendemos que esta clase es ya suficientemente significativa.

Capítulo II:

En el breve capítulo II ponemos de manifiesto que 2^X_{upp} es un extensor absoluto para la clase de los espacios métricos compactos cuando X es un espacio métrico compacto. Esto es, si X e Y son espacios métricos compactos, $A \subset Y$ es cerrado y $f : A \longrightarrow 2^X_{upp}$ es una aplicación continua, entonces existe una aplicación continua $\hat{f} : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ que es una extensión de f. Por otra parte obtenemos una bella caracterización de los espacios compactos X, dentro de la clase de paracompactos Hausdorff, como aquellos para los que su hiperespacio con la topología semifinita superior, 2^X_{upp}, tiene la propiedad del punto fijo.

Capítulo III:

Dedicaremos este capítulo al estudio de una base de entornos especial de la copia canónica de un compacto métrico (X, d) en su hiperespacio 2^X_{upp}. Comprobamos que $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una base de abiertos de la copia canónica de X en 2^X_{upp} donde $U_\varepsilon = \{C \in 2^X \setminus diam\,(C) < \varepsilon\}$. Esencialmente demostramos lo siguiente:

- Los espacios U_ε no tienen en general la homotopía de un espacio T_1 pero todos ellos tienen la forma de espacios finitos discretos, poliedros finitos 0-dimensionales, poniendo así de manifiesto una diferencia esencial, en el marco general, entre la teoría de homotopía y la teoría de la forma, puesto que K. Morita en [Mor.1] probó que todo espacio topológico tiene la forma de algún espacio de Tychonov.
- El espacio 2^X_{upp}, aun no siendo T_1, comparte con el cubo de Hilbert, como espacios ambientes de X, una importante propiedad: detectan el morfismo en teoría de la forma que genera una aplicación continua a X. Explícitamente comprobamos que: " Dados X e Y espacios métricos compactos y $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas entonces $Sh(f) = Sh(g)$ si y solo si f es homotópica a g en U_ε para todo $\varepsilon > 0$."

Capítulo IV:

Iniciamos el último capítulo reinterpretando la construcción realizada por J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] en términos del hiperespacio con la *topología semifinita superior*, 2^X_{upp}. De hecho demostramos que en estos términos, la construcción de J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] es la misma que la de K. Borsuk pero cambiando el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$, como espacio ambiente, por el hiperespacio del espacio métrico compacto en cuestión, con la *topología semifinita superior*, 2^X_{upp}. En particular, las multiredes corresponden exactamente a las aplicaciones aproximativas de X en 2^X_{upp} y la relación de homotopía entre ellas a la homotopía entre aplicaciones aproximativas. Hacemos un intento, probando para ello un teorema de extensión de homotopía en hiperespacios, de simplificar la definición de composición de multiredes de J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3], sin embargo hacemos notar pronto que dicho resultado no nos permite pasar, como en el caso del cubo de Hilbert, de aplicaciones aproximativas a sucesiones fundamentales que se restrinjan a ellas. Aunque no conseguimos la simplificación deseada en la definición, presentamos el resultado de extensión de homotopía en hiperespacios por su interés en si mismo.

La conveniencia de nuestra reinterpretación de los resultados de J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] queda reflejada seguidamente puesto que nos permite facilmente, salvo el uso de un resultado como el Teorema de Curtis-Schori-West [V.1], mejorar la propia descripción de J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] en el caso de conexión local, pudiendo así usar multiaplicaciones continuas en vez de solo aplicaciones semicontinuas superiormente. Por último, y motivados por el Teorema de los complementos de Chapman [Chap.1], probamos, usando algún resultado de A. Pelczynski en [Pelc.1], que el tipo topológico de cada espacio métrico compacto está totalmente determinado por el tipo uniforme del complementario de su copia canónica en su hiperespacio con la métrica de Hausdorff.

CAPÍTULO 1

HIPERESPACIOS CON LA TOPOLOGÍA SEMIFINITA SUPERIOR

1.1. INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo comenzamos estudiando propiedades topológicas de los hiperespacios, 2^X_{upp}, de espacios X al menos de Tychonov, (T_{3a}), con la *topología semifinita superior*. Obtenemos que el hiperespacio 2^X_{upp} es un espacio compacto conexo que es T_0 pero no es T_1, y además, utilizando la aplicación canónica, que es una compactificación conexa de X.

Comprobamos que X es separable si y solo 2^X_{upp} es separable y conseguimos también relacionar y conectar de alguna manera, propiedades de tipo topológico del espacio y del hiperespacio en algunos casos de distinta índole, como por ejemplo demostramos que si X es metrizable, 2^X_{upp} es segundo axioma de numerabilidad si y solo si X es compacto.

Demostraremos que el tipo topológico de los espacios se puede determinar y determina el tipo topológico de los complementarios de los espacios en los hiperespacios. Además, en el caso de los espacios normales Hausdorff, obtendremos que la compactificación del espacio por medio de sus hiperespacio con la *topología semifinita superior* tiene una propiedad de extensión de aplicaciones continuas, análoga a aquella que caracteriza la compactificación de Stone-Čech entre todas las compactificaciones Hausdorff.

Por último, cuando X es un espacio normal Hausdorff usando los hiperespacios con la *topología semifinita inferior* de hiperespacios con la *topología semifinita superior* y la teoría de ultrafiltros (ver [Ga-Ma-O-Ou-Pi.1] y [Ma-Ou-Pi.1]), tras comprobar que los ultrafiltros de conjuntos cerrados de X que son cerrados de 2^X_{upp}, dotamos al conjunto formado por los ultrafiltros de conjuntos cerrados de X de una topología respecto de la cual comprobamos que dicho conjunto es un compacto Hausdorff. Terminamos demostrando que además dicho conjunto es justamente la compactificación de Stone-Čech del espacio X.

1.2. DEFINICIONES BÁSICAS Y PROPIEDADES GENERALES.

Definición 1.2.1. Hiperespacio.
Sea (X, T) un espacio de Tychonov, llamamos hiperespacio del espacio X y lo denotamos por el símbolo 2^X al conjunto formado por todos los subconjuntos cerrados no vacíos del espacio X.

$$2^X = \{C \subset X \mid C \text{ cerrado}, \ C \neq \emptyset\}$$

Consideremos un subconjunto abierto U del espacio topológico (X, T) y definamos el conjunto B_U formado por todos los conjuntos cerrados no vacíos del espacio X que están contenidos en U, es decir:

$$B_U = \{C \in 2^X \mid C \subset U\}$$

Es fácil comprobar que la familia

$$\mathcal{B} = \{B_U\}_{U \in T},$$

es base para una topología en el hiperespacio 2^X (ver [Mi.1]).

Definición 1.2.2. Topología semifinita superior.
La topología que tiene como base la familia $\mathcal{B} = \{B_U\}_{U \in T}$ recibe el nombre de *topología semifinita superior*.

Aunque normalmente trabajaremos con hiperespacios con la *topología semifinita superior*, en algunos momentos haremos uso de la *topología semifinita inferior*, por tanto nos será útil también contar con la definición de esta última.

Dado un subconjunto abierto U del espacio topológico (X, T), definimos el conjunto D_U formado por todos los conjuntos cerrados no vacíos del espacio X cuya intersección con U sea distinta del vacío.

$$D_U = \{C \in 2^X \mid C \cap U \neq \emptyset\}$$

La familia

$$\mathcal{D} = \{D_U\}_{U \in T}$$

es una subbase para una topología en el hiperespacio 2^X (ver [Mi.1]).

Definición 1.2.3. **Topología semifinita inferior.**
La topología que tiene como subbase la familia $\mathcal{D} = \{D_U\}_{U \in T}$ recibe el nombre de *topología semifinita inferior*.

Observación 1.2.4. Denotaremos por 2^X_{upp} al espacio topológico formado por el hiperespacio 2^X dotado de la *topología semifinita superior* y por 2^X_{low} al espacio topológico formado por el hiperespacio 2^X dotado de la *topología semifinita inferior.*

El primer hecho que queremos describir, por su utilidad posterior, es la adherencia de un punto del espacio 2^X_{upp}.

Proposición 1.2.5. *Sea $C \in 2^X_{upp}$, la adherencia de C en 2^X_{upp}, que denotamos por $\overline{C}$, está formada por todos los subconjuntos cerrados de X que contienen al cerrado C de X. Es decir:*

$$\overline{C} = \{D \in 2^X \mid C \subset D\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \in 2^X_{upp}$ con $C \subset D$ y sea B_U cualquier abierto de la base $\mathcal{B}$ de 2^X_{upp} que contenga a D. Claramente se tiene que $C \subset D \subset U$ de donde se deduce que $C \in B_U$, lo que nos permite poder afirmar que $D \in \overline{C}$ y por lo tanto concluir que el subconjunto $\{D \in 2^X \mid C \subset D\}$ de 2^X_{upp} está incluido en la adherencia de C.

$$\{D \in 2^X \mid C \subset D\} \subset \overline{C}.$$

Para demostrar la inclusión en el otro sentido partimos ahora de la existencia de $D \in 2^X_{upp}$ tal que

$$D \in \overline{C} \qquad \text{y} \qquad C \nsubseteq D.$$

Esto implica que existe un punto x de C, que no está en D. Debido a que X es un espacio regular, se tiene que existen dos abiertos U_1 y U_2 de X de modo que

- $x \in U_1$ y $D \subset U_2$
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Tomemos ahora el abierto $B_{U_2} \in \mathcal{B}$. Este abierto contiene al punto D pero no contiene a C, así pues, $B_{U_2} \cap C = \emptyset$ y esto está en contradicción con el hecho de que el punto D está en la adherencia del punto C. Llegamos de este modo a:

$$\overline{C} \subset \{D \in 2^X \quad | \quad C \subset D\}.$$

□

En las siguientes proposiciones se ponen de manifiesto algunas propiedades topológicas de 2^X_{upp}.

Proposición 1.2.6. *Dado un espacio de Tychonov X se tiene que:*

a) *El único punto de 2^X_{upp} que es cerrado es el punto X.*

b) *Si X es no trivial se tiene que 2^X_{upp} es un espacio T_0 que no es T_1.*

c) *2^X_{upp} es siempre compacto y conexo.*

d) *Las únicas aplicaciones continuas de 2^X_{upp} a un espacio T_1 son las constantes.*

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración de los diferentes apartados basta con tener en cuenta las siguientes tres cuestiones:

1. La adherencia del punto X del hiperespacio 2^X_{upp} es el propio X.
2. $B_X = 2^X$ es el único abierto de la *topología semifinita superior* que contiene al punto X.
3. La adherencia de cualquier punto C de 2^X_{upp} siempre contiene al punto X.

□

Partiendo del hecho de que todos los puntos de un espacio de Tychonov son cerrados en él y por ello puntos del hiperespacio 2^X_{upp}, definimos la siguiente aplicación entre un espacio X y su hiperespacio 2^X_{upp}.

Observación 1.2.7. Cuando nos refiramos a los puntos $x \in X$ como puntos del hiperespacio generalmente los denotaremos por $\{x\} \in 2^X_{upp}$.

Definición 1.2.8. **Aplicación canónica.**
Dado un espacio de Tychonov (X, T) llamaremos aplicación canónica a la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi \quad : X \longrightarrow & \quad 2^X_{upp} \\ x \longrightarrow & \quad \{x\}. \end{aligned}$$

La importancia de la aplicación canónica reside en contar con una copia especial, $\Phi(X)$, del espacio X dentro de su hiperespacio 2^X_{upp}, es decir:

Proposición 1.2.9. *La aplicación canónica :*

$$\Phi : X \longrightarrow 2^X_{upp}$$

es un homeomorfismo sobre $\Phi(X)$ *y* $\Phi(X)$ *es un subconjunto denso en* 2^X_{upp}.

DEMOSTRACIÓN. La aplicación canónica es una aplicación inyectiva y por tanto es una biyección sobre su imagen, $\Phi(X)$. Además, teniendo en cuenta que si U es un abierto de X entonces B_U es un abierto de 2^X_{upp}, se verifica que

$$\Phi^{-1}(B_U) = U$$

$$\Phi(U) = B_U \cap \Phi(X).$$

De donde se concluye que la aplicación canónica es continua y abierta sobre su imagen, $\Phi(X)$. Obtenemos de este modo que la aplicación canónica, Φ, es un homeomorfismo sobre su imagen $\Phi(X)$.

Como además, para todo punto C de 2^X_{upp} y para cualquier B_U entorno abierto de C en 2^X_{upp} se tiene que $\Phi(X) \cap B_U = \{\{x\} \mid x \in U\} \neq \emptyset$ podemos entonces concluir que $\Phi(X)$ es denso en 2^X_{upp}. □

Una consecuencia inmediata de la proposición **1.2.9** es el siguiente corolario.

Corolario 1.2.10. *Dado un espacio de Tychonov X, su hiperespacio 2^X_{upp} es una compactificación conexa de X.*

Conviene señalar también el siguiente resultado:

Proposición 1.2.11. *Dado X espacio de Tychonov, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X no tiene puntos aislados*
2. *$2^X_{upp} - \Phi(X)$ es denso en 2^X_{upp}.*

1.3. RELACIÓN ENTRE ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL ESPACIO Y EL HIPERESPACIO.

Vimos en la sección anterior, en la proposición $1.2.6$, que el hiperespacio 2^X_{upp} es un espacio T_0 que ni siquiera es T_1, aunque el espacio X sea T_1, y además el hiperespacio 2^X_{upp} siempre es compacto y conexo independientemente de que el espacio X lo sea o no. Comenzaremos esta sección estableciendo la relación existente entre la separabilidad del espacio X y la separabilidad de su hiperespacio 2^X_{upp} en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1. *Una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Tychonov X sea separable es que 2^X_{upp} sea separable.*

DEMOSTRACIÓN. Empezaremos probando la necesidad de la condición. Supongamos entonces que existe un subconjunto numerable $A \subset X$

$$A = \{x_1, x_2, .., x_n, ..\}_{n\in\mathbb{N}}$$

tal que A es un subconjunto denso del espacio X, es decir, $\overline{A} = X$.

Consideramos ahora el siguiente subconjunto numerable de 2^X_{upp}

$$A^* = \{\{x_1\}, \{x_2\}, .., \{x_n\}, ...\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Tomemos B_U un abierto básico de 2^X_{upp}. Como A es denso en X se tiene entonces que $U \cap A \neq \emptyset$, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in U \cap A$ y por tanto $\{x_{n_0}\} \in B_U$. Llegamos así a que $B_U \cap A^* \neq \emptyset$ obteniendo de este modo que A^* es un subconjunto denso numerable de 2^X_{upp}, o lo que es lo mismo que 2^X_{upp} es separable.

Para probar la suficiencia de la condición supongamos ahora que existe un subconjunto

$$M = \{C_i \mid C_i \in 2^X_{upp}\}_{i\in\mathbb{N}}$$

que es numerable y denso en 2^X_{upp}. Para cada $i \in \mathbb{N}$, fijamos un punto $x_i \in C_i$ y construimos el conjunto

$$M^* = \{x_i \mid x_i \in C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$

que es un subconjunto numerable de X.

Sea U un subconjunto abierto de X y por tanto B_U un abierto en 2^X_{upp}; por ser M denso en 2^X_{upp} tenemos que $M \cap B_U \neq \emptyset$ y por tanto, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{i_0} \in M$ y $C_{i_0} \subset U$. Obtenemos de este modo, puesto que $x_{i_0} \in C_{i_0} \subset U$, que $U \cap M^* \neq \emptyset$ y consecuentemente que el conjunto numerable $M^* = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es denso en X. Quedando así demostrada la separabilidad de X. $\square$

Teniendo en cuenta que, gracias a la aplicación canónica podemos considerar al espacio X sumergido dentro de su hiperespacio 2^X_{upp}, obtenemos, al ser propiedades topológicas hereditarias, que si 2^X_{upp} satisface el primer axioma de numerabilidad entonces X también lo satisface y que si 2^X_{upp} cumple el segundo axioma de numerabilidad X también lo satisface. Los recíprocos no son ciertos en general y la siguiente proposición es una muestra de ello.

Proposición 1.3.2. $2^{\mathbb{R}}_{upp}$ *no satisface el primer axioma de numerabilidad (y por tanto tampoco el segundo).*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto de los números reales con la métrica usual, $(\mathbb{R}, T_U)$, que verifica el segundo axioma de numerabilidad, por tanto también el primero, y la inmersión canónica de los números naturales $\mathbb{N}$ como subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Efectuaremos la prueba por reducción al absurdo. Supongamos que $2^{\mathbb{R}}$ verifica el primer axioma de numerabilidad, se sigue entonces que el punto $\mathbb{N} \in 2^{\mathbb{R}}_{upp}$ tendrá una base numerable de entornos abiertos en $2^{\mathbb{R}}_{upp}$. Podemos suponer que la base numerable que tomamos de $\mathbb{N}$ en $2^{\mathbb{R}}_{upp}$ es de la forma $\{B_{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son abiertos de $\mathbb{R}$ tales que

- $\mathbb{N} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Para todo abierto V de $\mathbb{R}$, que contiene a $\mathbb{N}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\mathbb{N} \subset V_{n_0} \subset V$.

A partir de $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generemos la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $U_n = \bigcap_{i=1}^n V_i$. De la propia definición de la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deducimos que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también un conjunto numerable de abiertos de $\mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\mathbb{N} \subset U_n$, $U_n \subset V_n$ y además $U_{n+1} \subset U_n$.

Gracias a estas propiedades y a que estamos trabajando en $\mathbb{R}$, si denotamos por $B(i, \epsilon_i^n)$ a las bolas de centro $i \in \mathbb{N}$ y de radio $\epsilon_i^n > 0$, podemos utilizar la siguiente descripción sin pérdida de generalidad de los U_n:

$$U_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(i, \epsilon_i^n),$$

donde $\epsilon_i^{n+1} < \epsilon_i^n$ y $\epsilon_{i+1}^n < \epsilon_i^n$ para todo $i, n \in \mathbb{N}$ (obsérvese que los radios ϵ_i^n deben tender a cero).

A partir de la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos de $\mathbb{R}$ que contienen a $\mathbb{N}$, formamos la familia $\{B_{U_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos de $2^{\mathbb{R}}_{upp}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\mathbb{N} \in B_{U_n}$ y $B_{U_n} \subset B_{V_n}$.

Tomemos ahora el siguiente subconjunto abierto de $\mathbb{R}$:

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(n, \epsilon_n^n).$$

Tenemos que U es un entorno abierto de $\mathbb{N}$ que no contiene a ningún abierto U_n de la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Si consideramos ahora el abierto B_U de $2^{\mathbb{R}}_{upp}$, por ser $\{B_{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de entornos abiertos del punto $\mathbb{N}$ en $2^{\mathbb{R}}_{upp}$, se sigue que debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{V_{n_0}} \subset B_U$, es más, por definición de la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos que $B_{U_{n_0}} \subset B_{V_{n_0}} \subset B_U$ y por consiguiente que $U_{n_0} \subset U$; llegamos de esta forma a una contradicción. $\square$

Esta última proposición nos lleva a intentar establecer condiciones suficientes sobre el espacio X, con el fin de conseguir que los hiperespacios verifiquen el primer o segundo axioma de numerabilidad. Nos parece que la clase de los espacios metrizables es suficientemente significativa y por ello comenzamos con el siguiente resultado previo.

Proposición 1.3.3. *Sea X un espacio discreto. Se tiene que:*

- **a)** 2^X_{upp} *satisface el primer axioma de numerabilidad.*
- **b)** 2^X_{upp} *satisface el segundo axioma de numerabilidad si y solo si el espacio X es finito.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración del apartado **a)** de la proposición es obvia. De hecho, para todo $C \in 2^X_{upp}$ se tiene que la familia unitaria $\{B_C\}$ es una base de entornos abiertos de C en 2^X_{upp}.

Para la demostración del apartado **b)** comenzamos suponiendo que X es finito, se tiene entonces que su hiperespacio 2^X_{upp} es también finito, por tanto, 2^X_{upp} satisface el segundo axioma de numerabilidad.

En el otro sentido realizamos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que X es un espacio discreto tal que su hiperespacio 2^X_{upp} verifica el segundo axioma de numerabilidad. Supongamos también que X es no finito, de donde se deduce que X contiene una copia cerrada de los números naturales y por tanto, podemos considerar que $2^{\mathbb{N}} \subset 2^X$. Denotaremos por $2^{\mathbb{N}}_{2^X_{upp}}$ al espacio topológico formado por $2^{\mathbb{N}}$ con la topología que obtenemos al restringir la topología semifinita superior definida en el hiperespacio 2^X al espacio $2^{\mathbb{N}} \subset 2^X$. Vamos a demostrar que $2^{\mathbb{N}}_{2^X_{upp}}$ no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Para cada $C \subset \mathbb{N}$, con $C \neq \emptyset$, puesto que C es abierto y cerrado en X, se tiene que B_C es un abierto de 2^X_{upp} y por tanto la familia

$$\mathbf{B} = \{B_C : \ C \neq \emptyset \ \text{ y } \ C \subset \mathbb{N}\},$$

que es una base no numerable de $2^{\mathbb{N}}_{2^X_u pp}$, puesto que tendrá tantos elementos como subconjuntos $\mathbb{N}$, es decir, $2^{\aleph_0}$. Vamos a comprobar que no existe una base numerable $\mathbf{B}^*$ de $2^{\mathbb{N}}_{2^X_u pp}$ tal que $\mathbf{B}^* \subset \mathbf{B}$. Para ello se probará que no podemos suprimir ningún elemento de $\mathbf{B}$ si queremos que el resultado siga siendo una base.

Sea $C_0 \subset \mathbb{N}$, C_0 un subconjunto no vacío, y definamos la familia $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ por

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \{B_{C_0}\}.$$

Si tomamos ahora el conjunto abierto B_{C_0} se sigue que no existe ningún $D \subset \mathbb{N}$ con $B_D \in \mathbf{B}'$, tal que $C_0 \in B_D \subset B_{C_0}$, ya que esto implicaría que $C_0 = D$.

Así pues, $2^{\mathbb{N}}_{2^X_{upp}}$ no es segundo axioma de numerabilidad y por ser el segundo axioma una propiedad topológica hereditaria, llegamos a que 2^X_{upp} no puede verificar el segundo axioma de numerabilidad. Consecuentemente X tiene que ser finito como queríamos probar. $\square$

Observación 1.3.4. La topología que hereda 2^C, cuando C es un cerrado del espacio (X,T), como subespacio topológico del hiperespacio 2^X_{upp}, $2^C_{2^X_{upp}}$, es la misma que la topología semifinita superior que se genera a partir de la topología de (X,T) restringida al subconjunto C, 2^C_{upp}.

A continuación, usando los resultados obtenidos en el caso discreto, veremos que en el caso de los espacios metrizables los axiomas de numerabilidad en los hiperespacios están ligados a propiedades de compacidad en el espacio.

Proposición 1.3.5. *Si X es un espacio metrizable se tiene que:*

a) 2^X_{upp} *satisface el segundo axioma de numerabilidad si y solo si X es compacto.*

b) 2^X_{upp} *satisface el primer axioma de numerabilidad si y solo si el subconjunto de X formado por todos los puntos no aislados es compacto.*

DEMOSTRACIÓN.

a) Supongamos que X es un espacio compacto metrizable y por lo tanto segundo axioma de numerabilidad; se sigue entonces que existe $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de abiertos de X numerable.

Sea $C \in 2^X_{upp}$ y B_U un entorno básico de C en 2^X_{upp}. Como $C \subset U \subset X$ se sigue que para todo punto $x \in C$ existe un $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_x} \in \mathcal{U}$ verifica que $x \in U_{n_x} \subset U$ y por tanto

$$C \subset \bigcup_{x\in C} U_{n_x} \subset U.$$

Además puesto que C es compacto se tiene que existe un subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset C$, tal que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{n_{x_i}} \subset U,$$

es decir,

$$C \in B_{\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{n_{x_i}}\right)} \subset B_U.$$

Obtenemos así a partir de la base numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X la siguiente familia de 2^X_{upp}

$$\mathcal{B} = \{B_{\left(U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\ldots\cup U_{i_r}\right)}\}_{i_1,i_2,\ldots,i_r\in\mathbb{N}},$$

la cual es también una base numerable de 2^X_{upp}, puesto que el conjunto de las partes finitas de un conjunto infinito numerable es numerable.

La demostración en el otro sentido la realizaremos por reducción al absurdo. Supongamos que X no es un espacio compacto y que 2^X_{upp} verifica el segundo axioma de numerabilidad. Por ser X un espacio métrico no compacto se tiene que existirá un subconjunto cerrado $C \subset X$ homeomorfo a los números naturales. Así pues, podemos considerar que $2^C \subset 2^X$.

Puesto que 2^X_{upp} verifica por hipótesis el segundo axioma de numerabilidad, y por ser ésta una propiedad topológica hereditaria, llegamos a que 2^C con la topología de 2^X_{upp} restringida a él, $2^C_{2^X_{upp}}$, es un espacio no finito que satisface el segundo axioma de numerabilidad, lo que está en contradicción con el apartado **b)** de la proposición **1.3.3** puesto que C es un espacio discreto no finito.

b) Comenzamos suponiendo que el subconjunto de X formado por todos los puntos no aislados de X es compacto. Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de puntos no aislados de X.

1. Si C es un cerrado de X tal que $C \subset \mathcal{P}$ entonces C es también compacto, y por ser X metrizable se sigue que para todo abierto U de X tal que $C \subset U$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(C, 1/n) \subset U$. Llegamos así a que $\{B_{B(C,1/n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de C en 2^X_{upp}.

2. Por otro lado, si $C \subset X - \mathcal{P}$ por el hecho de ser un conjunto de puntos aislados, se tiene que C es un abierto de X y por tanto, la familia unitaria de abiertos $B = \{B_C\}$ es una base de entornos para C en 2^X_{upp}.
3. Por último, si C es un cerrado cualquiera del espacio X consideramos

$$C = (C \cap \mathcal{P}) \cup (C \cap (X - \mathcal{P})).$$

Como C y $\mathcal{P}$ son cerrados en X, el subconjunto $C \cap \mathcal{P}$ es también un cerrado de X y del caso **1.** obtenemos que $\{B_{B(C \cap \mathcal{P}, 1/n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de $C \cap \mathcal{P}$ en 2^X_{upp}.
Para $C \cap (X - \mathcal{P})$, puesto que es un conjunto formado por puntos aislados, se sigue del caso **2.** que $B = B_{(C \cap (X - \mathcal{P}))}$ es una base de entornos para $C \cap (X - \mathcal{P})$ en 2^X_{upp}.
Consideremos los entornos abiertos $U_n = B((C \cap \mathcal{P}), 1/n) \cup (C \cap (X - \mathcal{P}))$ de C en X. Obtenemos así que la familia $\{B_{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de entornos de C en 2^X_{upp}.

De estos tres casos se deduce que 2^X_{upp} satisface el primer axioma de numerabilidad.

En el otro sentido efectuaremos la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que el conjunto $\mathcal{P}$ de los puntos no aislados de X no es compacto. Se sigue entonces que dicho conjunto contendrá un subconjunto cerrado homeomorfo a $\mathbb{N}$, que denotaremos por $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}$. Evidentemente $\mathcal{N}$ es cerrado en X puesto que $\mathcal{P}$ lo es.

Como por hipótesis 2^X_{upp} satisface el primer axioma de numerabilidad tenemos que el punto $\mathcal{N} \in 2^X_{upp}$ tiene una base numerable de entornos en 2^X_{upp}. Entonces existirá una familia $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (esta familia no puede ser finita ya que los puntos no son aislados) de subconjuntos abiertos de X tales que:

- $\mathcal{N} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

– Para todo abierto V de X, que contiene a $\mathcal{N}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $V_{n_0} \subset V$.

Ahora construimos una nueva base numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. De la propia definición de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deducimos que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también un conjunto numerable de abiertos de X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\mathcal{N} \subset U_n$, $U_n \subset V_n$ y además $U_{n+1} \subset U_n$.

Gracias a estas propiedades y a que X es un espacio métrico, si denotamos por $B(i, \epsilon_i^n)$ a las bolas de centro $i \in \mathbb{N}$ y de radio $\epsilon_i^n > 0$, podemos utilizar la siguiente descripción sin pérdida de generalidad de los U_n:

$$U_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(i, \epsilon_i^n),$$

donde $\epsilon_i^{n+1} < \epsilon_i^n$ y $\epsilon_{i+1}^n < \epsilon_i^n$ para todo $i, n \in \mathbb{N}$.

La demostración a partir de aquí se realiza de manera análoga al final de la demostración de la proposición **1.3.2**.

□

1.4. APLICACIONES ENTRE HIPERESPACIOS INDUCIDAS POR APLICACIONES ENTRE ESPACIOS

A partir de un aplicación entre dos espacios se puede definir una aplicación entre sus hiperespacios del siguiente modo:

Definición 1.4.1. Sean X, Y dos espacios de Tychonov. Dada la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ podemos definir una aplicación entre sus hiperespacios, a la que a veces no referiremos con el nombre de aplicación elevación, $2^f : 2^X \longrightarrow 2^Y$ por $2^f(C) = \overline{f(C)}$ donde $\overline{f(C)}$ es la adherencia de $f(C)$ en Y.

E. Cuchillo-Ibáñez, M. A. Morón y F. R. Ruiz del Portal en [Cu-Mo-R.1] realizan un estudio sobre las aplicaciones entre hiperespacios con la *topología semifinita inferior*, inducidas por aplicaciones continuas entre sus espacios. Los autores establecen los siguientes resultados

Proposición 1.4.2. *Sean* $X,\ Y$ *dos espacios de Tychonov y* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua. Entonces la aplicación entre sus respectivos hiperespacios*

$$\begin{array}{rcl} 2^f \; : 2^X_{low} \longrightarrow & & 2^Y_{low} \\ C \longrightarrow & & 2^f(C) = \overline{f(C)}, \end{array}$$

es una aplicación continua.

Proposición 1.4.3. *Si* $X,\ Y$ *son dos espacios de Tychonov y* $h : 2^X_{low} \longrightarrow 2^Y_{low}$ *es una aplicación cerrada y continua, entonces existe una aplicación* $f : X \longrightarrow Y$ *continua y cerrada tal que* $2^f = h$.

Corolario 1.4.4. *Sean* X, Y *dos espacios de Tychonov.* X *es homeomorfo a* Y *si y solo si* 2^X_{low} *es homeomorfo a* 2^Y_{low}.

Corolario 1.4.5. *La clase de todos los espacios topológicos que siendo* T_0 *no son* T_1 *tiene al menos tantos tipos topológicos diferentes como la clase de los espacios de Tychonov.*

En nuestro contexto, es decir, utilizando *topología semifinita superior* en los hiperespacios, hemos obtenido los siguientes resultados acerca de la relación entre la continuidad de las aplicaciones entre los hiperespacios, definidas a partir de las aplicaciones entre espacios, y la continuidad de estas últimas.

Proposición 1.4.6. *Sean* $X,\ Y$ *dos espacios de Tychonov y* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua y cerrada. Entonces su elevación* $2^f : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$, *definida por* $2^f(C) = \overline{f(C)} = f(C)$ *es una extensión continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \in 2^X_{upp}$ y supongamos que B_V es un entorno básico de $2^f(C)$ en 2^Y_{upp}. Puesto que f es una aplicación cerrada se tiene que $2^f(C) = f(C)$ y por tanto $f(C) \in B_V$, o lo que es lo mismo $f(C) \subset V$. De la continuidad de la aplicación f se deduce que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X que contiene a C, es decir, $B_{(f^{-1}(V))}$ es un abierto de 2^X_{upp} tal que $C \in B_{(f^{-1}(V))}$.

Vamos ahora a comprobar que la imagen del abierto $B_{(f^{-1}(V))}$ de 2^X_{upp} mediante la aplicación 2^f está contenida en el abierto B_V de 2^Y_{upp}. Consideremos para ello un punto $D \in B_{(f^{-1}(V))}$, esto es, $D \subset f^{-1}(V)$. Se tiene entonces que $f(D) \subset V$ y, teniendo en cuenta que f es cerrada, se sigue que:

$$2^f(D) = \overline{f(D)} = f(D) \subset V \implies 2^f(D) \in B_V.$$

Es decir,

$$2^f(B_{(f^{-1}(V))}) \subset B_V.$$

Queda de esta manera demostrada la continuidad de 2^f. □

Si restringimos un poco más la clase del espacio de llegada Y en la aplicación entre los espacios, en concreto si imponemos que Y sea un espacio normal Hausdorff, podemos prescindir del hecho de que la aplicación sea cerrada como demostramos a continuación.

Proposición 1.4.7. *Dados un espacio de Tychonov X y un espacio normal Hausdorff Y, si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces se verifica que la aplicación elevación, $2^f : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$, es una extensión continua de f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \in 2^X_{upp}$ y supongamos que $2^f(C) = \overline{f(C)} = Y$. Como $B_Y = 2^Y_{upp}$ es el único abierto de 2^Y_{upp} que contiene a Y, se sigue entonces que para cualquier B_U entorno de C en 2^X_{upp}, $2^f(B_U) \subset B_Y = 2^Y_{upp}$. Así pues, 2^f es continua en todo punto $C \in 2^X_{upp}$ tal que $2^f(C) = Y$.

Supongamos ahora que $2^f(C) = \overline{f(C)} \neq Y$ y sea B_V un entorno abierto de $2^f(C)$ en 2^Y_{upp}. Utilizando que Y es un espacio normal y que $\overline{f(C)}$ y $Y - V$ son dos cerrados disjuntos del espacio Y, obtenemos que existen dos conjuntos abiertos disjuntos V_1, V_2 de Y tales que

- $f(C) \subset \overline{f(C)} \subset V_1$.
- $Y - V \subset V_2$.

De donde se deduce

$$\overline{f(C)} \subset V_1 \subset Y - V_2 \subset V.$$

De modo que si consideramos el abierto $B_{(f^{-1}(V_1))}$ de C en 2^X_{upp} se tiene que para todo punto $D \in B_{(f^{-1}(V_1))}$, $D \subset f^{-1}(V_1)$, se verifica que:

$$f(D) \subset V_1 \subset Y - V_2 \subset V$$

y por tanto

$$2^f(D) = \overline{f(D)} \subset \overline{Y - V_2} = Y - V_2 \subset V.$$

Podemos concluir que $2^f(B_{f^{-1}(V_1)}) \subset B_V$, quedando así demostrada la continuidad de la aplicación 2^f en todo punto $C \in 2^X_{upp}$ tal que $2^f(C) \neq Y$. $\square$

Esta última proposición señala de hecho, el siguiente resultado más general:

Proposición 1.4.8. *Sean X, Y dos espacios de Tychonov y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si para $C \in 2^X_{upp}$ se verifica que $\overline{f(C)}$ tiene una base de entornos en Y formada por conjuntos cerrados (por ejemplo si C es un compacto), entonces $2^f : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$ es continua en C.*

Una importante consecuencia que obtenemos a partir de la proposición **1.4.7** es que si X es un espacio normal Hausdorff su compactificación 2^X_{upp} tiene una propiedad de extensión de aplicaciones análoga a la que caracteriza la compactificación de Stone-Čech . Esto es:

Corolario 1.4.9. *Sean dos espacios normales Hausdorff* X, Y. *Entonces toda aplicación continua* $f : X \longrightarrow Y$ *puede ser extendida continuamente entre sus compactificaciones conexas* 2^X_{upp} *y* 2^Y_{upp}.

El problema general de la continuidad de la aplicación elevación, 2^f, no lo tenemos aún resuelto.

Nos preguntamos ahora si la proposición **1.4.3** y por tanto también el corolario **1.4.4**, en los que se trabaja con la *topología semifinita inferior*, siguen siendo ciertos si cambiamos la *topología semifinita inferior* por la *topología semifinita superior*. La siguiente proposición responde a nuestra pregunta.

Proposición 1.4.10. *Dados* X, Y *dos espacios de Tychonov y* $h : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$ *un homeomorfismo, se tiene que existe un homeomorfismo* $f : X \longrightarrow Y$ *tal que* $h = 2^f$ *donde* $2^f(C) = \overline{f(C)}$.

DEMOSTRACIÓN. Lo primero que haremos será construir a partir del homeomorfismo h una aplicación f entre los espacios y continuaremos comprobando que dicha aplicación f es un homeomorfismo, para finalizar demostrando que su elevación 2^f coincide con el homeomorfismo h.

Sea $\{x\} \in 2^X_{upp}$, la imagen de $\{x\}$ mediante el homomorfismo h es un cerrado de Y. Vamos a demostrar por reducción al absurdo que $h(\{x\})$ está formado por un único punto del espacio Y.

Supongamos que $y_1, y_2 \in Y$ son dos puntos distintos, y por tanto $\{y_1\}$, $\{y_2\}$ son dos puntos distintos de 2^Y_{upp}, tales que $y_1, y_2 \in h(\{x\})$. Sean $\overline{\{y_1\}}$, $\overline{\{y_2\}}$ sus adherencias en 2^Y_{upp}, usando la proposición **1.2.5** junto con la hipótesis de que h es un homeomorfismo se tiene que

$$h(\{x\}) \in \overline{\{y_1\}} \cap \overline{\{y_2\}} \implies \{x\} \in h^{-1}(\overline{\{y_1\}} \cap \overline{\{y_2\}}).$$

Es decir,

$$\{x\} \in h^{-1}(\overline{\{y_1\}} \cap \overline{\{y_2\}}) = h^{-1}(\overline{\{y_1\}}) \cap h^{-1}(\overline{\{y_2\}}) \subset \overline{h^{-1}(\{y_1\})} \cap \overline{h^{-1}(\{y_2\})}.$$

Aplicando de nuevo la proposición **1.2.5** obtenemos que

$$h^{-1}(\{y_1\}) \subset \{x\} \quad \text{y} \quad h^{-1}(\{y_2\}) \subset \{x\}.$$

Por tanto

$$h^{-1}(\{y_1\}) = h^{-1}(\{y_2\}) = \{x\}.$$

Llegamos de este modo a una contradicción con el hecho de que h es un homeomorfismo. Consecuentemente $h(\{x\})$ es un único punto en Y, al que nosotros vamos a denotar por $\mathbf{y}_{\{\mathbf{x}\}}$. Evidentemente también se tiene, por ser h^{-1} homeomorfismo, que $h^{-1}(\{y\})$ es un cerrado de X que está formado por un único punto para todo $\{y\} \in 2^Y_{upp}$.

Definamos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} f \quad : X \longrightarrow & \qquad Y \\ x \longrightarrow & \quad \mathbf{y}_{\{x\}} = h(\{x\}). \end{aligned}$$

Obsérvese que la imagen de la aplicación f es todo el espacio Y, debido a que h es un homeomorfismo y la imagen de un punto de X es un punto de Y. Así pues, la aplicación f es también un homeomorfismo sobre el espacio Y ya que no es más que la restricción del homeomorfismo h al conjunto $\Phi(X)$.

Para comprobar que $2^f = h$ bastará con demostrar, puesto que f es un homeomorfismo, que $f(C) = h(C)$. Dado $C \in 2^X_{upp}$ para todo $x \in C$ se tiene que $C \in \overline{\{x\}}$ y por lo tanto se sigue que

$$h(C) \in h(\overline{\{x\}}) = \overline{h(\{x\})},$$

es decir, para todo $x \in C$ se tiene $h(\{x\}) \subset h(C)$.

Si consideramos a C como un subconjunto cerrado de X y, por tanto, a $h(C)$ como un subconjunto cerrado de Y, es claro entonces que $f(C)$ está incluido en $h(C)$ como subconjunto cerrado de Y

$$f(C) \subset h(C).$$

Para la inclusión en el otro sentido tomemos $y \in h(C)$ se tiene entonces $h^{-1}(y) \subset C$. Como h es un homeomorfismo se cumple que existe un $x \in C$ de manera que $h(\{x\}) = \{y\}$, esto implica que $f(x) = y$ y por tanto $y \in f(C)$. Todo esto nos lleva a concluir que

$$h(C) \subset f(C).$$

Obtenemos así que $f(C) = h(C)$ para todo cerrado no vacío C de X. Por tanto la aplicación elevación del homeomorfismo f, $2^f : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$, verifica que para todo $C \in 2^X_{upp}$

$$2^f(C) = \overline{f(C)} = f(C) = h(C).$$

La prueba queda así terminada. $\square$

De manera inmediata, a partir de la proposición anterior y de la proposición **1.4.6**, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.4.11. *Sean X, Y dos espacios de Tychonov. X es homeomorfo a Y si y solo si 2^X_{upp} es homeomorfo a 2^Y_{upp}.*

La proposición que enunciamos a continuación, en la que se remarcan propiedades de carácter functorial de la aplicación 2^f, es un paso previo para obtener un isomorfismo entre el grupo de autohomeomorfismos de un espacio y el grupo de autohomeomorfismos de su hiperespacio.

Proposición 1.4.12. *Dados X, Y y Z espacios de Tychonov y las aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ se verifica*

- $2^{g \circ f} = 2^g \circ 2^f$
- $2^{1_X} = 1_{2^X_{upp}}$ *donde* 1_X *es la aplicación identidad en el espacio* X.

Corolario 1.4.13. *Para todo espacio de Tychonov X la aplicación*

$$\begin{aligned} 2^{\bullet} : G(X) &\longrightarrow G(2^X_{upp}) \\ f &\longrightarrow 2^f \end{aligned}$$

es un isomorfismo, donde $G(X)$ *y* $G(2^X_{upp})$ *son los grupos de los autohomeomorfismos de* X *y de* 2^X_{upp} *respectivamente.*

De este último corolario se deduce que todo espacio de Tychonov no trivial tiene el mismo grupo de autohomeomorfismos que un espacio compacto, conexo y T_0 que no es $T_1,$ es decir, que dado un espacio de Tychonov se puede construir otro espacio con el mismo grupo de autohomeomorfismos, de tal forma que estos espacios son, en algún sentido, arbitrariamente distintos. Este hecho parece señalar que el tipo algebraico de los grupos de autohomeomorfismos es un invariante topológico débil. Así el problema de determinar las clases para las cuales el tipo algebraico de tales grupos determine el tipo topológico de los espacios es difícil e interesante, y las condiciones que determinen tales clases deben ser muy fuertes. (ver [Mc.1], [Rub.1] y [Whi.1] para información a este respecto).

Los dos últimos corolarios siguen siendo ciertos si reemplazamos la *topología semifinita superior* por la *topología semifinita inferior* (ver [Cu-Mo-R.2]). Sin embargo los dos son falsos si consideramos la *topología de Vietoris*. Por ejemplo si consideramos la esfera unidimensional $\mathbf{S^1}$, el intervalo $\mathbf{I} = [0,1]$ y el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ y tomamos los espacios $\mathbf{S^1} \times \mathcal{Q}$ y $\mathbf{I} \times \mathcal{Q}$, utilizando el Teorema de Curtis-Schori-West (ver [V.1]), obtenemos que $2^{\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q}}$ es homeomorfo a $2^{\mathbf{I}\times\mathcal{Q}}$ y sin embargo $\mathbf{S^1} \times \mathcal{Q}$ y $\mathbf{I}\times\mathcal{Q}$ no lo son. Es más, $G(2^{\mathbf{I}\times\mathcal{Q}})$ y $G(2^{\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q}})$ no pueden ser isomorfos a $G(\mathbf{I}\times\mathcal{Q})$ y $G(\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q})$ respectivamente, ya que en caso contrario como $2^{\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q}}$ es homeomorfo a $2^{\mathbf{I}\times\mathcal{Q}}$ tendríamos que $G(\mathbf{I}\times\mathcal{Q})$ es isomorfo a $G(\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q})$ de donde se obtendría, por ser $\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q}$ y $\mathbf{I}\times\mathcal{Q}$ $\mathcal{Q}$-variedades (ver [Mc.1]), que $\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q}$ sería homeomorfo a $\mathbf{I}\times\mathcal{Q}$; lo que es claramente falso puesto que $\mathbf{S^1}\times\mathcal{Q}$ es homotópico a $\mathbf{S^1}$ y $\mathbf{I}\times\mathcal{Q}$ es homotópico a $\mathbf{I}$.

Finalizamos esta sección probando que la relación de homeomorfismo entre los espacios no solo es equivalente a la relación de homeomorfismo entre los hiperespacios, como se vio en el corolario **1.4.11**, sino que también existe otra equivalencia, menos evidente, como vamos a tener la oportunidad de comprobar tras estos lemas.

Lema 1.4.14. *Si* $h : (2^X_{upp} - X) \longrightarrow (2^Y_{upp} - Y)$ *es un homeomorfismo, la imagen mediante* h *de un punto* $C \in (2^X_{upp} - X)$*, con* $C = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *donde* $a_i \in X$ *para todo* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, es un cerrado del espacio* Y *con exactamente* n *puntos.*

(Nota: En las expresiones $2^X_{upp} - X$*,* $2^Y_{upp} - Y$ *estamos identificando los espacios* X*,* Y *con sus copias canónicas* $\Phi(X)$*,* $\Phi(Y)$*).*

DEMOSTRACIÓN. Realizaremos la demostración por inducción sobre el número de puntos del cerrado $C = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset X$

El primer caso que vamos a demostrar es para $\mathbf{n = 2}$. Para ello comprobaremos, utilizando reducción al absurdo, que la imagen de un punto $C \in 2^X_{upp} - X$, donde $C = \{a, b\}$ con $a, b \in X$, mediante el homeomorfismo h es un cerrado del espacio Y con solo dos puntos también.

Supongamos que $h(C)$ es un cerrado del espacio Y con más de dos puntos; es decir, existe un conjunto $\{a', b', c'\} \subset h(C)$. Como el conjunto $\{a', b'\}$ es también un cerrado del espacio Y y puesto que h es un homeomorfismo, se sigue entonces que existe un cerrado $D \subset X$ con al menos dos puntos, ya que h no está definida en $\Phi(X)$, de manera que

$$h(D) = \{a', b'\} \subset \{a', b', c'\} \subset h(C).$$

Haciendo uso de la proposición **1.2.5** y que h es un homeomorfismo, conseguimos la siguiente relación

$$h(C) \in \overline{h(D)} = h(\overline{D}).$$

Obtenemos así que $C \in \overline{D}$, es decir, $D \subset C$. Pero como D tiene al menos dos puntos se verifica que $D = C$ lo cual es imposible puesto que h es una aplicación. Así pues, llegamos a que $h(C)$ tiene dos puntos, quedando de este modo visto el primer caso significativo $\mathbf{n = 2}$.

Supongamos que es cierto hasta $\mathbf{n = k}$. Observar que h^{-1} es también un homeomorfismos que verifica las condiciones del enunciado, así que h^{-1} también verifica la hipótesis de inducción hasta el caso $\mathbf{n = k}$.

Tomemos un punto $C \in 2^X_{upp} - X$ tal que $C = \{a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}\}$ con $a_i \in X$ para todo $i \in \{1, 2, ..., k, k+1\}$; y supongamos que $h(C)$ es un cerrado del espacio Y con más de $\mathbf{k+1}$ puntos, es decir, existe un conjunto $\{a'_1, a'_2, ..., a'_{k+1}, a'_{k+2}\} \subset h(C)$. Observar que $h(C)$ no puede tener $\mathbf{k}$ o menos de $\mathbf{k}$ puntos ya que en ese caso, por ser h^{-1} un homeomorfismo y suponer cierta la inducción hasta el caso $\mathbf{n = k}$, llegaríamos a que $h^{-1}(h(C)) = C$ tendría que tener $\mathbf{k}$ o menos de $\mathbf{k}$ puntos. Como el conjunto $\{a'_1, a'_2, ..., a'_k, a'_{k+1}\}$ es también un cerrado del espacio Y, y puesto que h es un homeomorfismo, se sigue que existe un cerrado $D \subset X$ con al menos $\mathbf{k+1}$ puntos (ya que si tuviera $\mathbf{k}$ o menos de $\mathbf{k}$ su imagen mediante la aplicación h tendría, por hipótesis de inducción, $\mathbf{k}$ o menos de $\mathbf{k}$ puntos también) de manera que

$$h(D) = \{a'_1, a'_2, ..., a'_k, a'_{k+1}\} \subset \{a'_1, a'_2, ..., a'_{k+1}, a'_{k+2}\} \subset h(C)$$

Utilizando, al igual que en el caso $\mathbf{n = 2}$, la proposición **1.2.5** y que h es un homeomorfismo, conseguimos la siguiente relación

$$h(C) \in \overline{h(D)} = h(\overline{D}),$$

entonces

$$C \in \overline{D} \Longrightarrow D \subset C.$$

Pero como hemos supuesto que D tiene al menos $\mathbf{k+1}$ puntos, se sigue que $D = C$ y por tanto $h(D) = h(C)$, lo cual es imposible ya que $h(D)$ solo está formado por $\mathbf{k+1}$ puntos y $h(C)$ tiene al menos $\mathbf{k+2}$ puntos llegando de este modo a una contradicción. $\square$

Lema 1.4.15. *Sea* $h : (2^X_{upp} - X) \longrightarrow (2^Y_{upp} - Y)$ *un homeomorfismo, con* X *un espacio de Tychonov conteniendo más de dos puntos. Tomemos ahora un punto* $a \in X$ *y definamos a partir de él, el subconjunto* A_a *de* $2^X_{upp} - X$ *como*

$$A_a = \{C_i = \{a, x_i\} \mid x_i \in X - a\}.$$

Se tiene entonces que para todo $C_i, C_j \in A_a$ *existe* $p_a \in Y$ *tal que*

$$h(C_i) \cap h(C_j) = \{p_a\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Comprobaremos primero, utilizando reducción al absurdo, que $h(C_i) \cap h(C_j) \neq \emptyset$.

Supongamos que existen dos puntos C_i, C_j del conjunto A_a, con $C_i = \{a, x_i\}$ y $C_j = \{a, x_j\}$, tales que $h(C_i) \cap h(C_j) = \emptyset$ y consideremos el punto $B = \{a, x_i, x_j\} \in 2^X_{upp} - X$. Como $C_i \subset B$ y $C_j \subset B$ se sigue de $\mathbf{1.2.5}$ que $B \in \overline{C_i}$ y $B \in \overline{C_j}$ de donde se obtiene que $h(B) \in h(\overline{C_i}) = \overline{h(C_i)}$ y $h(B) \in h(\overline{C_j}) = \overline{h(C_j)}$, es decir, $h(C_i) \subset h(B)$ y $h(C_j) \subset h(B)$. Así pues, obtenemos

$$h(C_i) \cup h(C_j) \subset h(B).$$

Utilizando la hipótesis $h(C_i) \cap h(C_j) \doteq \emptyset$ y el lema **1.4.14** llegamos a que la imagen mediante el homeomorfismo h de un punto $B \in 2^X_{upp} - X$, con tres puntos de X, contienen a un cerrado del espacio Y con cuatro puntos, lo que está en contradicción con el lema **1.4.14**.

Por tanto, queda demostrado que la intersección de las imágenes mediante h de dos cerrados de X pertenecientes al conjunto A_a, no solo es siempre distinta del vacío, sino que además tampoco puede ser un cerrado del espacio Y con dos o más puntos, ya que la imagen mediante h de cualquier elemento de A_a tiene siempre dos puntos y h es una aplicación inyectiva. De ello se deduce que la única posibilidad que existe es que las imágenes se intersequen en un único punto. Es más, de hecho se tiene que existe $p_a \in Y$ tal que para todo C_i, $C_j \in A_a$ se verifica

$$h(C_i) \cap h(C_j) = \{p_a\}.$$

Ya que en caso contrario si tuviéramos que existen C_1, C_2, C_3 cerrados de X pertenecientes al conjunto A_a y p_1, $p_2 \in Y$ con $p_1 \neq p_2$ verificando que:

$$h(C_1) \cap h(C_2) = p_1 \qquad \text{y} \qquad h(C_1) \cap h(C_3) = p_2.$$

llegaríamos a

$$h(C_1) = \{p_1, p_2\} \qquad \text{y} \qquad h(C_2) \cap h(C_3) = p_3 \qquad \text{con} \quad p_3 \neq p_1, p_2$$

por tanto

$$h(C_2) = \{p_1, p_3\} \qquad \text{y} \qquad h(C_3) = \{p_2, p_3\} \qquad \text{con} \quad p_3 \neq p_1 \neq p_2$$

y

$$h(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = \{p_1, p_2, p_3\}.$$

Alcanzamos de esta forma que la imagen mediante el homeomorfismo h de un punto del subespacio $2^X_{upp} - X$ con cuatro puntos de X, es un cerrado del espacio Y con tres puntos. Lo que estaría en contradicción con el hecho de que el homeomorfismo h lleva conjuntos de $\mathbf{n}$ puntos en conjuntos de $\mathbf{n}$ puntos. $\square$

Proposición 1.4.16. *Sean X, Y espacios de Tychonov. Entonces se tiene que X es homeomorfo a Y si y solo si $2^X_{upp} - X$ es homeomorfo a $2^Y_{upp} - Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Si X, Y son homeomorfos sabemos, por el corolario $\mathbf{1.4.11}$, que 2^X_{upp} y 2^Y_{upp} son también homeomorfos.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre los espacios X e Y y 2^f el homeomorfismo entre los correspondientes hiperespacios definido a partir de f por:

$$\begin{aligned} 2^f \quad : 2^X_{upp} &\longrightarrow \qquad 2^Y_{upp} \\ C &\longrightarrow \quad \overline{f(C)} = f(C). \end{aligned}$$

Debido a que la imagen del espacio X, mediante el homeomorfismo 2^f, es el espacio Y podemos concluir que el homeomorfismo 2^f restringido al subespacio $2^X_{upp} - X$ es también, como queríamos, un homeomorfismo entre los subespacios $2^X_{upp} - X$ y $2^Y_{upp} - Y$.

Para la demostración de la implicación en el otro sentido supongamos los tres casos siguientes:

1. X está formado por un solo punto.

   En este caso tendríamos entonces que $2^X_{upp} - X = \emptyset$. Como por hipótesis $2^X_{upp} - X$ y $2^Y_{upp} - Y$ son homeomorfos llegaríamos a que $2^Y_{upp} - Y = \emptyset$ y por tanto, a que el espacio Y estaría formado por un solo punto también; así que podríamos concluir que efectivamente los espacios X e Y son homeomorfos.

2. X está formado por dos puntos.

   En este caso tendríamos entonces que $2^X_{upp} - X = \{X\}$. Como por hipótesis $2^X_{upp} - X$ y $2^Y_{upp} - Y$ son homeomorfos, llegaríamos a que $2^Y_{upp} - Y$ estaría formado por un solo punto, es decir, que el espacio Y tendría un único cerrado con más de un punto. Puesto que Y es un espacio de Tychonov entonces todas las uniones finitas de puntos de Y son un cerrado de Y, de donde se deduce entonces que Y tiene dos puntos y por lo tanto los espacios X e Y son homeomorfos.

3. X está formado tres o más puntos.

   Partimos entonces de que la aplicación $h : (2^X_{upp} - X) \longrightarrow (2^Y_{upp} - Y)$ es un homeomorfismo entre los subespacios $2^X_{upp} - X$ y $2^Y_{upp} - Y$ y que el espacio X tiene al menos tres puntos.

   Construyamos ahora, teniendo en cuenta los lemas **1.4.14** y **1.4.15**, la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f \ : X &\longrightarrow \ Y \\ x &\longrightarrow \ p_x \end{aligned}$$

   donde $p_x = h(C_i) \cap h(C_j)$ para todo $C_i,\, C_j \in A_x = \{C_i = \{x,\, x_i\} : \, x_i \in X - x\}$.

   Nuestro primer paso será demostrar que la aplicación f es una biyección, para después comprobar que tanto la aplicación f, como su inversa, son continuas; y así poder afirmar que la aplicación f es un homeomorfismo. Lo que nos permitirá concluir que los espacios X, Y son homeomorfos, como queríamos demostrar.

   - Inyectividad de f.

Supongamos que existen x, $x' \in X$, $x \neq x'$, tal que $f(x) = f(x')$. Tomemos x_1, $x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, de la definición de f y del hecho de que h es un homeomorfismo se sigue que existirán y_1, $y_2 \in Y$ de forma que $h(\{x, x_1\}) = \{f(x), y_1\}$ y $h(\{x', x_2\}) = \{f(x'), y_2\}$. Tomamos ahora el cerrado $B = \{f(x), y_1, y_2\}$ de Y, puesto que $\{f(x), y_1\} \subset B$ y $\{f(x), y_2\} \subset B$ obtenemos que $B \in \overline{\{f(x), y_1\}}$ y $B \in \overline{\{f(x), y_2\}}$, y por ser h^{-1} un homeomorfismo llegamos a que

$$h^{-1}(B) \in h^{-1}(\overline{\{f(x), y_1\}}) = \overline{h^{-1}(\{f(x), y_1\})}$$

y

$$h^{-1}(B) \in h^{-1}(\overline{\{f(x), y_2\}}) = \overline{h^{-1}(\{f(x), y_2\})},$$

es decir, $h^{-1}(\{f(x), y_1\}) \subset h^{-1}(B)$ y $h^{-1}(\{f(x), y_2\}) \subset h^{-1}(B)$. Así pues, concluimos

$$h^{-1}(\{f(x), y_1\}) \cup h^{-1}(\{f(x), y_2\}) = \{x, x_1\} \cup \{x', x_2\} \subset h^{-1}(B),$$

lo que esta en contradicción con la propiedad del homeomorfismo h^{-1} expuesta en el lema **1.4.14**, por tanto, concluimos que $f(x) \neq f(x')$, esto es, f es inyectiva.

- Sobreyectividad de f.

Sea $b \in Y$ y consideremos el conjunto

$$B_{\mathbf{b}} = \{D_i = \{b,\ y_i\} :\ y_i \in Y - b\}.$$

Ya que los conjuntos D_i son puntos del subespacio $2^Y_{upp} - Y$, podemos calcular su imagen inversa mediante el homeomorfismo h que será, por el lema **1.4.14**, un cerrado del espacio X con dos puntos. Además, por el lema **1.4.15**, existe un $a \in X$ tal que para todo D_i, $D_j \in B$ se cumple

$$h^{-1}(D_i) \cap h^{-1}(D_j) = \{a\}.$$

Así obtenemos que $f(a) = b$.

Para demostrar la continuidad de f distinguiremos dos casos

- $f(a)$ es un punto aislado del espacio Y.

Como $Y - f(a)$ es un cerrado en Y, por tanto $Y - f(a) \in 2^Y_{upp} - Y$, podemos tomar la adherencia de $Y - f(a)$ en $2^Y_{upp} - Y$

$$\overline{Y - f(a)} = \{Y,\, Y - f(a)\},$$

y considerar su imagen mediante el homeomorfismo h^{-1}, de donde obtenemos el siguiente resultado :

$$\overline{h^{-1}(Y - f(a))} = h^{-1}(\overline{Y - f(a)}) = \{h^{-1}(Y),\, h^{-1}(Y - f(a))\}.$$

Puesto que Y es el único punto cerrado $2^Y_{upp} - Y$ y h es un homeomorfismo se tiene entonces $h^{-1}(Y) = X$, ya que X es también el único punto cerrado de $2^X_{upp} - X$. Llegamos así, a que los únicos conjuntos que contienen a $h^{-1}(Y - f(a))$ son él mismo y el propio espacio X, de donde se deduce que $h^{-1}(Y - f(a)) = X - x_0$, es decir, $(Y - f(a)) = h(X - x_0)$. Observar que $X - x_0$ es un cerrado de X.
Supongamos que $x_0 \neq a$. Tomemos $\{x, a\} \subset (X - x_0)$ entonces $X - x_0 \in \overline{\{x, a\}}$ y por tanto $h(X - x_0) \in h(\overline{\{x, a\}}) = \overline{h(\{x, a\})} = \overline{\{f(a), y_0\}}$, esto es, $\{f(a), y_0\} \subset h(X - x_0) = Y - f(a)$ llegando así a una contradicción. Podemos entonces concluir que $h^{-1}(Y - f(a)) = X - a$ y por tanto, el punto $a \in X$ será también un punto aislado.

- $f(a)$ no es un punto aislado del espacio Y.

Elijamos un entorno abierto U del punto $f(a)$ en Y. Existirá entonces un punto $y \in Y$ de manera que el conjunto $\{f(a),\, y\} \subset U$, es decir, $\{f(a),\, y\} \in B_U$. Por ser h un homeomorfismo existirá B_V abierto de $2^X_{upp} - X$ con

$$h^{-1}(\{f(a),\, y\}) \in B_V \qquad \text{y} \qquad h(B_V) \subset B_U.$$

Además por la sobreyectividad de h, y teniendo en cuenta como sea definido la aplicación f, se sigue que existe $x \in X$ con $h^{-1}(\{f(a), y\}) = \{a, x\}$. Se tiene entonces que el punto a pertenece al abierto V del espacio X.

Por último, debemos comprobar que la imagen de V mediante f está totalmente incluida en U. Sea a' un punto cualquiera de V con $f(a') = b'$ se tiene entonces que el cerrado $\{a, a'\} \subset V$ y $\{a, a'\} \in B_V$. Utilizando que $h(B_V) \subset B_U$ llegamos a $h(\{a, a'\}) = \{b, b'\} \in B_U$, es decir, que el punto b' pertenece al abierto U como deseábamos.

La continuidad de f^{-1} se demuestra realizando los mismos razonamientos que se han utilizado para la demostración de la continuidad de la aplicación f.

□

1.5. HIPERESPACIOS Y ULTRAFILTROS

En esta sección, tras comprobar que los ultrafiltros de cerrados de un espacio normal Hausdorff X son cerrados del hiperespacio con la topología semifinita superior, y por tanto puntos del hiperespacio con la *topología semifinita inferior* del hiperespacio con la *topología semifinita superior*, alcanzamos la compactificación de Stone-Čech del espacio X utilizando su hiperespacio que es un espacio no Hausdorff.

Por ello comenzaremos esta sección proporcionando las definiciones de los conceptos de filtro y ultrafiltro y algunas de las propiedades más relevantes de ellos (ver [Ga-Ma-O-Ou-Pi.1], [Ma-Ou-Pi.1], [Walk.1]).

Definición 1.5.1. <u>**Filtro**</u>.
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X cerrada por intersecciones finitas.

Una familia, $\mathcal{F}$, contenida en $\mathcal{A}$, se dice que es un $\mathcal{A}$-filtro si:

a) $\mathcal{F}$ es distinto del vacío.

b) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

c) si $C_1,\ C_2 \in \mathcal{F}$ entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$.

d) Si $D \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset D$ entonces $D \in \mathcal{F}$.

Definición 1.5.2. **Base de filtro**.
Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-filtro de X. La familia $\mathcal{B}$, contenida en $\mathcal{F}$, se dice que es una base de $\mathcal{F}$, si para cada elemento $C \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $B \subset C$.

Definición 1.5.3. **Filtro primo**.

Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-filtro de X. Se dice que $\mathcal{F}$ es primo si dados $C_1,\ C_2 \in \mathcal{A}$ tales que $(C_1 \cup C_2) \in \mathcal{F}$ se tiene que $C_1 \in \mathcal{F}$ o $C_2 \in \mathcal{F}$.

Definición 1.5.4. **Ultrafiltro**.
Un $\mathcal{A}$-filtro, $\mathcal{F}$, se dice que es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro si $\mathcal{F}$ es un elemento maximal del conjunto de los $\mathcal{A}$-filtros ordenados por la inclusión. Es decir, si para todo $\mathcal{F}'$ perteneciente a $\mathcal{A}$-filtros que contiene a $\mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Todo $\mathcal{A}$-ultrafiltro es un filtro primo.

La definición que se ha dado de $\mathcal{A}$-ultrafiltro tiene como consecuencia inmediata la siguiente proposición (ver [Ga-Ma-O-Ou-Pi.1], [Ma-Ou-Pi.1], [Walk.1])

Proposición 1.5.5. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-filtro. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro entonces verifica:*

a) *$\mathcal{F}$ es distinto del vacío.*

b) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

c) *si $C_1,\ C_2 \in \mathcal{F}$ entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$.*

d) *Si $D \in \mathcal{A}$ tal que $D \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{F}$ entonces $D \in \mathcal{F}$.*

Observación 1.5.6. La propiedad del apartado **d)** en esta proposición es equivalente a decir que para todo $D \in \mathcal{A}$, se tiene que, o bien $D \in \mathcal{F}$, o bien existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset X - D$.

De ahora en adelante a menos que se diga lo contrario, tomaremos como conjunto X un espacio topológico normal Hausdorff y como familia $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los cerrados de X, así que en estas condiciones, podemos referirnos a los $\mathcal{A}-$ultrafiltros simplemente por ultrafiltros.

Proposición 1.5.7. *Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de un espacio normal Hausdorff X entonces $\mathcal{F} \subset 2^X_{upp}$ es un conjunto cerrado de 2^X_{upp}.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la proposición probando que $2^X_{upp} - \mathcal{F}$ es un abierto en 2^X_{upp}.

Sea $C \in 2^X_{upp} - \mathcal{F}$. Entonces, usando el apartado **d)** de la proposición **1.5.5**, se tiene que existe un $D \in \mathcal{F}$ con $C \cap D = \emptyset$. De la normalidad de X se sigue la existencia de dos subconjuntos abiertos U, V de X tales que

$$C \subset U, \qquad D \subset V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Consideramos ahora el entorno abierto B_U de C en 2^X_{upp}. Se tiene entonces que $C' \cap D = \emptyset$ para todo punto $C' \in B_U$ y por consiguiente se deduce, de la propiedad **d)** de $1.5.5$, que $C' \notin \mathcal{F}$ para todo $C' \in B_U$. Esto concluye la demostración, pues hemos encontrado B_U abierto no vacío de 2^X_{upp} tal que

$$C \in B_U \subset (2^X_{upp} - \mathcal{F}),$$

es decir, $\mathcal{F}$ es un cerrado de 2^X_{upp}. □

Observación 1.5.8. Aquí nos gustaría señalar que los ultrafiltros fijos de X son justamente la adherencia de los cerrados $\{x\}$ de X como puntos de 2^X_{upp}.

El resultado que nos proporciona la proposición anterior nos lleva a poder afirmar que los ultrafiltros $\mathcal{F}$ de un espacio normal Hausdorff X son cerrados en 2^X_{upp}. Esto significa que todo ultrafiltro $\mathcal{F}$ en X es justamente un punto del hiperespacio del hiperespacio con la *topología semifinita superior*, es decir :

$$\text{Si } \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro en } X \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} \in 2^{2^X_{upp}}.$$

Consideremos el espacio topológico formado por el hiperespacio $2^{2^X_{upp}}$ dotado de la *topología semifinita inferior*, definida en **1.2.3**, al que representaremos por $2^{2^X_{upp}}_{low}$. Dado U abierto de 2^X_{upp} definimos el siguiente conjunto

$$D_U = \{C \subset 2^X_{upp},\ C \neq \emptyset,\ \text{cerrado} \ \mid C \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición 1.5.9. La familia

$$\mathcal{D} = \{D_U,\ \text{U abierto de } 2^X_{upp}\}$$

es una subbase para la *topología semifinita inferior* en $2^{2^X_{upp}}$, lo que nos permite definir el siguiente subespacio de $2^{2^X_{upp}}_{low}$.

Definición 1.5.10. $\underline{(\mathbf{W(X), T_{L_W}})}$.
Denotaremos por $W(X)$ al subespacio de $2^{2^X_{upp}}_{low}$ cuyos puntos son los ultrafiltros en X y por T_{L_W} a la *topología semifinita inferior* definida en $2^{2^X_{upp}}$ que tiene como subbase a $\mathcal{D}$, restringida a $W(X)$.

Seguidamente vamos a dar una base para la topología T_{L_W}

Proposición 1.5.11. *Si X es un espacio normal Hausdorff entonces la familia :*

$$D(W(X)) = \{D_U \cap W(X) :\ D_U \in \mathcal{D}\}$$

es una base para la topología T_{L_W} en $W(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Comprobaremos primero que $D(W(X))$ es una base para una topología en $W(X)$.

- Para todo $\mathcal{F} \in W(X)$ tomamos el abierto B_X de $\mathcal{F}$ en 2^X_{upp}, $B_X = 2^X_{upp}$. Se tiene entonces

$$\mathcal{F} \in (D_{B_X} \cap W(X)) = \{\mathcal{F} :\ B_X \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\} = W(X) \in D(W(X)).$$

- Sean los abiertos $D_{U_1} \cap W(X)$, $D_{U_2} \cap W(X)$ pertenecientes a $D(W(X))$ tales que $(D_{U_1} \cap W(X)) \cap (D_{U_2} \cap W(X)) \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{F} \in (D_{U_1} \cap W(X)) \cap (D_{U_2} \cap W(X)))$. Comenzamos comprobando, por reducción al absurdo, que $\mathcal{F} \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{F} \in D_{U_1}$ y $\mathcal{F} \in D_{U_2}$ se tiene
  - Existe $E \in \mathcal{F}$ tal que $E \in B_{V_1} \subset U_1$.
  - Existe $E' \in \mathcal{F}$ tal que $E' \in B_{V_2} \subset U_2$.

  Supongamos que $\mathcal{F} \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$. Se sigue entonces que $E \cap E' = \emptyset$, en contradicción con el hecho de que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro (en concreto con el apartado **c)** de **1.5.5**). Se verifica por tanto que $\mathcal{F} \in D_{(U_1 \cap U_2)} \cap W(X)$. Resumiendo hemos obtenido que dado $\mathcal{F} \in (D_{U_1} \cap W(X)) \cap (D_{U_2} \cap W(X))$, existe el abierto $D_{(U_1 \cap U_2)} \cap W(X)$ de $D(W(X))$ cumpliendo
  - $\mathcal{F} \in D_{(U_1 \cap U_2)} \cap W(X)$.
  - $D_{(D_{U_1} \cap D_{U_2})} \cap W(X) \subset (D_{U_1} \cap W(X)) \cap (D_{U_2} \cap W(X))$.

Queda así demostrado que $D(W(X))$ es una base para una topología en $W(X)$.

Puesto que $\mathcal{D} = \{D_U,\ \text{U abierto de } 2^X_{upp}\}$ es una subbase para $2^{2^X_{upp}}_{low}$ entonces $\mathcal{D}' = \{D_{U_1} \cap D_{U_2} \cap \cdots \cap D_{U_n} : D_{U_i} \in \mathcal{D} \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$ es base para $2^{2^X_{upp}}_{low}$. Tenemos entonces que la familia

$$D'(W(X)) = \{(D_{U_1} \cap D_{U_2} \cap \cdots \cap D_{U_n}) \cap W(X) : D_{U_i} \in \mathcal{D}\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

es base para $(W(X), T_{L_W})$. Comprobaremos ahora que la topología que genera $D(W(X))$ es la misma que la topología que genera $D'(W(X))$.

Es evidente que $D(W(X))\} \subset D'(W(X))$. Si $\mathcal{F} \in (D_{U_1} \cap D_{U_2} \cap \ldots \cap D_{U_n}) \cap W(X)$ entonces se tiene que $\mathcal{F} \in (D_{U_1 \cap U_2 \cap \cdots U_n} \cap W(X)) \subset (D_{U_1} \cap D_{U_2} \cap \cdots \cap D_{U_n}) \cap W(X)$ y, por tanto, $D'(W(X)) \subset D(W(X))$. □

El estudio de algunas propiedades topológicas de $(W(X), T_{L_W})$, en particular que $W(X)$ es Hausdorff y compacto, es básico a la hora de establecer la compactificación de Stone-Čech de un espacio normal X usando espacios no Hausdorff.

Proposición 1.5.12. *Sea X un espacio normal Hausdorff y consideremos el hiperespacio $2^{2^X_{upp}}$ con la topología semifinita inferior. Entonces se tiene que el subespacio $(W(X), T_{L_W})$ de $2^{2^X_{upp}}_{low}$ es un espacio Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \in W(X)$ tales que $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, se sigue entonces que existe $C_1 \in \mathcal{F}_1$ tal que $C_1 \notin \mathcal{F}_2$ y existe $C_2 \in \mathcal{F}_2$ tal que $C_2 \notin \mathcal{F}_1$.

Puesto que $C_1 \notin \mathcal{F}_2$, haciendo uso del apartado **d)** de la proposición $1.5.5$, se tiene que existe $C_1' \in F_2$ tal que $C_1 \cap C_1' = \emptyset$. Por otro lado de la normalidad de X se sigue que existirán dos abiertos U_1, U_1' disjuntos no vacíos de X, de manera que $C_1 \subset U_1$ y $C_1' \subset U_1'$.

Observamos entonces que los abiertos disjuntos B_{U_1} y $B_{U_1'}$ de 2^X_{upp} verifican que $\mathcal{F}_1 \cap B_{U_1} \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_2 \cap B_{U_1'} \neq \emptyset$, lo que nos permite asegurar que los conjuntos $D_{B_{U_1}}$ y $D_{B_{U_1'}}$ son abiertos de T_{L_W} tales que $\mathcal{F}_1 \in D_{B_{U_1}}$ y $\mathcal{F}_2 \in D_{B_{U_1'}}$.

Comprobemos que $D_{B_{U_1}} \cap D_{B_{U_1'}} = \emptyset$. Supongamos que existe $\mathcal{F}_3 \in W(X)$ con $\mathcal{F}_3 \in D_{B_{U_1}} \cap D_{B_{U_1'}}$. Esto nos lleva a que existe $E \in \mathcal{F}_3$ tal que $E \subset U_1$ y existe $E' \in \mathcal{F}_3$ tal que $E' \subset U_1'$. Llegamos así, puesto que $U_1 \cap U_1' = \emptyset$, a que $E \cap E' = \emptyset$ en contradicción con el hecho de que F_3 es un ultrafiltro. □

Antes de demostrar que $W(X)$ es compacto daremos unos lemas que más tarde nos harán falta.

Lema 1.5.13. *Sea* X *un espacio normal Hausdorff. Si* C *es un cerrado no vacío de* X *entonces el conjunto*

$$C^* = \{\mathcal{F} \in W(X) \mid C \in \mathcal{F}\}$$

es un cerrado de $W(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Realizaremos la demostración comprobando que su complementario, $W(X) - C^*$, es abierto.

Sea $\mathcal{F} \in W(X) - C^*$, es decir, $C \notin \mathcal{F}$ se sigue entonces que existe un $D \in \mathcal{F}$ tal que $D \cap C = \emptyset$. Así pues, $D \subset (X - C)$ y por tanto, llegamos a que el abierto $B_{(X-C)}$ de 2^X_{upp} tiene intersección no vacía con el ultrafiltro $\mathcal{F}$, obteniendo de este modo que $\mathcal{F} \in D_{(B_{(X-C)})} \cap W(X)$.

Además, si $\mathcal{F}' \in D_{(B_{(X-C)})} \cap W(X)$ entonces $\mathcal{F}' \cap (B_{(X-C)}) \neq \emptyset$, es decir, existe $D' \in \mathcal{F}'$ tal que $D' \subset (X - C)$. Por lo que $D' \cap C = \emptyset$ y por ello $C \notin \mathcal{F}'$, es decir, $\mathcal{F}' \notin C^*$. Con lo que se concluye

$$\mathcal{F} \in D_{B_{(X-C)}} \subset W(X) - C^*$$

y por tanto C^* es un cerrado. $\square$

Lema 1.5.14. *Sea* X *un espacio normal Hausdorff. Todo cerrado*

$$H \subset W(X),\ H = \{\mathcal{F}_i,\ i \in J\},$$

lo podemos escribir como

$$H = \bigcap_{i \in J'} C_i^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Para ello demostraremos que dado un punto $\mathcal{F} \in W(X)$ y un cerrado H de $W(X)$ tal que $\mathcal{F} \notin H$, existe un cerrado C^* de $W(X)$ tal que

$$\mathcal{F} \notin C^*, \quad H \subset C^*.$$

Sea $\mathcal{F} \in W(X)$ con $\mathcal{F} \notin H$ se tiene entonces que $\mathcal{F} \notin W(X) - H$ y por tanto existe $D_{B_U} \cap W(X)$ abierto de $D(W(X))$ de modo que

$$\mathcal{F} \in (D_{B_U} \cap W(X)) \subset (W(X) - H).$$

Como $\mathcal{F} \in (D_{B_U} \cap W(X))$ se deduce que existe un $D \in \mathcal{F}$ tal que $D \subset U$ y por ello, el cerrado $X - U$ de X verifica que $(X - U) \notin \mathcal{F}$, ya que en caso contrario $(X - U) \cap D \neq \emptyset$. Obtenemos así que $\mathcal{F} \notin (X - U)^*$.

Tomemos ahora el cerrado $(X - U)^*$ de $W(X)$ y $\mathcal{F}' \in H = \{\bigcap_{i \in J'} C_i^*\}$. Se sigue entonces que $\mathcal{F}' \in C_i^*$ para $i \in J'$, es decir, $C_i \in \mathcal{F}'$ para todo $i \in J'$. Por tanto $C_i \nsubseteq U$ para $i \in J'$, ya que en caso contrario llegaríamos a que $\mathcal{F}' \in W(X) - H$. Así que $C_i \subset X - U$ para $i \in J'$, por tanto $\mathcal{F}' \in (X - U)^*$ de donde se concluye que $H \subset (X - U)^*$.

□

Un resultado muy interesante que nos proporcionan estos lemas es la descripción de una base de cerrados para el espacio $W(X)$. Recordemos primero la definición de base de cerrados (ver [Ma-Ou-Pi.1], [E.1]).

Definición 1.5.15. Sean (X, T) un espacio topológico, $\mathcal{H} = \{C_i : i \in J\}$ una familia de subconjuntos de X y C_T la familia de todos los cerrados de X. Diremos que $\mathcal{H}$ es una base de cerrados si:

- $C_i \in C_T$ para todo $i \in J$
- Para todo $C \in C_T$ existe un $j \subset J$ tal que $C = \bigcap_{i \in j} C_i$

Corolario 1.5.16. *Sea X un espacio normal Hausdorff. La familia*

$$\mathcal{C}^* = \{C^* \setminus \ C \textit{ es un cerrado no vacío de } X\}$$

es una base de cerrados para el espacio $W(X)$.

Observación 1.5.17. Debido a que la familia $\mathcal{C}^*$ de $W(X)$ es cerrada para intersecciones finitas podemos definir $\mathcal{C}^*$-ultrafiltros a los que denotaremos por $\mathcal{F}^*$. Algunas veces nos referiremos a ellos simplemente como ultrafiltros.

Enunciaremos un resultado sobre bases de ultrafiltros en la siguiente proposición con el que trabajaremos más adelante (ver [Ma-Ou-Pi.1], [Walk.1]).

Proposición 1.5.18. *Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X cerrada para intersecciones finitas y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Existe un único $\mathcal{A}$-filtro, tal que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$.*

b) **b.1)** *$\mathcal{B}$ no es vacío y el vacío no esta en él.*

b.2) *Si $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ entonces se verifica que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Además, si la familia $\mathcal{B}$ cumple los apartados **b.1)** *y* **b.2)** *el $\mathcal{A}$-filtro del apartado* **a)***, al que designaremos por $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, es*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, B \in \mathcal{B}, \quad B \subset A\}$$

Proposición 1.5.19. *Sea X un espacio normal Hausdorff y consideremos el hiperespacio $2^{2^X_{upp}}$ con la topología semifinita inferior, entonces se tiene que el subespacio $(W(X), T_{L_W})$ de $2^{2^X_{upp}}_{low}$ es un espacio compacto.*

Demostración. Realizaremos la demostración haciendo uso de la caracterización de los espacios compactos en términos de ultrafiltros de cerrados:

X es compacto si y solo si todo $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$-ultrafiltro, cumple que $\bigcap_{C_i \in \mathcal{F}} C_i \neq \emptyset$. Donde $\mathcal{C}$ es además una base de cerrados de X.

Sea $\mathcal{F}^*$ un $\mathcal{C}^*$-ultrafiltro de $W(X)$:

$$\mathcal{F}^* = \{C_i^* = \{\mathcal{F} \in W(X) \mid C_i \in \mathcal{F}\},\ i \in I\}.$$

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{G}$ formado por los cerrados C_i de X tales que el cerrado C_i^* de $W(X)$ está en el ultrafiltro $\mathcal{F}^*$, es decir,

$$\mathcal{G} = \{C_i,\ i \in I \mid C_i^* \in \mathcal{F}^*\}.$$

Por ser $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro de $W(X)$ y teniendo en cuenta que para todo ${C_1}^*$, ${C_2}^*$ cerrados de $W(X)$ se verifica que ${C_1}^* \cap {C_2}^* = (C_1 \cap C_2)^*$, se sigue entonces que $\mathcal{G}$ cumple las siguientes propiedades:

1) $\mathcal{G}$ no es vacío y el vacío no está en él.

2) Si $C_1,\ C_2 \in \mathcal{G}$ entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{G}$.

Obtenemos así que $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es la familia de todos los subconjuntos cerrados de X, es por tanto base para un único filtro de X, al que denotaremos por $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{C \in \mathcal{A} \mid \exists B \in \mathcal{G}, \quad B \subset C\}.$$

Sea $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{A}$-ultrafiltro de X que contiene al filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Es evidente entonces que $\mathcal{F}' \in C_i^*$ para todo $C_i^* \in \mathcal{F}^*$, lo que nos permite asegurar que para todo $\mathcal{F}^*$, ultrafiltro de $W(X)$, se tiene

$$\bigcap_{C_i^* \in \mathcal{F}^*} C_i^* \neq \emptyset.$$

Concluimos de este modo que $W(X)$ es compacto como queríamos. $\square$

Proposición 1.5.20. *Sean $X,\ Y$ dos espacios normales Hausdorff y*

$$g : X \longrightarrow Y$$

una aplicación continua. Entonces existe

$$g^* : W(X) \longrightarrow W(Y)$$

extensión continua de g.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es constructiva, es decir, probaremos la existencia de tal aplicación construyendo una aplicación

$$g^* : W(X) \longrightarrow W(Y)$$

tal que $g^*|_X = g$. El primer paso consistirá en asociar a cada ultrafiltro de X un ultrafiltro de Y, para después comprobar que dicha asociación define una aplicación en las condiciones que buscamos.

Por ser X, Y espacios normales Hausdorff sabemos, por el corolario **1.4.9**, que $g : X \longrightarrow Y$ se extiende continuamente a la aplicación $2^g : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$ definida, para cada cerrado C de X, por $2^g(C) = \overline{g(C)}$.

Dado $\mathcal{F} \in W(X)$, como $\mathcal{F}$ es un cerrado de 2^X_{upp} que está formado por cerrados de X, podemos definir el conjunto

$$2^g(\mathcal{F}) = \{2^g(C) \mid C \in \mathcal{F}\}.$$

En primer lugar resulta evidente, a partir de la definición de ultrafiltro y de la propia definición del conjunto $2^g(\mathcal{F})$, que $2^g(\mathcal{F})$ es distinto del vacío y además el vacío no pertenece al conjunto.

Por otra parte si C'_1, $C'_2 \in 2^g(\mathcal{F})$ entonces existen C_1 y C_2 cerrados de X pertenecientes al ultrafiltro $\mathcal{F}$ tales que

$$C'_1 = 2^g(C_1) \qquad \text{y} \qquad C'_2 = 2^g(C_2).$$

Como $(C_1 \cap C_2) \in \mathcal{F}$ se deduce entonces

$$2^g(C_1 \cap C_2) \subset 2^g(C_1) \cap 2^g(C_2) = C'_1 \cap C'_2.$$

Resumiendo llegamos a que $2^g(\mathcal{F})$ es base para un único filtro del espacio Y, al que denotaremos por $\mathcal{F}'$.

$$\mathcal{F}' = \{C' \in 2^Y \mid \exists\, B \in 2^g(\mathcal{F}),\ B \subset C'\}.$$

Vamos a comprobar que además $\mathcal{F}' \in W(Y)$ es un filtro primo. Para ello tomemos $C_1' \cup C_2' \in \mathcal{F}'$, puesto que $2^g(\mathcal{F})$ es base para $\mathcal{F}'$, se sigue entonces que existe un $C \in \mathcal{F}$ tal que $2^g(C) \subset C_1' \cup C_2'$.

Teniendo en cuenta ahora la definición de las aplicaciones 2^g y g, las propiedades de $g^{-1}(C) = \{x \in X \mid g(x) \in C\}$ y de la unión llegamos a:

$$C \subset g^{-1}(g(C)) \subset g^{-1}(C_1' \cup C_2') = g^{-1}(C_1') \cup g^{-1}(C_2').$$

De donde se deduce entonces, por ser $\mathcal{F}$ ultrafiltro, que $g^{-1}(C_1') \cup g^{-1}(C_2') \in \mathcal{F}$. Así pues, puesto que $\mathcal{F}$ es también un filtro primo, tenemos que, o bien $g^{-1}(C_1') \in \mathcal{F}$, o bien $g^{-1}(C_2') \in \mathcal{F}$. Supongamos sin perdida de generalidad que $g^{-1}(C_1') \in \mathcal{F}$, se sigue entonces que $2^g(g^{-1}(C_1')) \in 2^g(\mathcal{F})$, esto es, $C_1' \in \mathcal{F}'$; concluyendo de este modo que $\mathcal{F}'$ es un filtro primo como queríamos.

Designaremos ahora por $\mathcal{F}$" al único ultrafiltro de Y que contiene al filtro $\mathcal{F}'$ para el que $2^g(\mathcal{F})$ es base.

$$2^g(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}".$$

Definimos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} g^* \quad : W(X) &\longrightarrow W(Y) \\ \mathcal{F} &\longrightarrow \qquad \mathcal{F}". \end{aligned}$$

Vamos a demostrar la continuidad de g^*.

Dado $g^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$" y D_{B_V} entorno abierto de $\mathcal{F}$" en $W(Y)$, existe $C" \in \mathcal{F}"$ tal que $C" \subset V$. Por ser X un espacio normal Hausdorff tenemos entonces que existen V', V" abiertos de Y tales que

$$C" \subset V" \subset \overline{V}" \subset V' \subset \overline{V}' \subset V.$$

- Consideremos el cerrado $X - g^{-1}(V')$ de X. Si $X - (g^{-1}(V'))$ fuese vacío, entonces para cualquier $\mathcal{F} \in W(X)$ se tendría que $g^*(\mathcal{F}) \in D_{B_V}$, y por tanto $g^*(W(X)) \subset D_{B_V}$. Quedando así demostrada en este caso la continuidad de la aplicación g^*.
- Supongamos ahora que $X - (g^{-1}(V'))$ no fuese vacío, entonces se seguiría la existencia de un cerrado C del espacio X de manera que

$$C \in \mathcal{F} \qquad \text{y} \qquad C \subset g^{-1}(V'),$$

puesto que si así no fuera, entonces podríamos deducir que $X - (g^{-1}(V'))$ pertenecería a $\mathcal{F}$; y sin embargo su imagen mediante la aplicación 2^g tendría intersección vacío con el cerrado C", lo cual sería una contradicción.

Tomemos ahora el abierto

$$D_{B_{\left(g^{-1}(V')\right)}}$$

en $W(X)$ y sea $\mathcal{P} \in W(X)$ con

$$\mathcal{P} \in D_{B_{\left(g^{-1}(V')\right)}},$$

se sigue entonces que existe un cerrado D de X, con $D \in \mathcal{P}$, tal que $D \subset g^{-1}(V')$, verificando que $\overline{g(D)} \subset \overline{V}' \subset V$; es decir, $g^*(P) \subset D_{B_V}$, así pues

$$g^*\big(D_{B_{\left(g^{-1}(V')\right)}}\big) \subset D_{B_V}.$$

Concluimos entonces que la aplicación g^* que hemos definido es una extensión continua de la aplicación g, si consideramos a X como el subespacio de $W(X)$ formado por todos los ultrafiltros fijos de X.

$\square$

Proposición 1.5.21. *Sea X un espacio normal Hausdorff. Entonces el espacio*

$$(W(X), T_{L_W})$$

es una compactificación Hausdorff del espacio (X, T).

DEMOSTRACIÓN. Por la proposiciones **1.5.12** y **1.5.19** sabemos que $(W(X), T_{L_W})$ es un espacio compacto Hausdorff. Definimos ahora la siguiente aplicación :

$$\begin{aligned} \Phi \quad : X \longrightarrow & \qquad\qquad W(X) \\ x \longrightarrow & \quad \mathcal{F}_x = \{C \subset X, \quad C \text{ cerrado } \mid x \in C\}. \end{aligned}$$

Como X es un espacio Hausdorff, Φ es claramente inyectiva y por consiguiente biyectiva sobre su imagen. De las dos siguientes igualdades obtenemos que Φ es una aplicación continua y cerrada.

$$\Phi^{-1}(C^*) = C$$

$$\Phi(C) = C^* \cap \Phi(X).$$

Llegando así, a que Φ es un homeomorfismo sobre su imagen $\Phi(X)$.

Veamos por último que $\Phi(X)$ es denso en $W(X)$. Para ello basta con observar que como $\mathcal{C}^*$ es una base de cerrados en $W(X)$, entonces la familia:

$$\mathcal{W} = \{W(X) - C^* \mid C^* \in \mathcal{C}^*\},$$

es una base de abiertos de $W(X)$ verificando que

$$(W(X) - C^*) \cap \Phi(X) \neq \emptyset.$$

$\square$

Proposición 1.5.22. *Sea X un espacio normal Hausdorff y consideremos el hiperespacio $2^{2^X_{upp}}$ con la topología semifinita inferior. Entonces el subespacio $W(X)$ de $2^{2^X_{upp}}_{low}$ es justamente la compactificación de Stone-Čech del espacio X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea I el intervalo unidad. Como X, I son dos espacios normales por la proposición **1.5.20**, sabemos que para toda aplicación continua

$$f : X \longrightarrow I$$

existe

$$\begin{aligned} f^* \quad &: W(X) \longrightarrow W(I) \\ &\qquad \mathcal{F} \longrightarrow \qquad \mathcal{F}" \end{aligned}$$

extensión continua de f.

Dado que I es un compacto Hausdorff, entonces podemos identificar el subespacio $W(I)$ con I. De igual forma, en la aplicación f^* podemos identificar el ultrafiltro $\mathcal{F}"$ con un punto $"y"$ del intervalo I. Esto nos permite redefinir la extensión de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f^* \quad &: W(X) \longrightarrow I \\ &\qquad \mathcal{F} \longrightarrow \qquad y \end{aligned}$$

Además se verifica que:

$$(f^*) \circ (\Phi) = f$$

donde $"\Phi"$ es la aplicación continua :

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: X \longrightarrow \qquad\qquad W(X) \\ &\quad x \longrightarrow \quad \mathcal{F}_x = \{C \in 2^X \mid x \in C\} \end{aligned}$$

Llegamos así a que

$$(W(X), T_{L_W}, \Phi)$$

es topológicamente equivalente a la compactificación de Stone-čech de X. $\square$

CAPÍTULO 2

PROPIEDADES DE EXTENSIÓN DE APLICACIONES Y PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO EN HIPERESPACIOS

2.1. INTRODUCCIÓN

Dedicamos la primera sección a comprobar que los hiperespacios con la *topología semifinita superior* juegan un papel importante en el problema de extensión de funciones. En este sentido obtendremos que si Y un espacio topológico y X un espacio de Tychonov, entonces cualquier aplicación continua $f : U \longrightarrow 2^X_{upp}$, definida sobre un abierto U de Y se puede extender continuamente a todo el espacio Y. Si restringimos la clase de los espacios, esto es, si suponemos que X, Y son dos espacios compactos Hausdorff, entonces cualquier aplicación continua $f : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ se puede extender de manera continua a todo el hiperespacio 2^Y_{upp}. Por último, destacaremos que el hiperespacio 2^X_{upp} es un extensor absoluto, si X es compacto métrico, para la clase de los espacios compactos métricos.

En la segunda y última sección de este capítulo, nos fijaremos en la propiedad del punto fijo en los hiperespacios. Tras comprobar que si X es un compacto Hausdorff, 2^X_{upp} tiene la propiedad del punto fijo y que si X un espacio normal Hausdorff y 2^X_{upp} tiene la propiedad del punto fijo, entonces X es numerablemente compacto, obtendremos una caracterización de la compacidad, en el caso de espacios paracompactos Hausdorff, en términos de la propiedad del punto fijo.

2.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE EXTENSIÓN DE APLICACIONES

En las siguientes proposiciones estudiamos la extensión de funciones continuas definidas sobre hiperespacios, haciendo variar las condiciones de los espacios.

Proposición 2.2.1. *Sea Y un espacio topológico y X un espacio de Tychonov. Sea U un abierto del espacio Y y $f : U \longrightarrow 2^X_{upp}$ una aplicación continua. Se tiene entonces que existe una aplicación $\hat{f} : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ tal que $\hat{f}$ es una extensión continua de f.*

DEMOSTRACIÓN. Dada la aplicación continua $f : U \longrightarrow 2^X_{upp}$ definimos una nueva aplicación $\hat{f} : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ por:

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in U \\ X & \text{si } y \in Y - U. \end{cases}$$

Comprobemos que $\hat{f}$ es una extensión continua de la aplicación f.

Por como hemos definido la aplicación $\hat{f}$ es evidente que es una extensión de la aplicación f, es decir, $\hat{f}|_U = f$. Así pues, solo nos falta comprobar la continuidad de $\hat{f}$.

- $\underline{\mathbf{y_0 \in (Y - U)}}$.

  Puesto que en este caso $\hat{f}(y_0) = X \in 2^X_{upp}$, se tiene entonces que el único abierto de 2^X_{upp}, que contiene al punto X, es $B_X = \{C \in 2^X_{upp} \mid C \subset X\} = 2^X$.

  Dado que la imagen mediante la aplicación $\hat{f}$ de cualquier entorno abierto V de y_0 en Y está contenida en 2^X_{upp}, se sigue entonces que $\hat{f}(V) \subset B_X$ para cualquier entorno abierto V de y_0 en Y ; por tanto, $\hat{f}$ es continua en $y_0 \in (Y - U)$.

- $\underline{\mathbf{y_0 \in U}}$.

  Como f es una aplicación continua y en este caso $\hat{f}(y) = f(y)$, se tiene entonces que dado B_V, entorno abierto del punto $\hat{f}(y)$ en 2^X_{upp}, existe W un entorno abierto del punto y_0 en U, cumpliéndose que $f(W) \subset B_V$.

Por otro lado, como U es un abierto de Y, entonces W es también un abierto del punto y_0 en Y y puesto que $W \subset U$, se sigue entonces $\hat{f}(W) = f(W)$. Llegamos de esta forma a que $\hat{f}(W) \subset B_V$, quedando de este modo demostrado que la aplicación $\hat{f}$ es continua.

□

Si trabajamos con una clase de espacios topológicos más reducida, en concreto si trabajamos con los espacios compactos Hausdorff, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2. *Sean dos espacios compactos Hausdorff X, Y. Si la aplicación $f : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ es una aplicación continua, entonces se tiene que existe una aplicación $\hat{f} : 2^Y_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ tal que $\hat{f}$ es una extensión continua de f.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos a partir de la aplicación continua $f : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ la aplicación $\hat{f} : 2^Y_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ como

$$\begin{aligned} \hat{f} \ : 2^Y_{upp} \longrightarrow & \qquad 2^X_{upp} \\ C \longrightarrow & \quad \hat{f}(C) = \bigcup_{y \in C} f(y). \end{aligned}$$

Comenzaremos demostrando que dicha aplicación está bien definida, es decir, que $\hat{f}(C) = \bigcup_{y \in C} f(y)$ es un punto de 2^X_{upp} para todo $C \in 2^Y_{upp}$ y por tanto, un cerrado de X. Obsérvese que como X es un espacio compacto Hausdorff, nos bastará entonces con demostrar que $\hat{f}(C) = \bigcup_{y \in C} f(y)$ es compacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ un recubrimiento de $\bigcup_{y \in C} f(y)$ en X, donde U_α es un abierto de X para todo $\alpha \in \Delta$. Para cada $y \in C$ se tiene que $f(y)$ es un compacto por ser un cerrado dentro del compacto X. Así pues, para cada $y \in C$ existen una cantidad finita, puede que incluso solamente uno, de abiertos del recubrimiento $\mathcal{U}$ que contienen al compacto $f(y)$ y que denotaremos por $\{U_{\alpha_1^y}, U_{\alpha_2^y}, \ldots, U_{\alpha_{n_y}^y}\} \subset \mathcal{U}$.

$$f(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i^y}.$$

Se obtiene entonces, usando la continuidad de f, que para cualquiera que sea $y \in C \in 2^Y_{upp}$ se verifica:

$$f(y) \in B_{(\bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i^y})} \Longrightarrow y \in f^{-1}\Big(B_{(\bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i^y})}\Big).$$

De esta forma se llega al siguiente recubrimiento de $C \subset Y$:

$$\mathbf{R} = \big\{f^{-1}\big(B_{(\bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i^y})}\big)\big\}_{y \in C}.$$

Puesto que C es un cerrado dentro del compacto X, se sigue entonces que C es también compacto y por tanto, el recubrimiento $\mathbf{R}$ de C tiene un subrecubrimiento finito de C, al que nos referiremos por $\mathbf{R}'$.

$$\mathbf{R}' = \big\{f^{-1}\big(B_{(\bigcup_{i=1}^{n_{y_1}} U_{\alpha_i^{y_1}})}\big), f^{-1}\big(B_{(\bigcup_{i=1}^{n_{y_2}} U_{\alpha_i^{y_2}})}\big), \ldots, f^{-1}\big(B_{(\bigcup_{i=1}^{n_{y_k}} U_{\alpha_i^{y_k}})}\big)\big\}$$

donde $y_i \in C$ para todo $i = \{1, \ldots, k\}$. De modo que el conjunto

$$\mathbf{R}'' = \big\{B_{(\bigcup_{i=1}^{n_{y_1}} U_{\alpha_i^{y_1}})}, B_{(\bigcup_{i=1}^{n_{y_2}} U_{\alpha_i^{y_2}})}, \ldots, B_{(\bigcup_{i=1}^{n_{y_k}} U_{\alpha_i^{y_k}})}\big\}$$

donde $y_i \in C$ para todo $i = \{1, \ldots, k\}$, es un recubrimiento finito de $f(y)$ en 2^X_{upp} y por ello

$$\mathcal{U}' = \big\{U_{\alpha_1^{y_1}}, \ldots, U_{\alpha_{n_{y_1}}^{y_1}}, U_{\alpha_1^{y_2}}, \ldots, U_{\alpha_{n_{y_2}}^{y_2}}, \ldots, U_{\alpha_1^{y_k}}, \ldots, U_{\alpha_{n_{y_k}}^{y_k}}\big\}$$

donde $y_i \in C$ para todo $i = \{1, 2, \ldots, k\}$, es un subrecubrimiento finito del recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ de $\hat{f}(C) = \bigcup_{y \in C} f(y)$ en X. Queda así demostrado que $\hat{f}(C)$ es un compacto de X, compacto Hausdorff, y por tanto cerrado.

Es evidente que $\hat{f}|_Y = f$. Así que solo falta por demostrar la continuidad de la aplicación $\hat{f} : 2^Y_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$. Para ello tomemos $C \in 2^Y_{upp}$ y B_U un abierto de $\hat{f}(C)$ en 2^X_{upp}, esto es, $\hat{f}(C) \subset U$.

De la continuidad de la aplicación f se sigue ahora que $f^{-1}(B_U)$ es un conjunto abierto de Y, de modo que $B_{f^{-1}(B_U)}$ es un abierto de 2^Y_{upp}. Vamos a comprobar que $B_{f^{-1}(B_U)}$ contiene al punto $C \in 2^Y_{upp}$ y además verifica que $\hat{f}(B_{f^{-1}(B_U)}) \subset B_U$.

Puesto que

$$f^{-1}(\hat{f}(C)) = f^{-1}\left(\bigcup_{y \in C} f(y)\right) = \bigcup_{y \in C} f^{-1}(f(y)) = C,$$

se sigue entonces $C = f^{-1}(\hat{f}(C)) \subset f^{-1}(B_U)$. Obtenemos así que $C \in B_{f^{-1}(B_U)}$.

Tomemos $D \in B_{f^{-1}(B_U)}$, esto es, $D \subset f^{-1}(B_U)$. Se obtiene que $d \in f^{-1}(B_U)$ para todo $d \in D$ y por tanto, $f(d) \in (B_U)$. Lo que nos lleva a que $\hat{f}(D) \subset B_U$, pudiendo concluir de este modo

$$\hat{f}(B_{f^{-1}(B_U)}) \subset B_U.$$

La prueba de la proposición queda así terminada. $\square$

Finalizamos esta sección comprobando que si X es un espacio métrico compacto su hiperespacio 2^X_{upp} es un extensor absoluto (AE) para la clase de los compactos métricos.

Proposición 2.2.3. *Si X un espacio métrico compacto, entonces su hiperespacio 2^X_{upp} es un extensor absoluto para la clase de los espacios métricos compactos, es decir, si Y espacio métrico compacto y $A \subset Y$ es un cerrado tal que la aplicación*

$$f : A \longrightarrow 2^X_{upp}$$

es continua, entonces existe una aplicación

$$f^* : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$$

que es una extensión continua de f.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que (Y,d) y (X,d') son dos espacios métricos compactos y $A \subset Y$ un subconjunto cerrado tal que la aplicación $f : A \longrightarrow 2^X_{upp}$ es continua. Para cada punto $y \in Y$ denotaremos por A_y al conjunto de puntos de A cuya distancia al punto $y \in Y$ es igual que la distancia del punto y al conjunto A.

$$A_y = \{a \in A \mid d(a,y) = d(y,A)\}.$$

Obsérvese que si el punto $y \in Y$ en particular está en A, entonces el conjunto A_y está formado únicamente por el punto y.

Sea la aplicación $g : Y \longrightarrow 2^A_{upp}$ definida para cada punto y de Y por

$$\begin{aligned} g \quad : Y \longrightarrow & \quad 2^A_{upp} \\ y \longrightarrow & \quad A_y. \end{aligned}$$

Utilizamos ahora la aplicación continua $f : A \longrightarrow 2^X_{upp}$, del enunciado de la proposición, para definir la aplicación $h : 2^A_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ en cada cerrado C de A como

$$\begin{aligned} h \quad : 2^A_{upp} \longrightarrow & \quad 2^X_{upp} \\ C \longrightarrow & \quad \bigcup_{y \in C} f(y). \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que:

- **a)** La aplicación **h** está bien definida, esto es, $\bigcup_{y \in C} f(y)$ es un cerrado de X.
- **b)** La aplicación **h** es continua.
- **c)** La aplicación **g** está bien definida , es decir, que el conjunto A_y es un cerrado de A y por tanto un punto de 2^A_{upp}.
- **d)** La aplicación **g** es continua.

Es obvio que una vez demostrados **a)**, **b)**, **c)** y **d)** obtendremos que la composición de las aplicaciones h y g es una aplicación $f^* = h \circ g : Y \longrightarrow 2^X_{upp}$ continua tal que para cada $y \in A \subset Y$ verifica que

$$f^*(y) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(A_y) = h(y) = f(y).$$

Es decir, la aplicación continua f^* restringida al conjunto A coincide con la aplicación f. Podremos así concluir que f^* es una extensión continua de la aplicación f y de este modo la proposición quedará demostrada.

Demostración de **a)** y **b)**.

Puesto que A es un conjunto cerrado del espacio Y que es métrico compacto, entonces A con la topología restringida es también un espacio métrico compacto. Así los espacios X y A junto con la aplicación $f : A \longrightarrow 2^X_{upp}$, del enunciado de esta proposición verifican las condiciones de la proposición **2.2.2** y por tanto, sabemos que existe una aplicación $\hat{f} : 2^A_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ tal que $\hat{f}$ es una extensión continua de f. Es más, en la demostración de la proposición **2.2.2** hemos comprobado que la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{f} \;\; : 2^A_{upp} \longrightarrow & \quad 2^X_{upp} \\ C \longrightarrow & \quad \bigcup_{y \in C} f(y) \end{aligned}$$

es una extensión continua de f.

Observar que en nuestro caso la aplicación h es exactamente $\hat{f}$ quedando así demostrado que la aplicación h está bien definida y es continua como queríamos.

Demostración de **c)**

Sea $\overline{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A_y \subset A$ convergente, entonces por ser A un cerrado en Y, se sigue que $\overline{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $a_0 \in A$. Como $a_n \in A_y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene entonces que $d(a_n, y) = d(A, y)$. Si aplicamos límites a ambos lados de la igualdad, dado que la distancia es una función continua, obtenemos

$$d(y, A) = \lim_{n\to\infty} d(y, a_n) = d(y, \lim_{n\to\infty} a_n) = d(y, a_0).$$

Hecho que nos permite poder concluir que $a_0 \in A_y$. Llegamos de esta forma a que A_y es un cerrado de A, y por tanto que la aplicación g está bien definida como queríamos demostrar.

Obviamente se tiene que A_y es un cerrado dentro del compacto A, así pues, A_y es también compacto.

Demostración de **d)**

Demostremos ahora, por reducción al absurdo, que la aplicación $g : Y \longrightarrow 2^A_{upp}$, definida por $g(y) = A_y = \{a \in A \mid d(a, y) = d(y, A)\}$, es continua.

Para cada $y \in Y$ y para todo $\varepsilon > 0$ definimos el siguiente conjunto abierto del espacio Y en A:

$$U^y_\varepsilon = \{x \in A \mid d(x, A_y) < \varepsilon\}.$$

A partir de U^y_ε definimos el abierto básico $B_{U^y_\varepsilon}$ de 2^A_{upp}

$$B_{U^y_\varepsilon} = \{C \in 2^A \mid d(c, A_y) < \varepsilon \quad \forall\, c \in C\}.$$

Obsérvese que el abierto básico $B_{U^y_\varepsilon}$ contiene siempre al punto A_y para cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Supongamos que la aplicación g no es continua en un punto y_0 del espacio Y. Se sigue entonces que existe algún $\varepsilon_0 > 0$, de modo que para el abierto básico $B_{U^{y_0}_{\varepsilon_0}}$ no existe un abierto U de y_0 en Y, verificando que su imagen mediante g esté incluida en $B_{U^{y_0}_{\varepsilon_0}}$.

Sea $B(y_0, \varepsilon_n)$, la bola del espacio Y, de centro el punto y_0 y de radio $\varepsilon_n > 0$. Formamos la familia $\mathcal{B} = \{B(y_0, \varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, que es una base de entornos del punto y_0 en Y. Por ser g no continua en el punto y_0, se deduce que la imagen de cualquier entorno de esta base no puede estar contenido, en el abierto $B_{U^{y_0}_{\varepsilon_0}}$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$g(B(y_0, \varepsilon_n)) \not\subset B_{U^{y_0}_{\varepsilon_0}}.$$

Escojamos en cada bola $B(y_0, \varepsilon_n) \in \mathcal{B}$ un punto y_n y formemos la sucesión $\overline{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obtenemos así, una sucesión $\overline{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge al punto y_0, verificando además que para todo $n \in \mathbb{N}$, $g(y_n) = A_{y_n} \notin B_{U^{y_0}_{\varepsilon_0}}$. Así tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in g(y_n) = A_{y_n}$ tal que $d(b_n, A_{y_0}) \geq \varepsilon_0$.

Consideremos ahora la sucesión $\overline{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n \in A$. Puesto que $\overline{b} \subset A$ y A es compacto, tendrá una subsucesión convergente. Por comodidad y sin perdida de generalidad denotaremos a la subsucesión de igual forma que a la sucesión y a su límite por $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, con $b \in A$.

Si tenemos en cuenta que

$$d(y_0, A) \leq d(y_0, b_n) \leq d(y_0, y_n) + d(y_n, b_n)$$

y aplicamos límites a ambos lados de la desigualdad, usando de nuevo la continuidad de la distancia y teniendo en cuenta que como $b_n \in g(y_n) = A_{y_n}$ entonces $d(y_n, b_n) = d(y_n, A)$, llegamos a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d(y_0, A) \leq d(y_0, \lim_{n\to\infty} b_n) \leq d(y_0, \lim_{n\to\infty} y_n) + d(\lim_{n\to\infty} y_n, \lim_{n\to\infty} b_n) = \\ d(y_0, \lim_{n\to\infty} y_n) + d(\lim_{n\to\infty} y_n, A) = d(y_0, y_0) + d(y_0, A) = d(y_0, A). \end{aligned}$$

Esto es,

$$d(y_0, A) \leq d(y_0, b) \leq d(y_0, A) \qquad \Longrightarrow \qquad d(y_0, b) = d(y_0, A).$$

por tanto $b \in A_{y_0}$.

Pero por otro lado, gracias a la continuidad de la distancia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} d(b_n, A_{y_0}) = d(\lim_{n\to\infty} b_n, A_{y_0}) = d(b, A_{y_0}) \geq \varepsilon_0.$$

Lo que está en contradicción con el resultado previo donde hemos obtenido que $b \in A_{y_0}$. Así pues, como deseábamos, nuestra aplicación g es continua en todo punto $y_0 \in Y$.

$\square$

2.3. HIPERESPACIOS Y PUNTOS FIJOS

Uno de los resultados más llamativos de esta sección es la caracterización de la compacidad de los espacios paracompactos Haussdorf, usando la propiedad del punto fijo, además de calcular el tipo de homotopía del hiperespacio de cualquier espacio de Tychonov.

Comenzamos pues esta sección fijándonos en la propiedad del punto fijo en los hiperespacios. Las dos proposiciones siguientes servirán para obtener la caracterización de la compacidad en el caso de que el espacio sea paracompacto Hausdorff, usando la propiedad del punto fijo.

Proposición 2.3.1. *Si X es un compacto Hausdorff entonces 2^X_{upp} tiene la propiedad del punto fijo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ una aplicación continua. Definimos a partir de la aplicación f el siguiente conjunto del hiperespacio 2^X_{upp} :

$$\mathbf{K} = \{C \in 2^X_{upp} \mid f(C) \subset C\}.$$

Obsérvese que evidentemente $f(X) \subset X$, así que al menos el conjunto $\mathbf{K}$ contiene al punto $X \in 2^X_{upp}$ y por tanto $\mathbf{K}$ no es vacío. Además, si $C \in \mathbf{K}$ también $f(C) \in \mathbf{K}$. En efecto, puesto que $f(C) \subset C$, C pertenece a la adherencia de $f(C)$

en 2^X_{upp}, $C \in \overline{f(C)}$. Si tenemos ahora en cuenta la continuidad de la aplicación f se sigue que

$$f(C) \in f(\overline{f(C)}) \subset \overline{f(f(C))} \implies \quad f(C) \in \overline{f(f(C))}.$$

Con lo cual, teniendo en cuenta la definición de adherencia en hiperespacios, obtenemos $f(f(C)) \subset f(C)$ y así, $f(C) \in \mathbf{K}$.

Utilizamos la relación de inclusión de conjuntos para establecer en el conjunto $\mathbf{K}$ la siguiente relación de orden:

$$A < B \quad \text{si} \quad B \subset A.$$

Consideremos el conjunto $\mathcal{H} = \{\mathbf{C}_\alpha : \ \alpha \in \mathbf{\Lambda}\} \subset \mathcal{K}$ donde $\mathcal{H}$ es una cadena del conjunto $\mathbf{K}$, es decir, para cada par C_{α_i}, $C_{\alpha_j} \in \mathcal{H}$ se tiene que $C_{\alpha_i} \subset C_{\alpha_j}$ ó $C_{\alpha_j} \subset C_{\alpha_i}$. Podemos entonces deducir que el conjunto $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de la intersección finita, pero como además estamos suponiendo que X es un espacio compacto Hausdorff, obtenemos que

1. $\cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \neq \emptyset$ con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.
2. $\cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \subset C_\alpha$ con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Que $\cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \subset C_\alpha$ con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, es equivalente a decir que $C_\alpha \in \overline{\cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha}$ con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Usando la aplicación continua f, obtenemos que $f(C_\alpha) \in f(\overline{\cap_\alpha C_\alpha}) \subset \overline{f(\cap_\alpha C_\alpha)}$, esto es, $f(C) \in \overline{f(\cap_\alpha C_\alpha)}$ con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. De nuevo haciendo uso de la definición de adherencia en hiperespacios se sigue que $f(\cap_\alpha C_\alpha) \subset f(C_\alpha)$, con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Se tiene además que $f(\cap_\alpha C_\alpha) \subset \cap_\alpha f(C_\alpha) \subset \cap_\alpha C_\alpha$ con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. De donde se obtiene, usando la definición de $\mathbf{K}$, que $\cap_\alpha C_\alpha \in \mathbf{K}$, con $C_\alpha \in \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Esto implica, puesto que $\cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \subset C_\alpha$, $C_\alpha < \cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ para todo $C_\alpha \in \mathcal{H}$, que toda cadena en el conjunto $\mathbf{K}$ tiene una cota superior, $\cap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$; y haciendo uso del lema de Zorn, obtenemos que existe un elemento maximal $K \in \mathbf{K}$, esto es, para todo $C \in \mathbf{K}$ con $K < C$ se sigue que $C = K$ y además $f(K) \subset K$ y por tanto $K < f(K)$, de donde se concluye que $f(K) = K$ con lo que la demostración queda así terminada.

$\square$

Proposición 2.3.2. *Sea X un espacio normal Hausdorff. Si 2^X_{upp} tiene la propiedad del punto fijo entonces X es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que si X no es numerablemente compacto entonces 2^X_{upp} no tiene la propiedad del punto fijo.

Supongamos que X no es numerablemente compacto, se sigue que existe un subconjunto cerrado $C \subset X$, C discreto numerable (ver [Ma-Ou-Pi.1]):

$$C = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}.$$

Por ser X un espacio normal Hausdorff y $C = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una familia discreta numerable de cerrados de X, se sigue que (ver [Ma-Ou-Pi.1])

existe una familia de abiertos $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ de X tal que $a_i \in V_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$.

Consideramos ahora el abierto $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ de X y el abierto B_V de 2^X_{upp} y definimos la aplicación $f : V \longrightarrow V$ por

$$f(x) = \begin{cases} a_2 & \text{si } x \in V_1. \\ a_3 & \text{si } x \in V_2. \\ \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & \text{si } x \in V_n. \\ \vdots & \vdots. \end{cases}$$

La aplicación f es cerrada puesto que todo subconjunto de un cerrado discreto es también cerrado. Esto nos permite poder definir la aplicación:

$$\begin{aligned} f' \;: B_V &\longrightarrow \quad B_V \\ D &\longrightarrow \quad f(D). \end{aligned}$$

Podemos suponer sin perdida de generalidad que los entornos abiertos de $f(D)$ en B_V son de la forma B_W, donde B_W es un abierto básico de 2^X_{upp}, con $f(D) \in B_W \subset B_V$. Es decir, $f(D) \subset W \subset V$, así pues, tenemos que W es entorno abierto de $f(D)$ en V.

Aplicando ahora la continuidad de la aplicación f al abierto W de V, obtenemos que existe W' abierto de V tal que $D \subset W'$ y $f(W') \subset W$.

Con todo lo hasta aquí obtenido podemos ya concluir que existe un abierto de W' de D en V, que verifica que su imagen mediante f' está totalmente incluida en W; es decir, existe W' entorno abierto de D tal que $f'(W') \subset W \subset V$. Obtenemos así, que la aplicación f' es continua.

Definamos ahora una nueva aplicación

$$\hat{f} : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$$

del siguiente modo

$$\hat{f}(D) = \begin{cases} \hat{f}(D) = f'(D) & \text{si } D \subset V \\ C & \text{si } D \notin B_V \end{cases}$$

$\hat{f}$ es una aplicación continua definida en 2^X_{upp} y sin embargo no tiene punto fijo. Concluimos así que si 2^X_{upp} tiene la propiedad del punto fijo, entonces el espacio X es numerablememte compacto.

□

Puesto que todo espacio paracompacto Hausdorff es siempre un espacio normal Hausdorff ([E.1], pag. 300) y todo espacio numerablemente compacto y paracompacto Hausdorff es un espacio compacto Hausdorff ([E.1], pag. 306) a partir de las proposiciones $\mathbf{2.3.1}$ y $\mathbf{2.3.2}$ obtenemos el corolario que enunciamos a continuación

Corolario 2.3.3. *Un espacio* X *paracompacto Hausdorff es compacto si y solo si* 2^X_{upp} *tiene la propiedad del punto fijo.*

CAPÍTULO 3

UNA BASE DE ENTORNOS PARA EL CASO MÉTRICO COMPACTO.

3.1. INTRODUCCIÓN

Dedicamos este capítulo a la obtención de una base de entornos abiertos de la copia canónica de un espacio métrico compacto X, en su hiperespacio 2^X_{upp}. El papel que jugará esta base de entornos abiertos en las demostraciones de los resultados más relevantes de la primera sección del capítulo IV, justifica en parte la dedicación de este capítulo al estudio de dicha base.

Comenzaremos dando su definición y demostrando que efectivamente $\mathcal{U}$ es una base de entornos para X en 2^X_{upp}. Proseguiremos comprobando que los abiertos, que pertenecen a dicha base, tienen la misma forma que un espacio discreto con una cantidad finita de puntos, esto es, la misma forma que un poliedro muy simple, para después demostrar que sin embargo no tienen, en general, el mismo tipo de homotopía que un espacio T_1; obtenemos así, uno de los resultados más interesantes de esta memoria.

Daremos también una nueva caracterización de la homotopía débil (homotopía en todos los entornos de los espacios en el cubo de Hilbert) entre funciones definida sobre espacios métricos compactos en función de los elementos de dicha base, es decir, comprobaremos que: "Dados X, Y métricos compactos y $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas, entonces f y g son débilmente homotópicas si y solo si las aplicaciones f y g son homotópicas en U_ε para todo $\varepsilon > 0$." Dicha caracterización nos permitirá en el siguiente capítulo, probar que las descripciones de la forma para los espacios métricos compactos de J.M.R. Sanjurjo [Sa.3] y K. Borsuk [Bo.6] son las mismas pero cambiando el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$, como espacio ambiente, por el hiperespacio del métrico compacto en cuestión con la *topología semifinita superior*, 2^X_{upp}.

Por último comprobaremos que el hiperespacio 2^X_{upp} de un espacio X de Tychonov tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

3.2. UNA BASE DE ENTORNOS

Comenzamos describiendo una familia de subconjuntos de 2^X_{upp} cuando X es un espacio métrico compacto, para después demostrar una proposición en la que afirmamos que dicha familia está formada por abiertos de 2^X_{upp} y que además es una base de entornos de la copia canónica de X en 2^X_{upp}. Como ya se comentó en la introducción, esta base de entornos será básica para la obtención de resultados posteriores, no solo en este capítulo sino también a lo largo del siguiente capítulo en el que se sustituirá el Cubo de Hilbert por los hiperespacios y los entornos abiertos del espacio en el Cubo de Hilbert por esta base de entornos del espacio en su hiperespacio, para obtener así, una reinterpretanción de la descripción obtenida por J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] de la teoría de la forma para el caso de los espacios métricos compactos.

Observación 3.2.1. Dado el espacio métrico (X, d) y el cerrado $C \subset X$, $C \neq 0$, denotamos por $diam(C)$ al siguiente número:

$$diam(C) = \sup\{d(c, c') \mid c, c' \in C\}$$

Definición 3.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Consideraremos a X sumergido como un subconjunto denso de su hiperespacio identificándolo mediante la inmersión canónica $\Phi : X \longrightarrow 2^X_{upp}$, con su copia $\Phi(X)$.

Dado $\varepsilon > 0$, se define el siguiente conjunto de 2^X_{upp}:

$$U_\varepsilon = \{C \in 2^X_{upp} \mid diam(C) < \varepsilon\}.$$

Observación 3.2.3. Algunas veces, y siempre que no haya problema, nos referiremos a la copia canónica de X en 2^X_{upp}, $\Phi(X)$, simplemente por X.

Proposición 3.2.4. *El conjunto* U_ε*, para todo* $\varepsilon > 0$*, es un abierto de* 2^X_{upp} *y la familia de abiertos* $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *es una base de entornos de* X *en su hiperespacio* 2^X_{upp}*.*

En particular se tiene que $\{U_{1/n}\}_{n\in N}$ *es una base numerable de entornos de* X *en su hiperespacio* 2^X_{upp}*.*

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la demostración en dos partes: primero comprobaremos que U_ε, para todo $\varepsilon > 0$, es un abierto de 2^X_{upp} que contiene a $\Phi(X)$ y después comprobaremos que para cualquiera que sea U, entorno abierto de $\Phi(X)$ en 2^X_{upp}, existe $\varepsilon_0 > 0$ de manera que

$$\Phi(X) = X \subset U_{\varepsilon_0} \subset U.$$

Como $diam\,(\{x\}) = 0$ para todo $\{x\} \in \Phi(X)$, es obvio entonces que $\Phi(X) \subset U_\varepsilon$ para cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Pasemos a verificar que U_ε es un abierto de 2^X_{upp} para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $C \in U_\varepsilon$ con $diam(C) = r < \varepsilon$ y tomemos la bola generalizada en X de centro C y radio $\delta = (\varepsilon - r)/2$ que denotaremos por $B(C, \delta)$. Así pues, obtenemos que $B_{B(C,\delta)}$ es un entorno abierto de C en 2^X_{upp}.

Vamos a verificar la inclusión del abierto $B_{B(C,\delta)}$ de 2^X_{upp} en U_ε. Para ello tomemos $D \in B_{B(C,\delta)}$, esto es, $D \subset B(C, \delta)$. Si p, p' son dos puntos del cerrado D de X se cumple entonces que

$$d(p,p') \le d(p,C) + d(p',C) + diam(C) < \delta + \delta + r <$$

$$< 2\,(\varepsilon - r)/2 + r < (\varepsilon - r) + r = \varepsilon.$$

Hecho que nos permite entonces afirmar que $diam(D) < \varepsilon$ y por tanto, que $D \in U_\varepsilon$ para todo $D \in B_{B(C,\delta)}$.

Resumiendo hemos obtenido que para todo $C \in U_\varepsilon$, con $diam(C) = r < \varepsilon$, existe un abierto $B_{B(C,\varepsilon - r/2)}$ de 2^X_{upp} de modo

$$C \in B_{B(C,\varepsilon - r/2)} \subset U_\varepsilon .$$

Concluimos así, que U_ε es un abierto de 2^X_{upp} como queríamos.

Iniciamos la segunda parte de la demostración tomando un abierto U de 2^X_{upp}, de manera que $\Phi(X) \subset U$. Para cada $x \in X$ escogemos un $\varepsilon_x > 0$ de tal forma que el abierto $B_{B(x,\varepsilon_x)}$ de 2^X_{upp} verifica que $B_{B(x,\varepsilon_x)} \subset U$.

Puesto que la familia

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon_x) \mid \varepsilon_x > 0,\ x \in X\},$$

forma un recubrimiento abierto de X y como X es un espacio métrico compacto, se sigue entonces que existe un número real $\beta > 0$, que es el número de Lebesgue del recubrimiento $\mathcal{B}$, de tal forma que para todo $x \in X$ existe un $y_x \in X$ tal que $B(x, \frac{\beta}{2}) \subset B(y_x, \varepsilon_{y_x})$. De donde se deduce que para cada $x \in X$ existe un $y_x \in X$ de manera que

(1) $$B_{(B(x,\frac{\beta}{2}))} \subset B_{(B(y_x,\varepsilon_{y_x}))} \subset U.$$

Por otro lado si consideremos el abierto $U_{\beta/2} \in \mathcal{U} = \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ y $C \in U_{\beta/2}$, se sigue entonces de la propia definición de $U_{\beta/2}$, que para todo punto $c \in C$ se cumple que $C \subset B(c, \beta/2)$.

Teniendo en cuenta esta última conclusión y particularizando la expresión (1) para el caso $x = c$ obtenemos:

$$C \in B_{B(c,\beta/2)} \subset B_{B(y_c,\varepsilon_{y_c})} \subset U.$$

Se deduce así, que si $C \in U_{\beta/2}$ entonces $C \in U$ y por tanto, hemos encontrado un $U_{\beta/2} \in \mathcal{U}$ tal que

$$\Phi(X) \subset U_{\beta/2} \subset U.$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

3.3. PROPIEDADES HOMOTÓPICAS Y DE LA FORMA DE LOS U_ε

Una vez que hemos comprobado que $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ forma una base de entornos abiertos para un espacio métrico compacto X en su hiperespacio 2^X_{upp}, dedicamos esta sección al estudio de propiedades topológicas de los $U_\varepsilon \in \mathcal{U}$. Comenzaremos probando un teorema que utilizaremos profusamente en las demostraciones de esta sección, en particular en la demostración de uno de los resultados más interesantes de esta memoria, ya que en él comprobaremos que los U_ε tienen la misma forma que un conjunto discreto con una cantidad finita de puntos.

En el capítulo siguiente utilizaremos, para la descripción de la forma de los espacios métricos compactos, la base de entornos formada por los U_ε, que a diferencia de las descripciones clásicas, no solo no poseen el mismo tipo de homotopía que los ANR sino que además, como demostraremos, ni siquiera tienen en general el tipo de homotopía de un espacio T_1.

Definición 3.3.1. Sea X un espacio métrico compacto y

$$\mathcal{U} = \{U_i \subset X \mid U_i \text{ abierto}\}_{i\in\{1,\ldots,p\}}$$

un recubrimiento finito por abiertos de X. Definimos el siguiente conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{\mathcal{U} \mid U_i \neq \emptyset \quad \forall\, U_i \in \mathcal{U} \quad \text{y} \quad U_i \cap U_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j\,\},$$

esto es, $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de las particiones finitas por abiertos de X.

Establecemos la siguiente relación de orden en el conjunto $\mathcal{P}(X)$.

Dados $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{P}(X)$ *decimos que* $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2$ *o que la partición* $\mathcal{U}_1$ *es un refinamiento de la partición* $\mathcal{U}_2$ *si para todo* $U_i^1 \in \mathcal{U}_1$ *existe un* $U_j^2 \in \mathcal{U}_2$ *tal que* $U_i^1 \subset U_j^2$.

Definición 3.3.2. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto

$$\mathcal{P}_\varepsilon(X) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X) \mid \{B(x,\varepsilon)\}_{x\in X} \text{ es un refinamiento de } \mathcal{U}\}.$$

Claramente el conjunto $\mathcal{P}_\varepsilon(X)$ no es vacío, puesto que obviamente, la partición $\mathcal{U} = \{X\}$ pertenece a él. Además por ser $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ un recubrimiento de X, que es compacto, podemos extraer de él una cantidad finita que siga recubriendo a X. Si denotamos por $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ al número mínimo de bolas del recubrimiento $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ necesarias para recubrir X, tenemos entonces que

$$\sup\{Card\,\{\mathcal{U}\} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{P}_\varepsilon(X)\} \le N_\varepsilon.$$

Así pues el conjunto $\{Card\,(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \mathcal{P}_\varepsilon(X)\}$ tiene máximo y lo representamos por $\mathbf{n_0}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{n_0}(\varepsilon) = \max_{\mathcal{U}\in\mathcal{P}_\varepsilon(X)}\{\,Card(\mathcal{U})\,\}.$$

Teorema 3.3.3. *Sea* Y *un espacio* T_1 *y* X *un espacio métrico compacto. Entonces se tiene que para cualquiera que sea* U_ε, *con* $\varepsilon > 0$, *el cardinal de la imagen de* U_ε *mediante cualquier aplicación* $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$ *continua, está acotado por un número independientemente de* Y.

De hecho podemos afirmar que

$$Card(f(U_\varepsilon)) \le \max_{\mathcal{U}\in\mathcal{P}_\varepsilon(X)}\{\,Card(\mathcal{U})\,\} = \mathbf{n_0}(\varepsilon).$$

Además existe Y, un espacio T_1, y una aplicación continua $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$ tal que $Card\,(f(U_\varepsilon)) = \mathbf{n_0}(\varepsilon)$

Observación 3.3.4. En particular si X es un espacio métrico compacto y conexo entonces $\mathbf{n_0}(\varepsilon) = 1$, por tanto, para cualesquiera que sean $\varepsilon > 0$ y $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$ continua, con Y un espacio T_1, se tiene que $Card\,(f(U_\varepsilon)) = 1$. Esto es, si X es un espacio métrico compacto y conexo, entonces las únicas aplicaciones continuas de U_ε a un espacio T_1 son las aplicaciones constantes.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos demostrando que para todo $\varepsilon > 0$ la aplicación continua $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$, con Y un espacio T_1, verifica que

$$Card\,(f(U_\varepsilon)) \leq \chi_0$$

Para cada punto $x \in X$ tomamos la bola abierta $B(x, \varepsilon/4)$, así pues, la familia $\{B(x, \varepsilon/4)\}_{x\in X}$ es un recubrimiento de X. Como X es compacto, se tienen entonces que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $\{B(x_i, \varepsilon/4)\}_{i=1,\ldots,n}$ forma un recubrimiento de X y por tanto también, la familia de las bolas cerradas $\{B_c(x_i, \varepsilon/4)\}_{i=1,\ldots,n}$ es un recubrimiento finito de X. Obsérvese que $B_c(x_i, \varepsilon/4) \in U_\varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Dado $y \in D \in U_\varepsilon$ existe x_{i_0} tal que $y \in B_c(x_{i_0}, \varepsilon/4)$, se sigue entonces que $\{x_{i_0}, y\} \in U_\varepsilon$, $\{x_{i_0}, y\} \in \overline{\{x_{i_0}\}}$ y que $\{x_{i_0}, y\} \in \overline{\{y\}}$, de donde se deduce utilizando la continuidad de $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$ que

- $f(\{x_{i_0}, y\}) \in f(\overline{\{x_{i_0}\}}) \subset \overline{f(\{x_{i_0}\})} = f(\{x_{i_0}\})$
- $f(\{x_{i_0}, y\}) \in f(\overline{\{y\}}) \subset \overline{f(\{y\})} = f(\{y\})$.

Obtenemos así, que $f(\{y\}) = f(\{x_{i_0}\})$ y puesto que $D \in \overline{\{y\}}$ se sigue que $f(D) = f(\{x_{i_0}\})$ de donde se concluye como queríamos que $Card\,(f(U_\varepsilon)) \leq \chi_0$.

Vamos ahora a probar por reducción al absurdo, que de hecho lo que se tiene es

$$Card\,(f(U_\varepsilon)) \leq \mathbf{n_0}(\varepsilon)$$

Supongamos entonces que existe una aplicación $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$ tal que

$$Card\,(f(U_\varepsilon)) = m > \mathbf{n_0}(\varepsilon).$$

Representamos por

$$Img(f(U_\varepsilon)) = \{a_1, \ldots, a_m\}$$

a la imagen de f. Obtenemos así, que la aplicación $f : U_\varepsilon \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ es una aplicación continua y suprayectiva y por tanto la familia

$$\{f^{-1}(a_i) \mid i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$$

es una partición por abiertos de U_ε. Además podemos suponer, ya que $U_\varepsilon \subset 2^X_{upp}$, que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, que

$$f^{-1}(a_i) = \bigcup_{j \in J_i} B_{V_i^j} \subset B_{(\bigcup_{j \in J_i} V_i^j)}.$$

Se sigue entonces que la familia

$$\mathcal{V} = \{\bigcup_{j \in J_1} V_1^j, \bigcup_{j \in J_2} V_2^j, \ldots, \bigcup_{j \in J_m} V_m^j\}$$

es una partición por abiertos del espacio X ya que en caso contrario existirían $p,\ q \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $x \in X$ con

$$x \in (\bigcup_{j \in J_q} V_q^j) \bigcap (\bigcup_{j \in J_p} V_p^j).$$

Existirán por tanto $j_1 \in J_q$ y $j_2 \in J_p$ tal que

$$x \in V_q^{j_1} \quad \text{y} \quad x \in V_p^{j_2}.$$

De donde se deduciría

$$x \in (\bigcup_{j \in J_q} B_{(V_q^j)}) \bigcap (\bigcup_{j \in J_p} B_{(V_p^j)}).$$

Lo que está en contradicción con el hecho de que la familia $\{f^{-1}(a_i) \mid i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ es una partición por abiertos de U_ε.

Vamos a comprobar que además $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ es un refinamiento para la partición $\mathcal{V}$. Sean $x_0 \in X$ y $x \in B(x_0, \varepsilon)$, como $d(x_0, x) < \varepsilon$, se tiene entonces que $C = \{x_0, x\} \subset U_\varepsilon$ y por tanto, podemos calcular $f(C)$. Además, puesto que $C \in \overline{\{x_0\}}$ y $C \in \overline{\{x\}}$, se tiene que existen $p, q \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tales que

- $f(C) \in f(\overline{\{x_0\}}) \subset \overline{f(\{x_0\})} = a_p$
- $f(C) \in f(\overline{\{x\}}) \subset \overline{f(\{x\})} = a_q$.

Obtenemos así, que $f(x_0) = f(x)$ para todo $x \in B(x_0, \varepsilon)$, de donde se deduce que existe $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ de manera

$$B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcup_{j \in J_s} V_s^j$$

Resumiendo tenemos que

$$\mathcal{V} = \{\bigcup_{j \in J_1} V_1^j, \bigcup_{j \in J_2} V_2^j, \ldots, \bigcup_{j \in J_m} V_m^j\}$$

es una partición de X de tal forma que $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_\varepsilon(X)$ y con cardinal $Card\,(\mathcal{V}) = m$, donde $m > \mathbf{n_0}(\varepsilon) = \max_{\mathcal{U} \in \mathcal{P}_\varepsilon(\mathbf{X})} (Card(\mathcal{U}))$. Llegamos de esta forma a demostrar como queríamos que

$$Card\,(f(U_\varepsilon)) \leq \mathbf{n_0}(\varepsilon).$$

Seguidamente vamos a construir una aplicación continua $f : U_\varepsilon \longrightarrow Y$ tal que $Card\,(f(U_\varepsilon)) = \mathbf{n_0}(\varepsilon)$.

Tomemos como espacio T_1 el espacio $Y = \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ y sea $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_\varepsilon(X)$ tal que $Card\,(\mathcal{U}_0) = \mathbf{n_0}(\varepsilon)$, esto es,

$$\mathcal{U}_0 = \{\mathcal{U}_0^1, \mathcal{U}_0^2, \ldots, \mathcal{U}_0^{\mathbf{n_0}(\varepsilon)}\}.$$

Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} f \quad : X &\longrightarrow \quad \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \\ x &\longrightarrow \qquad f(x) = i \end{aligned}$$

donde $f(x) = i \in \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ es el único subíndice tal que $x \in \mathcal{U}_0^i$. La aplicación f así definida es continua puesto que los $\mathcal{U}_0^i$ para todo $i \in \{1, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ son abiertos y cerrados.

Tomemos ahora $C \in U_\varepsilon$. Existe entonces un único $\mathcal{U}_0^p \in \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_\varepsilon(X)$ tal que $C \subset \mathcal{U}_0^p$, ya que en caso contrario existirían c_1, $c_2 \in C$ y $\mathcal{U}_0^p$, $\mathcal{U}_0^q \in \mathcal{U}$ con $c_1 \in \mathcal{U}_0^p$ y $c_2 \in \mathcal{U}_0^q$; como $d(c_1, c_2) < \varepsilon$, ya que $C \in U_\varepsilon$, obtendríamos entonces que $c_1 \in B(c_2, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_0^q$, llegando de este modo a una contradicción con el hecho de que $\mathcal{U}_0$ es una partición de X que es refinada por las bolas $B(x, \varepsilon)$.

Podemos entonces extender nuestra aplicación $f : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ a U_ε de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \widehat{f} \quad : U_\varepsilon &\longrightarrow \quad \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \\ C &\longrightarrow \qquad \widehat{f}(C) = i \end{aligned}$$

donde $\widehat{f}(C) = i \in \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ es el único subíndice tal que $C \in \mathcal{U}_0^i$.

Como la aplicación f es continua y $\{1,\ldots,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ es un espacio normal Hausdorff se sigue de la proposición **1.4.7** que la aplicación

$$2^f : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^{\{1,\ldots,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}}_{upp}$$

es continua, y puesto que $\widehat{f} = 2^f|_{U_\varepsilon}$ podemos concluir que $\widehat{f}$ es una aplicación continua con $Card\,(\widehat{f}(U_\varepsilon)) = n_0(\varepsilon)$.

□

Seguidamente vamos a demostrar que los U_ε son espacios con la misma forma que un espacio discreto con una cantidad finita de puntos.

Previamente enunciamos un resultado de teoría de la forma sobre equivalencia Shape, utilizando la definición de Marde$\check{s}i\acute{c}$ (ver [Mar.1] y [Mar.2]), que aplicaremos en la demostración del teorema **3.3.6**.

Teorema 3.3.5. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. La aplicación f induce una equivalencia Shape sí y solo sí para cualquier espacio P, que sea un ANR, y para cualquier clase de homotopía $[\mathbf{h}] \in [\mathbf{Y},\mathbf{P}]$, con $h : Y \longrightarrow P$ aplicación continua, la asignación*

$$[\mathbf{h}] \Longrightarrow [\mathbf{h} \circ \mathbf{f}]$$

con $[\mathbf{hof}] \in [\mathbf{X},\mathbf{P}]$, induce una biyección entre las clases de equivalencia de homotopía de aplicaciones continuas de Y en P y de X en P.

Teorema 3.3.6. *Sea X un espacio métrico compacto. Dado $\varepsilon > 0$ se tiene entonces que U_ε tiene la misma forma que $\{1,\ldots,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ donde*

$$\mathbf{n_0}(\varepsilon) = \max_{\mathcal{U}\in\mathcal{P}_\varepsilon(X)} \{\, Card(\mathcal{U})\,\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea P un ANR y $f_\varepsilon : U_\varepsilon \longrightarrow \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ una aplicación continua y suprayectiva. Tomamos una aplicación $h : \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \longrightarrow P$ continua y definimos la aplicación $\widetilde{h} = h \circ f_\varepsilon : U_\varepsilon \longrightarrow P$

$$\begin{tikzcd}
U_\varepsilon \arrow[r, "f_\varepsilon"] \arrow[dr, "\widetilde{h}"'] & \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \arrow[d, "h"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

Tenemos que probar:

1. Para toda aplicación $g : U_\varepsilon \longrightarrow P$ continua, donde P es un ANR, se puede construir una aplicación continua $h : \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \longrightarrow P$ tal que se verifique la igualdad $g = h \circ f_\varepsilon$.
2. Para toda aplicación continua $h' : \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \longrightarrow P$ que sea homotópica a la aplicación h, se verifica que la aplicación $\widetilde{h'} = h' \circ f_\varepsilon : U_\varepsilon \longrightarrow P$ es homotópica a la aplicación $\widetilde{h}$; y que si $\widetilde{h} = h \circ f_\varepsilon$ es homotópica a $\widetilde{h'} = h' \circ f_\varepsilon$ entonces h' es homotópica a h. Es decir:

$$h \simeq h' : \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \longrightarrow P \iff \widetilde{h} \simeq \widetilde{h'} = (h \circ f_\varepsilon) \simeq (h' \circ f_\varepsilon) : U_\varepsilon \longrightarrow P.$$

- **<u>Demostración de 1.</u>**

Sea P es un ANR y por tanto un espacio T_1, y $g : U_\varepsilon \longrightarrow P$ una aplicación continua, se sigue entonces del teorema **3.3.3** que el cardinal de la imagen de g, que denotaremos por $\mathbf{q}$, es finito. De la definición de $\mathbf{n_0}(\varepsilon)$, se sigue entonces que

$$Card\,(g(U_\varepsilon)) = \mathbf{q} \leq \mathbf{n_0}(\varepsilon).$$

Así pues, podemos describir la imagen de la aplicación $g : U_\varepsilon \longrightarrow P$ mediante

$$Img\ (g) = \{a_1, a_2, ..., a_{\mathbf{q}}\}.$$

Haciendo uso de la continuidad de las aplicaciones $f_\varepsilon : U_\varepsilon \longrightarrow \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ y $g : U_\varepsilon \longrightarrow P,$ obtenemos las dos particiones siguientes de U_ε

$$U_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{q}} V_i \qquad \text{con } V_i = g^{-1}(a_i) \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}.$$

$$U_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n_0}(\varepsilon)} W_j \qquad \text{con } W_j = f_\varepsilon^{-1}(j) \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}.$$

Probaremos ahora las dos siguientes cuestiones:

– **1.a.-** Para todo $j \in \{1, 2, .., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ existe $i \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}$ de manera que $W_j \subset V_i$.

– **1.b.-** Dado $j_0 \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ y $(a_{i_0}) \in P$ tal que $W_{j_0} \subset V_{i_0} = g^{-1}(a_{i_0}),$ con $i_0 \in \{1, \ldots, \mathbf{q}\},$ la aplicación

$$\begin{aligned} h\ &: \{1, 2, ..., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \longrightarrow \ P \\ &j_0 \longrightarrow a_{i_0} \end{aligned}$$

es continua y además cumple que $g = h \circ f_\varepsilon$.

– <u>Demostración **1.a.-**</u>

Supongamos que no es cierto, es decir, existe un $j_0 \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ tal que W_{j_0} no está incluido en ningún V_i para $i \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}$. Como

$$U_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{q}} V_i \qquad \text{y} \qquad W_{j_0} \subset U_\varepsilon$$

se sigue que existen $i_1, i_2, ..., i_r \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}$ tales que

$*$ $W_{j_0} \subset \bigcup_{\alpha=1}^{r} V_{i_\alpha}$

$* \ W_{j_0} \cap V_{i_\alpha} \neq \emptyset \qquad \forall\, \alpha \in \{1, 2, ..., r\}.$

Observar que $r \geq 2$ puesto que W_{j_0} no esta incluido en ningún V_i con $i \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}$.

Llamamos:

$$\begin{aligned}
(W_{j_0})_1 = &\quad W_{j_0} \cap V_{i_1} \\
(W_{j_0})_2 = &\quad W_{j_0} \cap V_{i_2} \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
(W_{j_0})_r = &\quad W_{j_0} \cap V_{i_r}
\end{aligned}$$

$(W_{j_0})_\alpha$, para todo $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$, es a la vez abierto y cerrado de U_ε, ya que es intersección de abiertos y cerrados de U_ε.

Tomemos ahora la siguiente descripción de U_ε

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon = \{W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_{j_0 - 1} \cup \\
\cup\, ((W_{j_0})_1 \cup (W_{j_0})_2 \cup ... \cup (W_{j_0})_r) \cup \\
\cup\, W_{j_0+1} \cup W_{j_0+2} \cup ... \cup W_{\mathbf{n_0}(\varepsilon)}.\}
\end{aligned}$$

Es decir, U_ε viene definido por la unión de $(\mathbf{n_0}(\varepsilon) - 1) + r$ abiertos y cerrados. Como $r \geq 2$ obtenemos

$$(\mathbf{n_0}(\varepsilon) - 1) + r \geq (\mathbf{n_0}(\varepsilon) - 1) + 2 = \mathbf{n_0}(\varepsilon) + 1 > \mathbf{n_0}(\varepsilon).$$

Esto es, U_ε viene definido por la unión de más de $\mathbf{n_0}(\varepsilon)$ abiertos y cerrados.

Definimos una aplicación

$$S : U_\varepsilon \longrightarrow \{1, 2, \ldots, \mathbf{n_0}(\varepsilon), \ldots, (\mathbf{n_0}(\varepsilon) - 1) + r\}$$

mediante:

$$\begin{cases} S(W_j) = j & \text{si } 1 \leq j \leq j_0 - 1 \\ S((W_{j_0})_i) = j_0 + (i-1) & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ S(W_j) = j + (r-1) & \text{si } j_0 + 1 \leq j \leq \mathbf{n_0}(\varepsilon). \end{cases}$$

La aplicación S es claramente una aplicación continua y además

$$Card\,(Img\,(S)) = \mathbf{n_0}(\varepsilon) - 1 + r > \mathbf{n_0}(\varepsilon)$$

y esto está en contradicción con el hecho de que $\mathbf{n_0}(\varepsilon)$ es el máximo número natural para el que existe una aplicación continua suprayectiva de U_ε en un espacio discreto.

Podemos por tanto afirmar que para todo $j_0 \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ existe un $i_0 \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}$ de modo que

$$W_{j_0} \subset V_{i_0} = g^{-1}(a_{i_0}).$$

– <u>Demostración **1.b.-**</u>

Basta con comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} h \quad : \{1, 2, ..., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} &\longrightarrow \quad P \\ j &\longrightarrow \quad a_i, \end{aligned}$$

donde $W_j \subset V_i = g^{-1}(a_i)$, verifica que $g = h \circ f_\varepsilon$ puesto que la continuidad de la aplicación h es obvia.

Para ello tomemos un $C \in U_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n_0}(\varepsilon)} W_j$, entonces existirá un $j_0 \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ de tal forma que $C \in W_{j_0}$ y por lo visto anteriormente existirá también un $i_0 \in \{1, 2, ..., \mathbf{q}\}$ de manera que $W_{j_0} \subset V_{i_0} = g^{-1}(a_{i_0})$. Así pues, si $C \in W_{j_0}$ obtenemos que

$g(C) \subset g(V_{i_0}) \subset g(g^{-1}(a_{i_0})) = a_{i_0}$, es decir, $g(C) = a_{i_0}$, y como $f_\varepsilon(C) = j_0$ concluimos entonces que

$$h(f_\varepsilon(C)) = h(j_0) = a_{i_0} = g(C)$$

como queríamos.

- **<u>Demostración de 2.</u>**

  - <u>$h \simeq h' \Longrightarrow \widetilde{h} \simeq \widetilde{h'}$.</u>

    Supongamos $h \simeq h'$ entonces existe $H : \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \times I \longrightarrow P$ aplicación continua tal que para todo $i \in \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ se verifica

    $$\begin{cases} H(i, 0) = h(i) \\ H(i, 1) = h'(i). \end{cases}$$

    Definimos a partir de la aplicación $H : \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \times I \longrightarrow P$ y de la aplicación $f_\varepsilon : U_\varepsilon \longrightarrow \{1, 2, ..., \mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ la siguiente aplicación

    $$\begin{array}{rcl} \widetilde{H} : & U_\varepsilon \times I \longrightarrow & P \\ & (C, t) \Longrightarrow & H(f_\varepsilon(C), t). \end{array}$$

    La aplicación $\widetilde{H}$ es una homotopía entre $\widetilde{h} = h \circ f_\varepsilon$ y $\widetilde{h'} = h' \circ f_\varepsilon$ ya que es una aplicación continua y para todo $C \in U_\varepsilon$ verifica que

    $$\begin{cases} \widetilde{H}(C, 0) = H(f_\varepsilon(C), 0) = h(f_\varepsilon(C)) = \widetilde{h}(C) \\ \widetilde{H}(C, 1) = H(f_\varepsilon(C), 1) = h'(f_\varepsilon(C)) = \widetilde{h'}(C). \end{cases}$$

    Podemos entonces concluir que si h es homotópica h' entonces $\widetilde{h}$ es homotópica a $\widetilde{h'}$.

  - <u>$\widetilde{h} \simeq \widetilde{h'} \Longrightarrow h \simeq h'$.</u>

    Supongamos ahora que $\widetilde{h} \simeq \widetilde{h'} : U_\varepsilon \longrightarrow P$, entonces existe aplicación continua $\widetilde{H} : U_\varepsilon \times I \longrightarrow P$ tal que para todo $C \in U_\varepsilon$ se verifica que

$$\begin{cases} \widetilde{H}(C,0) = \widetilde{h}(C) = h(f_\varepsilon(C)) \\ \widetilde{H}(C,1) = \widetilde{h}'(C) = h'(f_\varepsilon(C)). \end{cases}$$

Para cada $i \in \{1,2,...,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ fijamos un $C_i \in U_\varepsilon$ de tal forma que $f_\varepsilon(C_i) = i$ y definimos la aplicación $H : \{1,2,...,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \times I \longrightarrow P$ por

$$\begin{array}{rccc} H: & \{1,2,...,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\} \times I \longrightarrow & & P \\ & (i,t) \Longrightarrow & & \widetilde{H}(C_i,t), \end{array}$$

Obsérvese que tanto la aplicación $f_\varepsilon : U_\varepsilon \longrightarrow \{1,2,...,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ como la aplicación $\widetilde{H}_t : U_\varepsilon \times t \longrightarrow P,$ para todo $t \in I,$ verifican las condiciones del teorema **3.3.3** y por tanto, las imágenes de ambas tienen un cardinal finito. De la definición de $\mathbf{n_0}(\varepsilon)$ obtenemos que $Card\,(\widetilde{H}_t) \leq \mathbf{n_0}(\varepsilon)$ y puesto que $\mathcal{R} = \{\, f_\varepsilon^{-1}(i) \mid i \in \{1,2,...,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}\,\}$ es una partición de U_ε, la aplicación $\widetilde{H}_t$, como ya se demostró dentro del apartado $\mathbf{1.a.}-$, vale lo mismo en cada abierto de la partición $\mathcal{R}$; es decir, $\widetilde{H}_t(C,t) = \widetilde{H}_t(C',t)$ para todo C, $C' \in f^{-1}(i)$, con $i \in \{1,2,...,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$. Así pues, la aplicación $\widetilde{H}$ es independiente del $C_i \in U_\varepsilon$ fijado.

Obtenemos así, que la aplicación H es continua y además para todo $i \in \{1,2,\ldots,\mathbf{n_0}(\varepsilon)\}$ verifica

$$\begin{cases} H(i,0) = \widetilde{H}(C,0) = h(f_\varepsilon(C)) = h(i) \\ H(i,1) = \widetilde{H}(C,1) = h'(f_\varepsilon(C)) = h'(i). \end{cases}$$

De modo que H es una homotopía entre h y h'.

$\square$

A continuación daremos una nueva caracterización de la relación de homotopía débil entre aplicaciones continuas, en el sentido de K. Borsuk [Bo.6], definidas entre espacios métricos compactos en términos de los U_ε. Dicha caracterización nos será útil tanto en en el teorema **3.3.10** como en el próximo capítulo. Pero primero recordaremos algunas definiciones que utilizaremos tanto en la demostración de la proposición que enunciaremos a continuación, como a lo largo del capítulo siguiente.

Definición 3.3.7. Función multivaluada semicontinua superiormente.
Sean X, Y dos espacios métricos compactos y $F : X \longrightarrow Y$ una función multivaluada, es decir, una función que asigna a cada punto $x \in X$ un cerrado no vacío $F(x)$ de Y. Diremos que $F : X \longrightarrow Y$ es una función multivaluada semicontinua superiormente si para cada punto $x \in X$ y para todo entorno V del cerrado $F(x)$ en Y, existe un entorno de U del punto x en X tal que el conjunto $F(U) = \bigcup\{F(x) \mid x \in U\}$ está contenido en V.

Definición 3.3.8. Función ε-pequeña.
Llamamos función multivaluada ε-pequeña a toda función multivaluada $F : X \longrightarrow Y$ tal que $diam(F(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Proposición 3.3.9. *Sean X, Y dos espacios métricos compactos y $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Entonces f y g son débilmente homotópicas (es decir, para todo $\varepsilon > 0$ las aplicaciones f y g son homotópicas dentro del cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ en la bola de centro Y y radio ε) si y solo si las aplicaciones f y g son homotópicas en U_ε para todo $\varepsilon > 0$.*

DEMOSTRACIÓN.
$\mathbf{f \simeq g}$ **en** $\mathbf{B(Y, \varepsilon)}$ $\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \mathbf{f \simeq g}$ **en** $\mathbf{U_\varepsilon} \, \forall \varepsilon > 0$

Supongamos al espacio Y incluido, como un cerrado, dentro del cubo de Hilbert, $\mathcal{Q}$, y sean f, $g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas débilmente homotópicas

Denotamos por ρ la distancia en $\mathcal{Q}$. Para cada punto $q \in \mathcal{Q}$ consideramos el siguiente conjunto

$$Y_q = \{y \in Y \mid \rho(y,q) = \rho(q,Y)\}.$$

Como ya vimos en el capítulo anterior, en la demostración de la proposición **2.3.1**, los Y_q son cerrados y compactos en Y y la aplicación $r : Q \longrightarrow 2^Y_{upp}$ definida por $r(q) = Y_q$ es continua.

Dado $\varepsilon/2 > 0$ existe una aplicación continua $H : X \times I \longrightarrow Q$ verificando para todo $(x,t) \in X \times I$

$$\begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \\ H(x,t) \in B(Y, \varepsilon/2). \end{cases}$$

Definimos ahora la siguiente aplicación $\widetilde{H} = r \circ H$

$$\begin{aligned} \widetilde{H} \ : X \times I \longrightarrow & \qquad U_\varepsilon \\ (x,t) \longrightarrow & \quad \widetilde{H}(x,t) = r(H(x,t)) = Y_{H(x,t)}. \end{aligned}$$

La aplicación $\widetilde{H}$ está bien definida, ya que $H(x,t) \in B(Y,\varepsilon/2)$ y por tanto, $\rho\left(H(x,t), Y\right) < \varepsilon/2$; así pues, si $y, y' \in Y_{H(x,t)}$ se tiene que

$$\rho(y,y') \leq \rho(y, H(x,t)) + \rho(y', H(x,t)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Llegamos así, como $Y_{H(x,t)}$ es compacto, a que $diam(Y_{H(x,t)}) < \varepsilon$, es decir, $diam(\widetilde{H}(x,t)) < \varepsilon$ y de este modo deducimos que $\widetilde{H}(x,t) \in U_\varepsilon$.

Obtenemos que la aplicación $\widetilde{H}$ es continua por ser la composición de funciones continuas. Además teniendo en cuenta que $Y_{f(x)} = f(x)$ y $Y_{g(x)} =$

$g(x)$, puesto que $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen al espacio Y, se sigue entonces que para todo $x \in X$ se verifica

$$\widetilde{H}(x,0) = r(H(x,0)) = r(f(x)) = Y_f(x) = f(x)$$
$$\widetilde{H}(x,1) = r(H(x,1)) = r(g(x)) = Y_g(x) = g(x).$$

Concluimos entonces que para todo $\varepsilon > 0$ se puede construir una homotopía $\widetilde{H}$, como la que hemos construido anteriormente, entre las aplicaciones f y g en U_ε. Con ello, este sentido de la implicación queda demostrado.

$\mathbf{f \simeq g}$ en $\mathbf{U_\varepsilon}$ $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{f \simeq g}$ en $\mathbf{B(Y, \boldsymbol{\varepsilon})}$ $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$.

Sabemos que la relación $f \simeq g$ en $B(Y,\varepsilon)$ en $\mathcal{Q}$ para todo $\varepsilon > 0$, es independiente de la copia topológica de $\mathcal{Q}$ que elijamos y de la inmersión de Y en $\mathcal{Q}$ (ver [B.6]). Por tanto vamos a elegir $\mathcal{Q} = \prod_{n=1}^{\infty} [1/n, 1/n]$, que es la copia convexa del cubo de Hilbert en el espacio

$$l^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum x_n^2 < \infty\}$$

con $\|(x_n)\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2)^{1/2}$, y denotamos por ρ a la distancia donde $\rho(x,y) = \|(x_n - y_n)\|_2$ para $x,\ y \in \mathcal{Q}$.

Consideramos a Y incluido como un subespacio cerrado de $\mathcal{Q}$. Para $\varepsilon > 0$ tomamos la bola en $\mathcal{Q}$ de centro Y y radio $\varepsilon > 0$, $B_{\mathcal{Q}}(Y,\varepsilon)$. Por las propiedades del cubo de Hilbert sabemos que existe un prisma K en el sentido de K. Borsuk ([Bo.8]) que es por tanto un ANR compacto conteniendo a Y en su interior y tal que $Y \subset K \subset B_{\mathcal{Q}}(Y,\varepsilon)$.

Puesto que K es un ANR compacto, entonces existe un $\varepsilon' > 0$ de manera que si dos aplicaciones $f, g : X \longrightarrow K$ son tales que $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon'$, entonces son homotópicas en K. (ver [Hu.1]).

Sea $\varepsilon'' > 0$ de tal forma que $Y \subset B(Y,\ \varepsilon'') \subset K$ y tomemos $\delta = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$. Se sigue entonces que existe una aplicación $H : X \times I \longrightarrow U_\delta$ tal que para todo $(x,t) \in X \times I$ verifica que

$$\begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \end{cases}$$

Si consideramos la aplicación H como una aplicación de $X \times I \longrightarrow Y$ multivaluada $\delta-$pequeña, se tiene entonces que H es una aplicación semicontinua superiormente y por tanto, para cada punto $(x,t) \in X \times I$ existe un entorno abierto $V_{(x,t)}$ de (x,t) en $X \times I$ de tal forma que $H(V_{(x,t)})$ está incluido dentro de la bola en Y de centro $H(x,t)$ y radio $(\delta - diam(H(x,t))/3$.

$$H(V_{(x,t)}) \in\ B\left(H(x,t), \frac{\delta - diam(H(x,t))}{3}\right)$$

Obsérvese que si $y_1 \in\ H(\alpha_1, t_1)$ con $(\alpha_1, t_1) \in\ V_{(x,t)}$ y $y_2 \in\ H(\alpha_2, t_2)$ con $(\alpha_2, t_2) \in V_{(x,t)}$, entonces

$$\begin{aligned} \rho\,(y_1, y_2) \leq\ & \rho\,(y_1,\ H(x,t)) + \rho(H(x,t),\ y_2)) + diam\,(H(x,t)) \\ & \leq (2/3)\ \delta + (1/3)\ diam\ (H(x,t)) <\ \delta. \end{aligned}$$

Obtenemos por tanto que $diam(H(V_{(x,t)}) < \delta$.

La familia $\{V_{(x,t)}\ \mid\ (x,t) \in\ X \times I\,\}$ es un recubrimiento abierto del compacto $X \times I$, lo que nos permite suponer que existen una cantidad finita de ellos, que denotamos por

$$\mathcal{V} = \{V_{(x_1,t_1)}, V_{(x_2,t_2)}, ..., V_{(x_n,t_n)}\,\}$$

que recubren $X \times I$ y con la particularidad que $diam(H(V_{(x_i,t_i)})) < \delta$ para $i \in \{1,2,...,n\}$.

Denotamos por D la distancia en el compacto $X \times I$ y consideramos para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ las aplicaciones $\beta_i : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\beta_i(x,t) = \frac{D((x,t),((X \times I) - V_{(x_i,t_i)}))}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} D((x,t),((X \times I) - V_{(x_j,t_j)}))}.$$

Se tiene entonces que las aplicaciones β_i con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, son claramente continuas y además, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ verifican que $\beta_i(x,t) \neq 0$ sí y solo sí $(x,t) \in V_{(x_i,t_i)}$.

Utilizando todas las aplicaciones β_i con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y la aplicación multivaluada $H : X \times I \longrightarrow Y$ definimos una nueva aplicación de $X \times I$ en $\mathcal{Q}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H} & : X \times I \longrightarrow & Q \\ & (x,t) \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t).v_i \end{array}$$

donde para cada $H(V_{(x_i,t_i)})$, $V(x_i, y_i) \in \mathcal{V}$, hemos elegido un punto de él al que hemos denotado por v_i.

Sean $(x_m, t_m) \in X \times I$ de tal forma que $\lim\limits_{m\to\infty} (x_m, t_m) = (x,t)$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \rho(\widetilde{H}(x,t), \widetilde{H}(x_m,t_m)) = & \| \widetilde{H}(x,t), \widetilde{H}(x_m,t_m) \|_2 = \\ & \| \sum_{i=1}^{n} (\beta_i(x,t) - \beta_i(x_m,t_m)).v_i \|_2 \leq \\ & \sum_{i=1}^{n} |(\beta_i(x,t) - \beta_i(x_m,t_m))| \|v_i\| \leq \\ & M \sum_{i=1}^{n} |(\beta_i(x,t) - \beta_i(x_m,t_m))| \end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta que $\lim_{m\to\infty} \beta_i(x_m, t_m) = \beta_i(x,t)$, puesto que las aplicaciones β_i son continuas para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, llegamos a

$$\lim_{m\to\infty} \rho(\widetilde{H}(x,t), \widetilde{H}(x_m, t_m)) = 0.$$

De donde se deduce que la aplicación $\widetilde{H}$ es continua.

Dado $(x,t) \in X \times I$ que supondremos que pertenece, sin perdida de generalidad, a los k primeros elementos del recubrimiento $\mathcal{V} = \{V_{(x_1,t_1)}, ..., V_{(x_n,t_n)}\}$ se tiene entonces

$$\widetilde{H}(x,t) = \beta_1(x,t)v_1 + \beta_2(x,t)v_2 + ... + \beta_k(x,t)v_k$$
$$\beta_1(x,t) + \beta_2(x,t) + ... + \beta_k(x,t) = 1.$$

Elijamos ahora un $z \in H(x,t)$ y utilizado la norma del espacio de Hilbert, en el que suponemos que el espacio Y está sumergido, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(\widetilde{H}(x,t), z) =& \rho((\beta_1(x,t)v_1 + ... + \beta_k(x,t)v_k), (\beta_1(x,t)z + ... + \beta_k(x,t)z)) \leq \\
& \beta_1(x,t) \left\| z - v_1 \right\|_2 + \beta_2(x,t) \left\| z - v_2 \right\|_2 + ... + \beta_k(x,t) \left\| z - v_k \right\|_2 < \\
& \beta_1(x,t)\delta + \beta_2(x,t)\delta + ... + \beta_k(x,t)\delta < \\
& (\sum_{j=1}^{k} \beta_j(x,t))\delta < \delta
\end{aligned}$$

Se obtiene así, que $\rho(\widetilde{H}(x,t), H(x,t)) < \delta$ y como $H(x,t)$ es un cerrado de Y, entonces se deduce que $\rho(\widetilde{H}(x,t), Y) < \delta$. Así pues, llegamos a que para todo $(x,t) \in X \times I$

$$\widetilde{H}(x,t) \subset B(Y,\delta) \subset K \subset B(Y,\varepsilon).$$

Además como $\rho(\widetilde{H}(x,0), f(x)) < \delta$ y $\rho(\widetilde{H}(x,1), g(x)) < \delta$, se sigue que $\widetilde{H}(x,0)$ es homotópica a $f(x)$ y $\widetilde{H}(x,1)$ es homotópica a $g(x)$ en K, de donde se deduce utilizando la propiedad transitiva de la relación de homotopía, que $f(x)$ es homotópica a $g(x)$ en K. Concluimos así, que $\widetilde{H}(x,t)$ es una homotopía entre las aplicaciones f y g en la bola $B(Y,\varepsilon)$.

□

K. Morita en [Mor.1] probó que todo espacio topológico tienen la misma forma que algún espacio de Tychonov. En el siguiente teorema demostramos que en homotopía el resultado no es cierto ya que comprobaremos que los U_ε, que son espacios con la misma forma que poliedros muy simples como ya vimos en el corolario **3.3.6**, no tienen en general la homotopía, no ya de un espacio de Tychonov, sino ni siquiera de un espacio T_1.

Teorema 3.3.10. *U_ε con $\varepsilon > 0$, no tiene en general el mismo tipo de homotopía de un espacio T_1.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un espacio X ANR conexo tal que existe una aplicación esencial $f : X \longrightarrow X$. Se sigue que U_ε para todo $\varepsilon > 0$, es conexo pues de no ser así, tendríamos que existen V, W abiertos de 2^X_{upp}, de tal forma que $U_\varepsilon = W \cup V$; y como $\Phi(X)$ es denso en 2^X_{upp}, obtendríamos que $X = (\Phi(X) \cap V) \cap (\Phi(X) \cap W)$ lo cual es imposible puesto que X es conexo.

Así pues, si U_ε tuviese el mismos tipo de homotopía que un espacio T_1, por ser U_ε conexo, se seguiría del teorema **3.3.3** que las únicas aplicaciones posibles son las constantes y por tanto, se obtendría que U_ε tiene el mismo tipo de homotopía que un punto. por ello para cualesquiera dos funciones $g, f : X \longrightarrow X \subset U_\varepsilon$ se tendría que $f \simeq g$ en U_ε; en particular, si f es una aplicación esencial y g una aplicación constante obtendríamos entonces, aplicando la proposición **3.3.9**, que $Sh(f) = Sh(g)$, es decir, los morfismos que generan f y g en teoría de la forma son los mismos, lo que está en contradicción con el hecho de que f sea una aplicación esencial. $\square$

Vamos a dedicar el final de esta sección a demostrar que aunque, como acabamos de comprobar, U_ε no tiene en general el mismo tipo de homotopía que un espacio T_1, sin embargo el tipo de homotopía del hiperespacio de un espacio de Tychonov es trivial.

Proposición 3.3.11. *Para cualquier espacio de Tychonov X se tiene que su hiperespacio 2^X_{upp} tiene el tipo de homotopía trivial o de un punto.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos la aplicación $H : 2^X_{upp} \times I \longrightarrow 2^X_{upp}$ por :

$$H(C,t) = \begin{cases} X & \text{si } t = 0 \\ C & \text{si } t \in (0,1], \end{cases}$$

Observar que si denotamos por $Id : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ a la aplicación identidad en 2^X_{upp} y por $F_X : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^X_{upp}$ a la aplicación constantemente igual a X, $F_X(C) = X$ para todo $C \in 2^X_{upp}$, se tiene entonces que $H(C,0) = F_X$ y $H(C,1) = Id_{2^X_{upp}}$.

En relación con la prueba de la continuidad de la aplicación H considérese B_U entorno abierto de $H(C,0) = X$ en 2^X_{upp}. Como el único subconjunto abierto de 2^X_{upp} que contiene al punto X es el propio conjunto, entonces necesariamente $B_U = 2^X$. Así, para cualquier entorno abierto $B_V \times I$, donde B_V es un abierto de C en 2^X_{upp}, tendremos que

$$(C,0) \in B_V \times I \quad \text{y} \qquad H(B_U \times I) \subset B_U = 2^X.$$

Consideramos ahora que B_U es un entorno del punto $H(C,t) = C$, donde $t \in (0,1]$, en 2^X_{upp}. Tomamos en este caso como entorno abierto del punto (C,t) en el espacio $2^X_{upp} \times I$ al subconjunto abierto $B_U \times (0,1]$. Si $(D,t) \in B_U \times (0,1]$

entonces $H(D,t) = D \in B_U$, de hecho tenemos que $H(B_U \times (0,1])$ es justamente el propio B_U.

Llegamos así, a que H es una homotopía entre las aplicaciones $Id_{2^X_{upp}}$ y F_X. $\square$

CAPÍTULO 4

ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INMERSIÓN CANÓNICA : TEORÍA DE LA FORMA.

4.1. INTRODUCCIÓN

K. Borsuk en [Bo.6] define el concepto de sucesión fundamental, también una relación de homotopía entre sucesiones fundamentales que da lugar a las clases fundamentales y una composición entre las clases fundamentales. Obtiene así una categoría, categoría de la forma, cuyos objetos son los espacios métricos compactos y los morfismos son las clases fundamentales. Define también en [Bo.6] el concepto de aplicación aproximativa, una relación de homotopía entre las aplicaciones aproximativas y una composición entre las aplicaciones aproximativas. Posteriormente S. Mardešić y J. Segal en [Mar-Se.3] demuestran la equivalencia entre el concepto de sucesión fundamental y el de aplicación aproximativa, de manera que en vez de utilizar sucesiones fundamentales para describir la forma en el sentido de K. Borsuk en [Bo.6] se pueden utilizar y normalmente así lo haremos nosotros, las aplicaciones aproximativas.

A diferencia de la descripciones clásicas de la teoría de la forma donde se utilizan elementos externos con muy buenas propiedades topológicas tales como el cubo de Hilbert o ANR's, como marco adecuado para el estudio de la forma de los espacios métricos compactos, en este capítulo ponemos de manifiesto, usando resultados de J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3], que los hiperespacios con *la topología semifinita superior* son también un marco adecuado para describir la forma en el caso métrico compacto.

Utilizamos así, para estudiar la forma en esta clase de espacios, objetos externos con muy malas propiedades topológicas; recordemos que en el capítulo primero comprobamos que los hiperespacios con *la topología semifinita superior* son espacios que ni siquiera son T_1. Además, a la vez conseguimos demostrar que la descripción de la teoría de la forma desarrollada por J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] es la misma en filosofía, es decir, usando aplicaciones aproximativas, clases homotopía, etc., que la desarrollada por K. Borsuk en [Bo.6] si cambiamos el cubo de Hilbert como espacio ambiente universal para los métricos compactos por su hiperespacio con *la topología semifinita superior*.

En la segunda sección de este capítulo utilizamos los hiperespacios para reconstruir, desde nuestro punto de vista, la métrica no arquimediana en los conjuntos de morfismos de la forma, introducida por M. A. Morón y F.R. Ruiz del Portal en [Mo-R.2]. El punto de partida de la sección será, considerando la posibilidad de poder sumergir los espacios dentro de sus hiperespacios por medio de la inmersión canónica, definir los morfismos de la forma entre los espacios como ciertas clases de sucesiones de Cauchy, conseguidas realizando el proceso de compleción de Cantor (obtención de los irracionales a partir de los racionales). Esto nos permitirá poder definir en el conjunto de los morfismos de la forma, que denotaremos como normalmente se hace por $Sh(X, Y)$, una ultramétrica completa.

Tras traducir la construcción multivaluada de J. M. R. Sanjurjo [Sa.3] en términos de aplicaciones aproximativas con espacio ambiente el hiperespacio con la topología *semifinita superior*, al inicio de la última sección de este capítulo vamos a actuar en el sentido opuesto al descrito en la primera. Necesitamos para ello el *Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West* que nos permitirá, en el caso de continuos de Peano no degenerados, interpretar al cubo de Hilbert como el hiperespacio de dicho continuo con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Así, el concepto de aplicación aproximativa de K. Borsuk y homotopía entre ellas puede ser interpretado, internamente, en el caso de continuos de Peano como sucesiones de aplicaciones multivaluadas continuas, ε-pequeñas y multihomotopías entre ellas. Mejorando por tanto, en el caso localmente conexo, la descripción intrínseca producida por J.M.R. Sanjurjo. La diferencia esencial entre ambas está en el hecho de que en el caso localmente conexo podemos utilizar aplicaciones multivaluadas continuas, superior e inferiormente semicontinuas. Esto permitirá, aunque no lo tratemos en esta memoria, una descripción más geométrica y más intrínseca de conceptos como movilidad, FANR, ..., etc., en presencia de la conexión local.

Por último, utilizando los hiperespacios con la topología generada a partir de la *métrica de Hausdorff*, y motivados por el *Teorema de los complementarios de Chapman* [Chap.1], demostramos que el tipo topológico de cada espacio está totalmente determinado por el tipo uniforme del complementario de su copia canónica en su hiperespacio con la métrica de Hausdorff, no solo en el caso de los continuos de Peano sino también en el caso de los métricos compactos.

4.2. HIPERESPACIOS Y TEORÍA DE LA FORMA

En esta sección conseguimos a través de una reinterpretación de la descripción de la teoría de la forma para los espacios métricos compactos desarrollada por J.M.R. Sanjurjo en [Sa.3], dar una nueva descripción de la teoría de la forma para los espacios métricos compactos utilizando los hiperespacios con la *t*opología semifinita superior, a la vez que comprobamos que son tan buenos espacios ambientes como el cubo de Hilbert (usado por K. Borsuk), para describir la forma de los espacios métricos compactos.

Así pues, comenzamos recordando una serie de definiciones dadas por J.M.R. Sanjurjo en [Sa.3] que posteriormente reinterpretaremos en términos de hiperespacios

Nota. A lo largo de esta sección siempre que hablemos de hiperespacios estaremos suponiendo a estos dotados de *la topología semifinita superior*. Siempre que no se diga lo contrario los espacios con los que trabajaremos serán métricos compactos.

Definición 4.2.1. **Funciones ε - multihomotópicas.**

Diremos que dos funciones $F,\ G : X \longrightarrow Y$ multivaluadas semicontinuas superiormente ε - pequeñas, son ε - multihomotópicas, lo que denotaremos por $F \overset{\varepsilon}{\simeq} G$, si existe una función $H : X \times I \longrightarrow Y$ multivaluada semicontinua superiormente ε - pequeña tal que para todo $x \in X$ verifica que

$$\left.\begin{array}{l} H(x,0) = F(x) \\ H(x,1) = G(x) \end{array}\right\}$$

Definición 4.2.2. **Multired.**

Una sucesión $\widetilde{F} = \{F_n : X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $F_n : X \longrightarrow Y$ es una función multivaluada semicontinua superiormente para todo $n \in \mathbb{N}$, es una multired del espacio X en Y, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $F_n \overset{\varepsilon}{\simeq} F_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$.

Definición 4.2.3. **Homotopía entre multiredes.**

Sean $\widetilde{F} = \{F_n : X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\widetilde{G} = \{G_n : X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos multiredes. Diremos que $\widetilde{F}$ es homotópica a $\widetilde{G}$, y lo denotaremos por $\widetilde{F}\simeq\widetilde{G}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \overset{\varepsilon}{\simeq} G_n$ para todo $n \geq n_0$.

J. M. R. Sanjurjo demuestra en [Sa.3] que la relación de homotopía entre multiredes es una relación de equivalencia en el conjunto de las multiredes. Define una composición entre las clases de homotopía de las multiredes obteniendo así una categoría, cuyos objetos son los espacios métricos compactos y los morfismos las clases de homotopía de las multiredes, y comprueba que es isomorfa a la categoría de la forma de K. Borsuk [Bo.6] para los métricos compactos.

Nuestra intención ahora es reinterpretar la categoría obtenida por J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3] en términos de hiperespacios con *la topología semifinita superior*. Obteniendo así una nueva categoría para el caso métrico compacto, isomorfa a la categoría de la forma, donde los objetos siguen siendo los mismos pero los morfismos cambian.

Teniendo en cuenta que si $F : X \longrightarrow Y$ es una función multivaluada, definida entre espacios métricos compactos, $F(x)$ es un cerrado de Y y por tanto un punto de su hiperespacio 2^Y_{upp}, es fácil construir una función univaluada entre el espacio X y el hiperespacio 2^Y_{upp} del siguiente modo:

Definición 4.2.4. Dada $F : X \longrightarrow Y$ función multivaluada definimos la aplicación $f : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$ como $f(x) = F(x)$ para cada $x \in X$.

$$\begin{aligned} f \ : X \longrightarrow & \quad 2^Y_{upp} \\ x \longrightarrow & \quad f(x) = F(x). \end{aligned}$$

Además se tiene la siguiente relación entre ambas.

Proposición 4.2.5. *Sean* X, Y *dos espacios métricos compactos. Una función multivaluada* $F : X \longrightarrow Y$ *es semicontinua superiormente si y solo si la función univaluada* $f : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$, *definida por* $f(x) = F(x)$ *para todo* $x \in X$, *es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que la familia $\mathcal{B} = \{B_V\}_{V \in T}$ con V abierto de Y y $B_V = \{C \in 2^Y \mid C \subset V\}$, es una base para la topología en 2^Y_{upp}.

Comenzamos suponiendo que $F : X \longrightarrow Y$ es una función multivaluada semicontinua superiormente. Así pues, dado $x \in X$ y V entorno de $F(x)$ en Y existe U entorno de x en X tal que $F(U) = \bigcup\{F(x) \mid x \in U\} \subset V$, es decir, $F(x) \subset V$ para todo $x \in U$. Puesto que $f(x) = F(x)$, se sigue entonces que $f(x) \in B_V$ para todo $x \in U$ y por tanto, $f(U) \subset B_V$ lo que demuestra la continuidad de f en todo punto $x \in X$.

En el otro sentido, supongamos que $x \in X$ y V es un entorno de $F(x)$ en Y, se sigue entonces que B_V es un entorno abierto de $F(x)$ en 2^Y_{upp}. Como por definición $f(x) = F(x)$, aplicando la continuidad de la función univaluada $f : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$, obtenemos que existe un entorno U del punto x en X verificando que $f(U) \subset B_V$; de este modo llegamos a que $F(U) = f(U) \subset V$ de donde se concluye que F es función multivaluada semicontinua superiormente. $\square$

Seguidamente vamos a dar una definición que nos servirá para establecer una relación, de gran utilidad para nuestros propósitos en esta sección, entre cierto tipo de sucesiones de funciones univaluadas continuas y las multiredes. Por su similitud con la definición de aplicación aproximativa en el sentido de K. Borsuk en [Bo.6] utilizaremos el mismo nombre.

Definición 4.2.6. **Aplicación aproximativa.**

Sean X, Y dos espacios métricos compactos. Una *aplicación aproximativa* de X en Y es una familia $\widetilde{f} = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donde $f_k : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$ son aplicaciones continuas univaluadas, tal que para todo U abierto de Y en 2^Y_{upp} existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que f_k es homotópica a f_{k+1} en U para todo $k \geq k_0$.

Nos serviremos ahora de la base de entornos abiertos de la copia del espacio en su hiperespacio que obtuvimos en la proposición $\mathbf{3.2.4}$,

$$\mathcal{U} = \{U_\varepsilon = \{C \in 2^X_{upp} \mid diam(C) < \varepsilon\}\}_{\varepsilon>0},$$

para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 4.2.7. *Una sucesión* $\widetilde{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* $F_n : X \longrightarrow Y$ *son funciones multivaluadas semicontinuas superiormente, es una multired en el sentido de* $\mathbf{4.2.2}$ *si y solo si la sucesión* $\widetilde{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* $f_n : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$ *son funciones continuas univaluadas y* $f_n(x) = F_n(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in X$*, es una aplicación aproximativa en el sentido de* $\mathbf{4.2.6}$.

A partir de ahora siempre que hablemos de multiredes nos estaremos refiriendo a multiredes en el sentido de $\mathbf{4.2.2}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\widetilde{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una multired. Dado U abierto de Y en 2^Y_{upp} sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que el abierto $U_{\varepsilon_0} \in \mathcal{U}$ verifica que $Y \subset U_{\varepsilon_0} \subset U$.

Por otro lado para $\varepsilon_0 > 0$, por ser $\widetilde{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una multired, sabemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $F_n \overset{\varepsilon_0}{\simeq} F_{n+1}$; es decir, para todo $n \geq n_0$ existe una función $H_n : X \times I \longrightarrow Y$ multivaluada semicontinua superiormente ε_0-pequeña verificando:

$$\left.\begin{aligned} H_n(x,0) &= F_n(x) \\ H_n(x,1) &= F_{n+1}(x). \end{aligned}\right\} \forall\, x \in X.$$

Definimos ahora para cada $n \geq n_0$, a partir de $H_n : X \times I \longrightarrow Y$, la siguiente función univaluada :

$$\begin{aligned} \widehat{H_n} : X \times I \longrightarrow & \quad 2^Y_{upp} \\ (x,t) \longrightarrow & \quad \widehat{H_n}(x,t) = H_n(x,t). \end{aligned}$$

Se sigue entonces de la proposición **4.2.5** que la función $\widehat{H_n}$ es continua para todo $n \geq n_0$; puesto que H_n es ε_0-pequeña, es decir, $diam(H_n(x,t)) < \varepsilon_0$ para todo $(x,t) \in X \times I$, se deduce que $H_n(x,t) \in U_{\varepsilon_0}$ para todo $(x,t) \in X \times I$ y por tanto, que $\widehat{H_n}(x,t) \subset U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además para todo $x \in X$ se verifica:

$$\widehat{H}_n(x,0) = H_n(x,0) = F_n(x) = f_n(x)$$
$$\widehat{H}_n(x,1) = H_n(x,1) = F_{n+1}(x) = f_{n+1}(x).$$

Obtenemos así que para cada $n \geq n_0$ la función $\widehat{H_n} : X \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ es una homotopía entre las aplicaciones univaluadas f_n y f_{n+1} en U. Queda de este modo demostrado que la sucesión $\widetilde{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una aplicación aproximativa en el sentido de **4.2.6**.

Si ahora partimos de que $\widetilde{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una aplicación aproximativa, se sigue entonces que para todo U abierto de 2^Y_{upp}, y en particular para los abiertos U_ε, con $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f_n \simeq f_{n+1}$ en U_ε para todo $n \geq n_0$. Es decir, existe una aplicación continua $\widehat{H}_n : X \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ verificando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \widehat{H}_n(x,0) = f_n(x) \\ \widehat{H}_n(x,1) = f_{n+1}(x) \end{array}\right\} \forall\, x \in X \\ \left.\widehat{H}_n(x,t) \in U_\varepsilon\right\} \forall\, (x,t) \in X \times I \end{array} \right.$$

Así pues, para cada $n \geq n_0$ definimos utilizando la aplicación univaluada $\widehat{H}_n : X \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ la siguiente función multivaluada

$$\begin{aligned} H_n : X \times I &\longrightarrow & Y \\ (x,t) &\longrightarrow & H_n(x,t) = \widehat{H}_n(x,t). \end{aligned}$$

De nuevo aplicando la proposición **4.2.5** se obtiene que H_n es una multiaplicación semicontinua superiormente. Pero además, puesto que $diam(H_n(x,t)) < \varepsilon$ para todo $(x,t) \in X \times I$ y para $n \geq n_0$, podemos entonces asegurar que H_n es una función multivaluada semicontinua superiormente ε-pequeña, tal que para todo $n \geq n_0$ verifica

$$\left.\begin{array}{r} H_n(x,0) = \widehat{H}_(x,0) = f_n(x) = F_n(x) \\ H_n(x,1) = \widehat{H}_n(x,1) = f_{n+1}(x) = F_{n+1}(x) \end{array}\right\} \forall\, x \in X.$$

Llegamos así a que $H_n : X \times I \longrightarrow Y$ es una ε-multihomotopía entre F_n y F_{n+1} para todo $n \geq n_0$. De donde se concluye que $\widetilde{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una multired como queríamos.

□

Definimos ahora una la relación de homotopía entre las aplicaciones aproximativas en el sentido de **4.2.6**, que después nos permitirá establecer una relación entre las clases de homotopía de ellas y las clases de homotopía de las multiredes.

Definición 4.2.8. **Homotopía entre aplicaciones aproximativas.**

Sean $\widetilde{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\widetilde{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con f_n, $g_n : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$, dos aplicaciones aproximativas. Diremos que $\widetilde{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\widetilde{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son homotópicas, $\widetilde{f} \simeq \widetilde{g}$, si se tiene que para todo abierto U de Y en 2^Y_{upp} existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que f_n es homotópica a g_n en U, $f_n \simeq g_n$, en U para todo $n \geq n_0$.

Proposición 4.2.9. *Sean* $\widetilde{F} = \{F_n : X \longrightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\widetilde{G} = \{G_n : X \longrightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ *dos multiredes. Entonces* $\widetilde{F}$ *y* $\widetilde{G}$ *son homotópicas si y solo si las aplicaciones aproximativas formadas por sucesiones de funciones univaluadas continuas* $\widetilde{f} = \{f_n : X \longrightarrow 2^Y_{upp}\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$g = \{g_n : X \longrightarrow 2^Y_{upp}\}_{n\in\mathbb{N}}$, *donde* $f_n = F_n$ *y* $g_n = G_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *son homotópicas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\widetilde{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\widetilde{G} = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son homotópicas.

Dado U entorno abierto de Y en 2^Y_{upp} sabemos que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $Y \subset U_{\varepsilon_0} \subset U$. De la hipótesis se deduce que para $\varepsilon_0 > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ existe una función multivaluada semicontinua superiormente $H_n : X \times I \longrightarrow Y$, con $diam(H_n(x,t)) < \varepsilon_0$ para todo $(x,t) \in X \times I$, verificando:

$$\left.\begin{array}{r} H_n(x,0) = F_n(x) \\ H_n(x,1) = G_n(x) \end{array}\right\} \forall\, x \in X.$$

Definimos, a partir de la función multivaluada H_n, para cada $n \geq n_0$ la función univaluada

$$\begin{array}{rcc} \widehat{H}_n : X \times I \longrightarrow & & 2^Y_{upp} \\ (x,t) \longrightarrow & & \widehat{H}_n(x,t) = H_n(x,t). \end{array}$$

De la proposición $4.2.5$, se sigue que $\widehat{H}_n$ es una aplicación continua para todo $n \geq n_0$ con $\widehat{H}_n(x,0) = f_n(x)$ y $\widehat{H}_n(x,1) = g_n(x)$. Por otro lado como $H_n(x,t) \in U_{\varepsilon_0}$ para todo $(x,t) \in X \times I$, se tiene entonces que $\widehat{H}_n(x,t) \subset U$ para todo $(x,t) \in X \times I$. Así pues, $\widehat{H}_n$ es una homotopía entre f_n y g_n en U para todo $n \geq n_0$. Obtenemos de este modo que las aplicaciones aproximativas $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son homotópicas como deseábamos.

En el otro sentido partimos del hecho de que para todo U abierto de Y en 2^Y_{upp} existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f_n \simeq g_n$ en U. En particular, si tomamos el abierto U_ε, para cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existirá un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq n_\varepsilon$ entonces $f_n \simeq g_n$ en U_ε. Obtenemos así que para todo $n \geq n_\varepsilon$ existe una función univaluada continua $H_n : X \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$, con $(H_n(x,t)) \subset U_\varepsilon$ para todo $(x,t) \in X \times I$, verificando

$$\left.\begin{array}{l} H_n(x,0) = f_n(x) \\ H_n(x,1) = g_n(x) \end{array}\right\} \forall\, x \in X.$$

Para cada $n \geq n_\varepsilon$ definimos la función multivaluada

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H}_n : X \times I \longrightarrow & & Y \\ (x,t) \longrightarrow & & \widehat{H}_n(x,t) = H(x,t). \end{array}$$

Utilizando los mismos razonamientos que a lo largo de estas últimas demostraciones, llegamos a que $\widehat{H}_n$ es una una función multivaluada semicontinua superiormente ε-pequeña tal que $\widehat{H}_n(x,0) = F_n(x)$ y $\widehat{H}_n(x,1) = G_n(x)$ para todo $n \geq n_\varepsilon$. Resumiendo tenemos que F_n es ε-multihomotópica a G_n para todo $\varepsilon > 0$ y para casi todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, las multiredes $\widetilde{F}$ y $\widetilde{G}$ son homotópicas. $\square$

Una consecuencia inmediata de esta última proposición es el siguiente corolario.

Corolario 4.2.10. *Las clases de homotopía de las aplicaciones aproximativas, en el sentido de* $4.2.6$, *están en correspondencia biunívoca con las clases de homotopía de las multiredes.*

A continuación damos un teorema de extensión de homotopías en hiperespacios que juega un papel análogo al teorema clásico de extensión de homotopías en A.N.R's ([Mar.1]).

Teorema 4.2.11. *Sean* X, Y *espacios métricos compactos, y* $h : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$, $H : X \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ *dos aplicaciones continuas tales que* $H(x,0) = h|_X(x)$. *Entonces existe una aplicación* $\widetilde{H} : 2^X_{upp} \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ *tal que*

1. $\widetilde{H}(C,0) = h(C)$ *para todo* $C \in 2^X_{upp}$
2. $\widetilde{H}|_{X \times I} = H$.

3. *$\widetilde{H}$ es continua.*
4. *Si se impone que $H(x,t) \in U_\varepsilon$ para todo $(x,t) \in X \times I$ se pueden elegir $\delta > 0$ y una aplicación continua $\widetilde{H} : 2^X_{upp} \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ de tal forma que $\widetilde{H}|_{U_\delta \times I} \subset U_\varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos la aplicación $\widetilde{H} : 2^X_{upp} \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$ mediante:

$$\widetilde{H}(C,t) = \begin{cases} H(C,t) & \text{si } C \in X \\ h(C) & \text{si } t = 0 \\ \displaystyle\bigcup_{c \in C} H(c,t) & \text{si } C \in 2^X_{upp} - \phi(X) \text{ y } t > 0. \end{cases}$$

$\displaystyle\bigcup_{c \in C} H(c,t)$ como demostramos en la proposición **2.2.2** es un cerrado de Y, de donde obtenemos que $\widetilde{H}$ está bien definida. Las dos primeras condiciones las verifica por definición, así pues nos falta por comprobar las dos últimas.

Veamos que $\widetilde{H}$ es continua.

- **a)** $\boxed{(\mathbf{C}, \mathbf{t}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{I}}$.
  - **a.1)** $\underline{\mathbf{t = 0}}$

    En este caso $\widetilde{H}(c,0) = H(c,0) = h(c)$ y por tanto, dado B_V entorno de $\widetilde{H}(c,0)$ en 2^Y_{upp} existe por ser H continua un entorno $U \times [0,\varepsilon)$ de (c,t) en $X \times I$ tal que $H(U \times [0,\varepsilon]) \subset B_V$. Además, por ser h también continua existe B_W entorno de c en 2^X_{upp} tal que $h(B_W) \subset B_V$.
    Tomemos el abierto $B_{(U \cap W)} \times [0,\varepsilon)$ de (c,t) en $2^X_{upp} \times I$. Vamos a comprobar que $\widetilde{H}(D,t) \in B_V$ para todo $(D,t) \in B_{(U \cap W)} \times [0, \varepsilon)$.

    * **a.1.1)** Si $D = d \in X$ entonces $\widetilde{H}(d,0) = H(d,0) = h(d)$, y puesto que $d \in B_{(U \cap W)} \subset B_U$ de la continuidad de la aplicación h, se sigue que $\widetilde{H}(d,0) \subset B_V$.

* **a.1.2)** Si $D = d \in X$ entonces $\widetilde{H}(d,t) = H(d,t)$ para todo $t \in I$, y puesto que $(d,t) \in (U \cap W) \times [0,\,\varepsilon)$ de la continuidad de H, se tiene que $\widetilde{H}(d,t) \subset B_V$.

* **a.1.3)** Si $(D,t) = (D,0)$ entonces $\widetilde{H}(D,0) = h(D)$ y como $D \in B_{(U\cap W)}$ de la continuidad de h, se deduce que $\widetilde{H}(D,0) \subset B_V$.

* **a.1.4)** Si $D \in 2^X_{upp} - \phi(X)$ y $t > 0$ entonces $\widetilde{H}(D,t) = \bigcup\limits_{d\in D} H(d,t)$. Por tanto, como $(d,t) \in (U \cap W) \times [0,\,\varepsilon)$ para todo $d \in D$, de la continuidad de H, se obtiene que $H(d,t) \subset B_V$ para todo $d \in D$ así pues llegamos a que $\widetilde{H}(D,t) \subset B_V$.

– **a.2)** $\underline{\mathbf{t \neq 0}}$

En este caso $\widetilde{H}(c,t) = H(c,t)$. Por tanto, dado B_V entorno de $\widetilde{H}(c,t)$ en 2^Y_{upp}, existe por ser H continua, un entorno $U \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)$ de (c,t) en $X \times I$ tal que $H(U \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)) \subset B_V$.
Tomemos el abierto $B_U \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)$ de (c,t) en $2^X_{upp} \times I$. Vamos a comprobar que $\widetilde{H}(D,t') \in B_V$ para todo $(D,t') \in B_U \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)$

* **a.2.1)** Si $(D,t') = (d,t')$ se tiene entonces $\widetilde{H}(d,t') = H(d,t')$ y puesto que $(d,t') \in U \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)$ de la continuidad de H, se sigue que $\widetilde{H}(d,t') \subset B_V$.

* **a.2.2)** Si $D \in 2^X_{upp} - \phi(X)$ entonces $\widetilde{H}(D,t') = \bigcup\limits_{d\in D} H(d,t')$ y dado que $(d,t') \in U \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)$ para todo $d \in D$, de la continuidad de H se tiene que $H(d,t') \subset B_V$ para todo $d \in D$. Llegamos así, como queríamos a que $\widetilde{H}(D,t') \subset B_V$.

• **b)** $\boxed{\mathbf{C \in 2^X_{upp} - \phi(X)}}$

– **b.1)** $\underline{\mathbf{t = 0}}$.

Ahora tenemos que $\widetilde{H}(C,0)=h(C)$. Así pues, dado B_V entorno de $h(C)$ en 2^Y_{upp} se sigue, por ser h continua , que existe un entorno B_U de C en 2^X_{upp} tal que $h(B_U)\subset B_V$.
Para cada $c\in C$ como $h(c)=H(c,0)\subset B_V$, se sigue de la continuidad de la aplicación H que existe $U_c\times[0,\,\varepsilon_c)$ abierto de $(c,0)$ en $X\times I$ tal que $H(U_c\times[0,\,\varepsilon_c))\subset B_V$. Podemos suponer además que $U_c\subset U$ para todo $c\in C$. Puesto que $\{U_c\mid c\in C\}$ forman un recubrimiento del compacto C, existirán $c_1,\ldots,c_k\in C$ de modo que $\{U_{c_i}\mid i\in\{1,\ldots,k\}\}$ forman un recubrimiento finito de C.

Denotemos por $\varepsilon=\min\{\varepsilon_{c_i}\mid i\in\{1,\ldots,k\}\}$ y tomemos el abierto $B_{(\bigcup_{i=1}^{k}U_{c_i})}\times[0,\,\varepsilon)$ de $2^X_{upp}\times I$. Vamos ha demostrar que

$$\widetilde{H}(B_{(\bigcup_{i=1}^{k}U_{c_i})}\times[0,\,\varepsilon))\subset B_V$$

* **b.1.1**) Si $(D,t')=(d,t')$ se tiene entonces que $\widetilde{H}(d,t')=H(d,t')$; y puesto que $(d,t')\in(\bigcup_{i=1}^{k}U_{c_i})\times[0,\varepsilon)$, de la continuidad de H se sigue que $\widetilde{H}(d,t')\subset B_V$.
* **b.1.2**) Si $D\in 2^X_{upp}-\phi(X)$ entonces $\widetilde{H}(D,0)=H(D,0)=h(D)$ y puesto que $D\subset(\bigcup_{i=1}^{k}U_{c_i})\subset U$, de la continuidad de h se deduce que $\widetilde{H}(D,0)\subset B_V$.
* **b.1.3**) Si $D\in 2^X_{upp}-\phi(X)$ y $t'>0$ entonces $\widetilde{H}(D,t')=\bigcup_{d\in D}H(d,t')$ y puesto que $(d,t')\in(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}}U_{c_i})\times[0,\varepsilon)$ para todo $d\in D$ de la

continuidad de H se sigue que $H(d,t') \subset B_V$ para todo $d \in D$. Así pues obtenemos que $\widetilde{H}(D,t') \subset B_V$.

– **b.2)** $\underline{\mathbf{t > 0}}$

En este caso $\widetilde{H}(C,t) = \bigcup_{c \in C} H(c,t)$. Así pues, dado B_V entorno de $\widetilde{H}(C,t)$ en 2^Y_{upp}, se sigue que $\widetilde{H}(c_i,t) \subset B_V$ para todo $c_i \in C$; y por ser H continua, se tiene que existe un entorno $U_{c_i} \times (t-\varepsilon_i,\, t+\varepsilon_i)$ de (c_i,t) en $X \times I$ tal que $H(U_{c_i} \times (t-\varepsilon_i,\, t+\varepsilon_i)) \subset B_V$.
Como $\{U_{c_i} \mid c_i \in C\}$ es un recubrimiento del compacto C, existirán $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$ de modo que $\{U_{c_i} \mid i \in \{1,\ldots,n\}\}$ sea un recubrimiento del compacto C. Por tanto, si tomamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ tal que $t-\varepsilon > 0$, obtenemos que $(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} U_{c_i}) \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)$ es un entorno de (C,t) en $X \times I$ con

$$H((\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} U_{c_i}) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \subset B_V.$$

Tomemos el abierto

$$B_{(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} U_{c_i})} \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$$

de (D,t) en $2^X_{upp} \times I$. Vamos a comprobar que $\widetilde{H}(D,t') \in B_V$ para todo $(D,t') \in B_{(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} U_{c_i})} \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$

∗ **b.2.1)** Si $(D,t') = (d,t')$ se tiene entonces que $\widetilde{H}(d,t') = H(d,t')$; y puesto que $(d,t') \in (\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} U_{c_i}) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, de la continuidad de H se sigue que $\widetilde{H}(d,t') \subset B_V$.

$*$ **b.2.2)** Si $D \in 2^X_{upp}$ entonces $\widetilde{H}(D,t') = \bigcup_{d\in D} H(d,t')$ y puesto que $(d,t') \in (\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} U_{c_i}) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, para todo $d \in D$ de la continuidad de H se tiene que $H(d,t') \subset B_V$ para todo $d \in D$. Así pues, obtenemos que $\widetilde{H}(D,t') \subset B_V$.

Demostraremos ahora la última propiedad de la aplicación $\widetilde{H}$.

Sea $\mathcal{A}$ un abierto de $X \times I$ en $2^X_{upp} \times I$. Para cada $x_0 \in X$ y para todo $t \in I$ existe un abierto $B_{(U_{(x_0,t)})} \times (t-\varepsilon_t,\, t+\varepsilon_t)$ de (x_0,t) en $2^X_{upp} \times I$ tal que $B_{(U_{(x_0,t)})} \times (t-\varepsilon_t,\, t+\varepsilon_t) \subset \mathcal{A}$. Puesto que $\bigcup_{t\in I} (t-\varepsilon_t,\, t+\varepsilon_t)$, para cada $x_0 \in X$ es un recubrimiento del compacto I, se sigue que existen $t_1, t_2, \ldots, t_k \in I$ tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} (t_j - \varepsilon_{t_j},\, t_j + \varepsilon_{t_j})$.

Tomamos los abiertos $U_{(x_0,t_1)}, U_{(x_0,t_2)}, \ldots, U_{(x_0,t_k)}$ de x_0 en X y formamos el abierto $\mathcal{U}_{x_0} = \bigcap_{j=1}^{k} U_{(x_0,t_j)}$ de x_0 en X. Obtenemos así que la familia $\{\mathcal{U}_x \mid x \in X\}$ es un recubrimiento de X del cual, por ser X compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito $\{\mathcal{U}_{x_1}, \mathcal{U}_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$. Se sigue entonces

$$B_{(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{x_i})}$$

es un abierto de X en 2^X_{upp}. Así que existirá un $\delta > 0$ tal que

$$X \subset \mathcal{U}_\delta \subset B_{(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{x_i})}.$$

Concluimos entonces

$$X \times I \subset U_\delta \times I \subset \left(B_{(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{x_i})}\right) \times I \subset \mathcal{A}.$$

Así pues si $H(x,t) \in U_\varepsilon$ para todo $(x,t) \in X \times I$ entonces $H^{-1}(U_\varepsilon)$, es un abierto de $X \times I$ en $2^X_{upp} \times I$ y por lo que acabamos de demostrar existirá un $\delta > 0$ con $U_\delta \in \mathcal{U}$ tal que la aplicación continua

$$\widetilde{H}(C,t) = \begin{cases} H(C,t) & \text{si } C \in X \\ h(C) & \text{si } t = 0 \\ \displaystyle\bigcup_{c \in C} H(c,t) & \text{si } C \in 2^X_{upp} - \phi(X) \text{ y } t > 0. \end{cases}$$

verifica que $\widetilde{H}|_{U_\delta \times I} \subset U_\varepsilon$. □

Pudiéramos pensar que utilizando el teorema **4.2.11** de extensión de homotopía para hiperespacios y siguiendo el procedimiento de S. Mardešić en [Mar.1] se pudiera extender toda aplicación aproximativa $f_n : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$ a una "sucesión fundamental"; es decir, que existiera una aplicación $F_n : 2^X_{upp} \longrightarrow 2^Y_{upp}$ continua tal que $F_n|_X = f_n$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $F_n|_{U_\delta} \simeq F_{n_0}|_{U_\delta}$ en U_ε para todo $n \geq n_0$. Si esto fuera así, nos permitiría facilitar la definición de composición de morfismos de la forma que da J.M.R. Sanjurjo en [Sa.3]. Desafortunadamente una de las condiciones que necesitaríamos sería que para toda aplicación continua $h : X \longrightarrow U_\varepsilon \subset 2^Y_{upp}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existiera una extensión continua $\widehat{h} : 2^X_{upp} \longrightarrow U_\varepsilon$; pero como mostramos en el ejemplo siguiente esto no es cierto.

Ejemplo 4.2.12. *Sea* X *un espacio métrico compacto con* $diam(X) > 0$. *Para* $\varepsilon > 0$ *tomamos* $\varepsilon < diam(X)$ *y consideremos la aplicación identidad* $Id : X \longrightarrow X \subset U_\varepsilon$. *De existir una aplicación continua* $\widehat{Id} : 2^X_{upp} \longrightarrow U_\varepsilon$ *que fuese una extensión de la aplicación* Id, *tendríamos entonces que* $\widehat{Id}(X) \notin U_\varepsilon$.

Así pues, utilizaremos la transcripción directa, a nuestro marco, de la definición de composición dada por J.M.R. Sanjurjo en [Sa.3].

Gracias al lema de aproximación:

Lema 4.2.13. **Lema de aproximación.**

Para toda función multivaluada semicontinua superiormente ε*-pequeña de un métrico compacto en el cubo de Hilbert, existe una aplicación univaluada continua definida también del métrico compacto en el cubo de Hilbert, de tal manera que la distancia entre ellas es menor que* $\varepsilon > 0$.

J.M.R. Sanjurjo obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.2.14. *La categoría formada por la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de las multiredes definidas entre ellos es isomorfa a la categoría de la forma de los métricos compactos obtenida por K. Borsuk ([Bo.6]).*

Los corolarios $4.2.10$ y $4.2.14$ nos permiten deducir el siguiente resultado.

Corolario 4.2.15. *La categoría formada por la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de las aplicaciones aproximativas en el sentido de* $4.2.6$, *es isomorfa a la categoría de la forma de los métricos compactos dada por K. Borsuk en [Bo.6].*

Llegamos de este modo, a dar una nueva descripción de la teoría de la forma para que el caso métrico compacto utilizando los hiperespacios con la *topología semifinita superior.* Conseguimos así, que espacios que ni siquiera son T_1 sirvan para describir la forma de los espacios métricos compactos.

El siguiente resultado es una sencilla consecuencia de los resultados hasta aquí obtenidos y de la proposición $3.3.9$.

Corolario 4.2.16. *La descripción de J.M.R. Sanjurjo en [Sa.3] es, en filosofía, la misma que la dada por K. Borsuk en [Bo.6], pero sustituyendo el cubo de Hilbert como espacio ambiente por los hiperespacios.*

4.3. HIPERESPACIOS Y MÉTRICAS NO ARQUIMEDIANAS EN ESPACIOS DE MORFISMOS

En esta sección usamos los hiperespacios con la *t*opología semifinita superior para reformular una métrica no arquimediana o ultramétrica en el espacio $Sh(X,Y)$, formado por los morfismos de la categoría de la forma entre dos espacios métricos compactos X e Y obtenido en la primera sección de este capítulo.

Definición 4.3.1. $\underline{\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{2^Y_{upp}})}$.

Sean (X,d) y (Y,d') dos espacios métricos compactos, donde d, d' representan métricas fijas en X, Y respectivamente. De ahora en adelante consideraremos al espacio Y sumergido, mediante su inmersión canónica en su hiperespacio, 2^Y_{upp}, y la base de entornos abiertos $U = \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, con $U_\varepsilon = \{C \in 2^Y_{upp} \setminus diam(C) < \varepsilon\}$, de Y en su hiperespacio 2^Y_{upp}.

Denotaremos al conjunto de todas las aplicaciones continuas entre los espacios X y 2^Y_{upp} por $\mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$.

$$\mathcal{C}(X, 2^Y_{upp}) = \{f : X \longrightarrow 2^Y_{upp} \mid f \text{ es continua }\}.$$

Lema 4.3.2. *el conjunto*

$$\mathcal{R} = \{\varepsilon > 0 \mid f \simeq g \ \ en \ \ U_\varepsilon \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})\}$$

no es vacío.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que Y es un espacio métrico compacto tendrá un diámetro finito, $diam\,(Y) = \delta$. Si tomamos U_ε con $\varepsilon = \delta + 1$, tenemos entonces que $U_{\delta+1} = 2^Y_{upp}$; y puesto que como demostramos en la proposición **3.3.11**, el hiperespacio 2^Y_{upp} tiene el tipo de homotopía trivial o de un punto, se deduce entonces que todas las aplicaciones continuas $f,\ g : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$ son homotópicas en $U_{\delta+1} = 2^Y_{upp}$. Obtenemos así que $\delta + 1 \in \mathcal{R}$, lo que nos permite afirmar que $\mathcal{R} \neq \emptyset$. $\square$

Así pues, el conjunto $\mathcal{R} = \{\varepsilon > 0 \mid f \simeq g \text{ en } U_\varepsilon \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})\}$ posee ínfimo, lo que nos va ha permitir definir la siguiente función.

Definición 4.3.3. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{C}(X,2^Y_{upp}) \times \mathcal{C}(X,2^Y_{upp}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longrightarrow & F(f,g). \end{array}$$

donde $F(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid f \simeq g \text{ en } U_\varepsilon\}$.

Proposición 4.3.4. *La aplicación* $F : \mathcal{C}(X,2^Y_{upp}) \times \mathcal{C}(X,2^Y_{upp}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica que:*

1) $F(f,g) \geq 0$ *para todo* $f, g \in \mathcal{C}(X,2^Y_{upp})$.
2) $F(f,g) = F(g,f)$ *para todo* $f, g \in \mathcal{C}(X,2^Y_{upp})$.
3) $F(f,g) \leq \max\{F(f,h), F(h,g)\}$ *para todo* $f, g, h \in \mathcal{C}(X,2^Y_{upp})$.

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones de los dos primeros apartados se siguen directamente de la propia definición de la aplicación F.

Para la demostración del último de los tres apartados denotaremos mediante $\varepsilon_0 = \max\{F(f,h), F(h,g)\}$. Se tiene entonces que para todo $\varepsilon > 0$

$$F(f,h) < \varepsilon_0 + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad F(h,g) < \varepsilon_0 + \varepsilon,$$

o lo que es lo mismo, utilizando la propia definición de la aplicación F, que para todo $\varepsilon > 0$

$$f|_{U_{\varepsilon_0+\varepsilon}} \simeq h|_{U_{\varepsilon_0+\varepsilon}} \qquad \text{y} \qquad h|_{U_{\varepsilon_0+\varepsilon}} \simeq g|_{U_{\varepsilon_0+\varepsilon}}.$$

Recurriendo ahora a la propiedad transitiva de la relación de homotopía, se deduce entonces que $f \simeq g$ en $U_{\varepsilon_0+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$ y por tanto

$$F(f,g) \leq \varepsilon_0 = \max\{F(f,h), F(h,g)\}$$

. □

Así pues, la aplicación F no es una seudométrica en $\mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$, pero si nos restringimos a las aplicaciones continuas cuya imagen está contenida en Y, $\mathcal{C}(X,Y)$, entonces F es una seudométrica que además verifica que $F(f,g) = 0$ si y solo si f y g son homotópicas en U_ε para todo $\varepsilon > 0$, es decir, según **3.3.9**, $F(f,g) = 0$ si y solo si $Sh(f) = Sh(g)$.

Pasamos a definir dos conceptos que serán utilizados de manera profusa a lo largo de la presente sección.

Definición 4.3.5. <u>F − Cauchy</u>.
Sea $f_n \in \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ es una sucesión $F - Cauchy$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F(f_n, f_{n'}) < \varepsilon$ para cualesquiera $n,\ n' \geq n_0$.

Denotaremos por $\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ al conjunto formado por todas las sucesiones $\underline{f} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ que son sucesiones $F - Cauchy$.

Definición 4.3.6. **<u>F-relación.</u>**
Sean $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{g} = \{g_n\}_{n\in N} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$. Diremos que la sucesión $\underline{f}$ está F-relacionada con la sucesión $\underline{g}$, y lo denotaremos por $(\underline{f})$ **F** $(\underline{g})$, si la sucesión $\underline{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \begin{cases} f_{\frac{n+1}{2}} & \text{Si n es impar,} \\ g_{\frac{n}{2}} & \text{Si n es par,} \end{cases}$$

es una sucesión F-Cauchy.

Probemos ahora el siguiente resultado.

Proposición 4.3.7. *La F-relación es una relación de equivalencia en el conjunto* $\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de que la F-relación verifica las propiedades reflexiva y simétrica es obvia.

Para la demostración de la transitividad tomemos $\underline{f}$, $\underline{g}$ y $\underline{h} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ tales que $(\underline{f})$ **F** $(\underline{g})$, y $(\underline{g})$ **F** $(\underline{h})$. Esto significa que fijado un $\varepsilon > 0$ existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ de manera que:

- para todo $n, n' \geq n_1$ se tiene que

$$F(f_n, f_{n'}) < \varepsilon, \quad F(f_n, g_n) < \varepsilon, \text{ y } F(g_n, g_{n'}) < \varepsilon,$$

- para todo $m,\ m' \geq n_2$

$$F(g_m, g_{m'}) < \varepsilon, \quad F(g_m, h_m) < \varepsilon, \text{ y } F(h_m, h_{m'}) < \varepsilon.$$

Tomemos ahora $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Se sigue entonces del último apartado de la proposición $4.3.4$, que para todo $n \geq n_0$

$$F(f_n, h_n) \leq \max\{F(f_n, g_n), F(h_n, g_n)\} < \varepsilon.$$

Así pues, tenemos que para todo $n \geq n_0$

$$F(f_n, f_{n'}) < \varepsilon, \ F(f_n, h_n) < \varepsilon \text{ y } F(h_n, h_{n'}) < \varepsilon.$$

Lo que nos permite afirmar que $(\underline{f})$ **F** $(\underline{h})$.

□

Proposición 4.3.8. *Para todo par* $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{g} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ *se tiene que existe:*

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la sucesión de números reales

$$\underline{F} = \{F(f_n, g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Así pues, para demostrar su convergencia nos bastará con comprobar que es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon/2 > 0$, teniendo en cuenta que $\underline{f}$, $\underline{g} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$, podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que para todo n, $n' \geq n_0$ se verifique que:

$$F(f_n, f_{n'}) < \varepsilon/2, \quad F(g_n, g_{n'}) < \varepsilon/2.$$

Usando la proposición $\mathbf{4.3}.4$ se obtiene:

$$\begin{aligned} F(f_n, g_n) \ &\leq \max\{F(f_n, g_{n'}), F(g_{n'}, g_n)\} \leq \\ &\max\{\max\{F(f_n, f_{n'}), F(f_{n'}, g_{n'})\}, F(g_{n'}, g_n)\} \leq \\ &\max\{F(f_n, f_{n'}),\ F(f_{n'}, g_{n'}),\ F(g_{n'}, g_n)\} \leq \\ &F(f_n, f_{n'}) + F(f_{n'}, g_{n'}) + F(g_{n'}, g_n) \end{aligned}$$

Así pues, para todo $n, n' \geq n_0$ se cumple:

$$F(f_n, g_n) - F(f_{n'}, g_{n'}) \leq F(f_n, f_{n'}) + F(g_{n'}, g_n) \leq \varepsilon.$$

Por otro lado utilizando de nuevo la proposición $4.3.4$, tenemos

$$
\begin{aligned}
F(f_{n'}, g_{n'}) \ &\leq \max\{F(f_n, f_{n'}), F(f_n, g_{n'})\} \leq \\
&\max\{\max\{F(f_n, f_{n'}), F(f_n, g_n)\}, F(g_{n'}, g_n)\} \leq \\
&F(f_{n'}, f_n) + F(f_n, g_n) + F(g_{n'}, g_n)
\end{aligned}
$$

resultando

$$F(f_{n'}, g_{n'}) - F(f_n, g_n) \leq F(f_n, f_{n'}) + F(g_{n'}, g_n) \leq \varepsilon.$$

Obtenemos así que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq n_0$, entonces se cumple que $F(f_n, g_n) - F(f_{n'}, g_{n'}) < \varepsilon$ y $F(f_{n'}, g_{n'}) - F(f_n, g_n) < \varepsilon$, es decir,

$$|F(f_n, g_n) - F(f_{n'}, g_{n'})| < \varepsilon.$$

Llegamos de este modo a comprobar que la sucesión $\{F(f_n, g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente en $\mathbb{R}$. $\square$

La existencia de dicho límite nos va a permitir definir una distancia en el conjunto que presentamos a continuación y más adelante, una ultramétrica en el conjunto $Sh(X, Y)$ de los morfismos de la forma representados por las clases de homotopía de las aplicaciones aproximativas en el sentido de $\mathbf{4.2.6}$.

Definición 4.3.9. Consideremos el conjunto de las sucesiones $\underline{f} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ y la F-relación de equivalencia. Dicha relación divide al conjunto $\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ en clases de equivalencia.

Al conjunto cociente que obtenemos mediante esta relación lo escribiremos como $\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F$ y a sus clases de equivalencia por $[\alpha] \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F$.

Así pues por $[\alpha]$ entenderemos la clase de equivalencia formada por una sucesión $\underline{f} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ y todas las sucesiones $\underline{f'} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ tales que $(\underline{f})$ $\mathbf{F}$ $(\underline{f'})$.

Definición 4.3.10. Definimos en el conjunto $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)\times(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$ la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}: & (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F) \times (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ([\alpha], [\beta]) & \longrightarrow & D([\alpha], [\beta]) = \lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n) \end{array}$$

donde $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $\underline{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones pertenecientes a $\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$, representantes de las clases de equivalencia $[\alpha]$ y $[\beta]$ respectivamente.

De este modo obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3.11. *La aplicación*

$$\mathcal{D} : (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F) \times (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una métrica completa no arquimediana, es decir, una ultramétrica para el conjunto cociente $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$.

DEMOSTRACIÓN. Lo primero que necesitamos comprobar es que la aplicación $\mathcal{D}$ está bien definida, es decir, que su definición no depende del representante de la clase elegido.

Para ello, tomemos $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{f'} = \{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{g'} = \{g'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\underline{f}$, $\underline{f'}$, $\underline{g}$, $\underline{g'} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ tales que $\underline{f}$, $\underline{f'}$ sean representantes de la clase $[\alpha]$ y $\underline{g}$, $\underline{g'}$ sean representantes de la clase $[\beta]$; es decir, $(\underline{f})\ \mathbf{F}\ (\underline{f'})$ y $(\underline{g})\ \mathbf{F}\ (\underline{g'})$.

De las propiedades de la aplicación $\mathbf{F}$ se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1})\ F(f_n, g_n) &\leq \max\{F(f_n, f'_n), F(f'_n, g_n)\} \leq \\ &\max\{\max\{F(f_n, f'_n), F(f'_n, g'_n)\}, F(g'_n, g_n)\} \leq \\ &F(f'_n, f_n) + F(f'_n, g'_n) + F(g'_n, g_n). \end{aligned}$$

2) $F(f'_n, g'_n) \ \leq \max\{F(g_n, f'_n), F(g_n, g'_n)\} \leq$

$\max\{\max\{F(f_n, f'_n), F(f_n, g_n)\}, F(g'_n, g_n)\} \leq$

$F(f'_n, f_n) + F(f_n, g_n) + F(g'_n, g_n)$.

Si aplicamos ahora el límite a ambos lados de cada una de las desigualdades obtenidas en **1**) y **2**) y además, utilizamos el hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n, f'_n) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} F(g_n, g'_n) = 0,$$

llegamos a:

- $\lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n) \leq \lim_{n\to\infty} F(f'_n, g'_n)$.
- $\lim_{n\to\infty} F(f'_n, g'_n) \leq \lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n)$.

De donde concluimos

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n) = \lim_{n\to\infty} F(f'_n, g'_n).$$

En consecuencia, la aplicación $\mathcal{D}$ está bien definida como queríamos.

Con vistas a probar que la aplicación $\mathcal{D}$ cumple las condiciones necesarias y suficientes para ser una métrica no arquimediana, debemos comprobar que para todo $[\alpha],\ [\beta] \in (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$ la aplicación

$$\mathcal{D} : (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F) \times (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

verifica las siguientes propiedades

1) $\mathcal{D}([\alpha],\ [\beta]) \geq 0$
2) $\mathcal{D}([\alpha],\ [\beta]) = 0 \quad \Longleftrightarrow \ [\alpha] = [\beta]$
3) $\mathcal{D}([\alpha],\ [\beta]) = \mathcal{D}([\beta],\ [\alpha])$
4) $\mathcal{D}([\alpha],\ [\gamma]) \leq \max\{\mathcal{D}([\alpha],\ [\beta]), \mathcal{D}([\beta],\ [\gamma])\}$

Como $F(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid f \simeq g \text{ en } U_\varepsilon\}$ se tiene entonces que $F(f,g) > 0$ y que $F(f,g) = F(g,f)$. por tanto, se verifica la primera y tercera propiedad.

En la segunda propiedad, si suponemos que $[\alpha] = [\beta]$ entonces es también consecuencia directa de la definición de $\mathbf{F}$ que $\mathcal{D}([\alpha],\ [\beta]) = 0$. Para la demostración de la otra implicación supongamos que $\mathcal{D}([\alpha],\ [\beta]) = 0$ por tanto dadas $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$, dos representantes cualesquiera de las clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ respectivamente, se tiene que $\lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n) = 0$ de donde se deduce que la sucesión $\underline{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ con

$$h_n = \begin{cases} f_{\frac{n+1}{2}} & \text{Si n es impar,} \\ g_{\frac{n}{2}} & \text{Si n es par,} \end{cases}$$

es una sucesión $F - Cauchy$, es decir, $(\underline{f})$ $\mathbf{F}$ $(\underline{g})$ y por tanto $[\alpha] = [\beta]$.

Para demostrar la última propiedad, basta con elegir $\underline{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\underline{f},\ \underline{g},\ \underline{h} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$, representantes cualesquiera de las clases $[\alpha]$, $[\beta]$ y $[\gamma] \in (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$ respectivamente, y aplicar el límite a ambos lados de la siguiente desigualdad

$$F(f_n, g_n) \leq \max\{F(f_n, h_n), F(h_n, g_n)\}.$$

Hemos demostrado así que la aplicación $\mathcal{D}$ es una métrica para el conjunto cociente $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$. Solo nos resta por comprobar que dicha métrica es completa; es decir, cualquier sucesión $[\alpha^1],\ [\alpha^2],\ [\alpha^3], \ldots, [\alpha^m], \ldots$ que tomemos en el conjunto cociente $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$, si es de Cauchy, es convergente en él.

Comencemos tomando un representante de cada clase de equivalencia al que denotaremos por $\underline{f^m} \in [\alpha^m]$, donde $\underline{f^m} = \{\, {f_1}^m,\ {f_2}^m,\ {f_3}^m, \ldots,\ {f_n}^m, \ldots \}$. Puesto que $\underline{f^m} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ tenemos que dado $\varepsilon/3 > 0$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $F({f_n}^m, {f_{n_m}}^m) < \varepsilon/3$.

Definamos ahora la siguiente sucesión en $\mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$, elegimos en cada sucesión representante $\underline{f^m}$, el término ${f_{n_m}}^m$. Obtenemos de esta manera la sucesión

$$\{{f_{n_1}}^1,\ {f_{n_2}}^2,\ {f_{n_3}}^3, ..., {f_{n_m}}^m, ...\}.$$

Veamos que dicha sucesión es una sucesión $F-Cauchy$. Puesto que la sucesión $\underline{[\alpha]} = \{[\alpha^n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el conjunto cociente $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$ se tiene entonces que para todo $\varepsilon/3 > 0$ existe un $m_{(\varepsilon/3)} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p,\ q > m_{(\varepsilon/3)}$ se verifica que:

$$\mathcal{D}([\alpha^p], [\alpha^q]) = \lim_{n\to\infty} F({f_n}^p, {f_n}^q) < \varepsilon/3.$$

De donde se deduce que existe $k_{(\varepsilon/3)} \in \mathbb{N}$ tal que $F({f_k}^{m_p}, {f_k}^{m_q}) < \varepsilon/3$ para todo $k \geq k_{(\varepsilon/3)}$. Así pues, si tomamos $k \geq \max\{m_p, m_q, k_{(\varepsilon/3)}\}$ se sigue que

$$\begin{aligned} F({f_{m_p}}^p, {f_{m_q}}^q) \ &\leq \max\{F({f_{m_p}}^p, {f_k}^q), F({f_k}^q, {f_{m_q}}^q)\} \leq \\ &\max\{\max\{F({f_{m_p}}^p, {f_k}^p), F({f_k}^p, {f_k}^q)\}, F({f_k}^q, {f_{m_q}}^q)\} \leq \\ &F({f_{m_p}}^p, {f_k}^p) + F({f_k}^p, {f_k}^q) + F({f_k}^q, {f_{m_q}}^q) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que la sucesión $\{{f_1}^1, {f_2}^2, ..., {f_m}^m, ...\}$ es $F-Cauchy$ en el espacio $\mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$, existirá una clase de equivalencia $[\beta] \in (\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$ a la que pertenecerá dicha sucesión. Esto nos lleva a poder decir que

$$\mathcal{D}([\alpha^m], [\beta]) = \lim_{n\to\infty} F({f_n}^m, {f_{n_m}}^m) = 0.$$

por tanto la sucesión $[\alpha^1],\ [\alpha^2],\ [\alpha^3], \ldots,\ [\alpha^m], \ldots$ es un sucesión convergente en $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$.

Queda así demostrado que $\mathcal{D}$ es una métrica completa en $(\mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})/F)$. $\square$

La siguiente proposición nos va a servir para conectar los resultados obtenidos en esta sección con la teoría de la forma.

Proposición 4.3.12. *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *espacios métricos compactos.*

a) Una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ *es una sucesión* $F - Cauchy$ *si y solo si es una aplicación aproximativa (en el sentido definido en* $\mathbf{4.2.6}$*).*

b) Dos sucesiones $F-Cauchy: \{f_n\},\ \{g_n\} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ *están* $F-relacionadas$ *si y solo si son aplicaciones aproximativas homotópicas (en el sentido que se dio en la proposición* $\mathbf{4.2.8}$*).*

Como se probó en la primera sección, las clases de homotopía de las aplicaciones aproximativas, con la definición dada en $\mathbf{4.2.6}$, se pueden usar para representar los morfismos de la forma en el caso de los espacios métricos compactos, $Sh(X, Y)$; también las clases de equivalencia de las sucesiones $F - Cauchy: \{f_n\},\ \{g_n\} \subset \mathcal{C}(X, 2^Y_{upp})$ que son F-relacionadas sirve para representar dichos morfismos.

Alcanzamos así el siguiente teorema.

Teorema 4.3.13. *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *espacios métricos compactos. Consideremos a* Y *sumergido en* 2^Y_{upp} *y* $Sh(X, Y)$ *el conjunto de los morfismos de la forma entre* X *e* Y*. Elijamos* $\underline{f} = \{f\}_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $\underline{g} = \{g\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}C(X, 2^Y_{upp})$ *representantes de los morfismos* $\alpha, \beta \in Sh(X, Y)$*. Definimos la aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\mathcal{D}} & : Sh(X,Y) \times Sh(X,Y) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha,\beta) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}}(\alpha,\beta) \end{array}$$

donde

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} F(f_n, g_n).$$

Entonces $(Sh(X, Y), \widetilde{\mathcal{D}})$ *es un espacio métrico completo no Arquimediano.*

Todavía podemos sacar más beneficios a la aplicación $\widetilde{\mathcal{D}}$, pero primero necesitamos comprobar la siguiente proposición.

Proposición 4.3.14. *Sean* (X, d) *y* (Y, ρ) *espacios métricos compactos. Supongamos* f*,* $g : X \longrightarrow 2^Y_{upp}$ *son dos aplicaciones continuas tales que* $\sup\{\rho(f(x), g(x))\} < \varepsilon$*, entonces existe una homotopía* $H : X \times I \longrightarrow U_\varepsilon$ *entre* f *y* g*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H : X \times I \longrightarrow U_\varepsilon$ definida por :

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ f(x) \cup g(x) & \text{si } t = 1/2 \\ g(x) & \text{si } 1/2 > t \leq 1. \end{cases}$$

Observar que $H(x, t) \in U_\varepsilon$ para todo $(x, t) \in X \times I$ y para todo $\varepsilon > 0$ ya que $\sup \rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$.

Puesto que podemos escribir el espacio $X \times I$ como la unión de los cerrados $X \times [0,\ 1/2]$ y $X \times [1/2,\ 1]$, bastará para demostrar la continuidad de la aplicación $H : X \times I \longrightarrow 2^Y_{upp}$, con demostrar:

- H restringida a $X \times [0, 1/2]$ es continua.
- H restringida a $X \times [1/2, 1]$ es continua.

$\underline{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbf{X} \times [\mathbf{0}, \mathbf{1/2}].}$

Si $(x, t) \in X \times [0, 1/2]$ con $t < 1/2$ tenemos entonces que $H(x, t) = f(x)$. Puesto que f es una aplicación continua, se sigue entonces que para todo entorno abierto B_U del punto $f(x)$ en el hiperespacio 2^Y_{upp}, existe V entorno abierto de x en el espacio X cumpliéndose que $f(V) \subset B_U$.

Así que podemos decir que para cualquier B_U entorno abierto del punto $f(x)$ en el hiperespacio 2^Y_{upp}, existe $V \times [0, 1/2)$ entorno abierto de (x, t) en el espacio $X \times [0, 1/2]$ verificando la condición de continuidad:

$$H(V \times [0, 1/2)) \subset B_U.$$

Si tomamos el punto $(x, 1/2)$ en este caso tenemos que $H(x, 1/2) = f(x) \cup g(x)$. Tomemos B_U un entorno abierto del punto $f(x) \cup g(x)$ en el hiperespacio 2^Y_{upp}. Se tiene entonces que $f(x) \in B_U$ y $g(x) \in B_U$. Esto nos lleva a poder decir que existen dos abiertos V y V' del punto x en el espacio X tales que $f(V) \subset B_U$ y $g(V') \subset B_U$.

Teniendo en cuenta que $V \cap V'$ es obviamente un abierto del punto x en el espacio X, se sigue que el conjunto $(V \cap V') \times (1/2 - \varepsilon, 1/2]$ con $\varepsilon > 0$ es un abierto del punto $(x, 1/2)$ en el espacio $X \times [0,\ 1/2]$. Sea $(x', t') \in (V \cap V') \times (1/2 - \varepsilon, 1/2]$ se tiene entonces que:

- Si $t' < 1/2$ entonces $H(x', t') = f(x')$ y puesto que $x' \in V$, se sigue que $f(x') \subset B_U$. Obtenemos así que $H(x', t') \subset B_U$.
- Si $t' = 1/2$ entonces $H(x', t') = f(x') \cup g(x')$ y como $x' \in V \cap V'$ obtenemos que $f(x') \subset B_U$ y $g(x') \subset B_U$ y por tanto $H(x', t') \subset B_U$.

$(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbf{X} \times [\mathbf{1/2},\ \mathbf{1}]$.

Si $(x, t) \in X \times [1/2,\ 1]$ con $t > 1/2$ entonces, se sigue que $H(x, t) = g(x)$. Para cada B_U entorno abierto del punto $g(x)$ en el hiperespacio 2^Y_{upp}, existe V entorno abierto del punto (x, t) en el espacio X tal que $g(V) \subset B_U$, por ser g continua. Obtenemos así que el abierto $V \times (1/2, 1]$ del punto (x, t) en el espacio producto $X \times [1/2,\ 1]$ cumple:

$$H(V \times (1/2, 1]) \subset B_U.$$

Si tomamos el punto $(x, 1/2)$ se tiene entonces que $H(x, 1/2) = f(x) \cup g(x)$. Sea B_U un entorno abierto del punto $f(x) \cup g(x)$ en el hiperespacio 2^Y_{upp}. Se tiene entonces que $f(x) \in B_U$ y $g(x) \in B_U$.

Esto nos lleva a poder decir que existen dos abiertos V y V' del punto $(x, 1/2)$ en el espacio X, de tal forma que $f(V) \subset B_U$ y $g(V') \subset B_U$.

Teniendo en cuenta que $V \cap V'$ es obviamente un abierto del punto x en el espacio X, se sigue que el conjunto $(V \cap V') \times [1/2,\ 1/2+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ es un abierto del punto $(x, 1/2)$ en el espacio $X \times [1/2,\ 1]$. Sea $(x', t') \in (V \cap V') \times [1/2,\ 1/2+\varepsilon)$, se tiene entonces que

- Si $t' \in (1/2, 1/2+\varepsilon)$ entonces $H(x', t') = g(x')$ y como $x' \in V$, se sigue que $g(x') \subset B_U$. Obtenemos así que $H(x', t') \subset B_U$.
- Si $t' = 1/2$ entonces $H(x', 1/2) = f(x') \cup g(x')$ y como $x' \in V \cap V'$ deducimos que $f(x') \subset B_U$ y $g(x') \subset B_U$ y por tanto, $H(x', t') \subset B_U$.

Puesto que la aplicación H es continua, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, se tiene entonces que la aplicación H es además una homotopía entre f y g, y por tanto, que las aplicaciones f y g son homotópicas.

Además es fácil ver que

$$\mathbf{Sup}_{\{\mathbf{t \in I}\}}(dim(H(x,t))) = d(f, g),$$

donde $dim(H(x,t))$ denota el diámetro de $H(x,t)$.

$\square$

Recordamos ahora la siguiente definición.

Definición 4.3.15. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos compactos. Consideremos en el espacio $\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ continua}\}$ la siguiente distancia:

$$\begin{array}{rcl} d' \ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(X,Y) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longrightarrow & d'(f, g). \end{array}$$

Con

$$d'(f, g) = \max\{\rho(f(x), g(x)) \mid \quad \forall x \in X\}.$$

Se tiene entonces

Proposición 4.3.16. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} S \ : \mathcal{C}(X,Y) & \longrightarrow & Sh(X,Y) \\ f & \longrightarrow & [f] \end{array}$$

es uniformemente continua, siendo $[f]$ *el morfismo de la forma generado por la aplicación* f *(si consideramos las métricas* d *y* ρ*).*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f,\ g \in \mathcal{C}(X,Y)$ dos funciones cualesquiera tales que $d'(f,g) < \varepsilon,$ es decir, $\rho\,(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X.$ Así pues, de la proposición $\mathbf{4.3.14},$ obtenemos que existe una homotopía $H : X \times I \longrightarrow U_\varepsilon$ entre f y $g.$ De donde se deduce que $\widetilde{\mathcal{D}}([g],[f]) \leq \varepsilon,$ lo que nos lleva a que la aplicación S es uniformemente continua como deseábamos. □

Esta última proposición puede ser utilizada para estudiar propiedades de conexión en el espacio $\mathcal{C}(X,Y)$.

4.4. CASO DE ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS LOCALMENTE CONEXOS: LA MÉTRICA DE HAUSDORFF

Usando también los hiperespacios pero ahora con la topología generada a partir de la *métrica de Hausdorff* y el *Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West*, conseguimos desarrollar una nueva descripción de la teoría de la forma para el caso de los espacios métricos compactos conexos y localmente conexos; es decir, para los espacios continuos de Peano. La descripción que obtenemos, además de ser intrínseca, es más fuerte que la alcanzada para este caso por J. M. R. Sanjurjo en [Sa.3], puesto que aunque también utilizamos las funciones multivaluadas para describir la forma en nuestro caso, no solo serán semicontinuas superiormente sino que además lo serán inferiormente. Extenderemos después esta descripción al caso más general de espacios métricos compactos y localmente conexos (no necesariamente conexos).

Así pues, comenzamos proporcionando la definición de hiperespacios con la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

Definición 4.4.1. **Distancia de Hausdorff.**
Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $2^X = \{C \subset X \mid C \text{ cerrado no vacío}\}$ su hiperespacio. Dado $\varepsilon > 0$ y $C \in 2^X$ llamamos bola de centro C y radio $\varepsilon > 0$ al conjunto $B_d(C, \varepsilon) = \{x \in X \mid \exists\, c \in C, \text{ tal que } d(x, c) < \varepsilon\}$.

Sean $C,\ D \in 2^X$ entonces definimos la distancia Hausdorff entre C y D por

$$H_d(C, D) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid C \subset B_d(D, \varepsilon) \text{ y } D \subset B_d(C, \varepsilon)\}.$$

Observar que si tomamos $C = \{x\} \in 2^X$, entonces la bola $B_d(\{x\}, \varepsilon)$ es igual a la bola $B_\varepsilon(x)$ en X.

Nota. La distancia Hausdorff también se puede definir como

$$H_d(C, D) = \max\{\sup_{c \in C} d(c, D),\ \sup_{d \in D} d(d, C)\}.$$

Es fácil constatar que H_d es una función del producto cartesiano $2^X \times 2^X$ en el conjunto los números reales no negativos. De hecho es fácil comprobar (ver [V.1], [N.1] o [Ku.2]) que H_d es una métrica en 2^X inducida por la distancia d del espacio (X, d), a la cual nos referiremos como métrica de Hausdorff.

Definición 4.4.2. **El hiperespacio $\mathbf{2^X_H}$.**
Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Por 2^X_H entenderemos el hiperespacio 2^X dotado de la topología generada a partir de la métrica de *Hausdorff.* Esta topología tiene como base a la familia $\mathcal{D} = \{\{B_H(C, \varepsilon)\}_{C \in 2^X}\}_{\varepsilon > 0}$ donde

$$B_H(C, \varepsilon) = \{D \in 2^X \mid H_d(C, D) < \varepsilon\}.$$

Puesto que X es compacto, se tiene que 2^X_H es compacto y además se tiene:

Proposición 4.4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces*

- *X es conexo si y solo si 2^X_H es conexo.*
- *X es localmente conexo si y solo si 2^X_H es localmente conexo.*

Para las demostraciones de estos resultados, así como para obtener mayor información acerca de los hiperespacio 2^X_H, se pueden consultar los libros de S.B. Nadler [N.1], J. Van Mill [V.1] o K. Kuratowski [Ku.2].

Para llevar a cabo nuestros propósitos, como ya comentamos al inicio de la sección, vamos a utilizar uno de los teoremas más importantes sobre estructura topológica de los hiperespacios con la métrica de Hausdorff que establecieron D. W. Curtis y R. M. Schori en [Cur-Scho.1], a partir del artículo de R. M. Schori y J. E. West [Scho-We.1], y que recordamos a continuación.

Teorema 4.4.4. **Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West.**
Sea X es un continuo métrico no degenerado entonces son equivalentes:

- *X es un continuo de Peano*
- *2^X_H es homeomorfo al cubo de Hilbert*

También necesitamos definir la inmersión canónica del espacio X en su hiperespacio 2^X_H. Se hará de modo análogo a como se hizo en el primer capítulo en **1.2.8**, y se representará a esta inmersión con el mismo símbolo que usamos en el primer capítulo.

Definición 4.4.5. **Aplicación canónica.**
Dado (X, d) espacio métrico compacto, llamaremos aplicación canónica o inmersión canónica a la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi \ : X &\longrightarrow \ 2^X_H \\ x &\longrightarrow \ \{x\}. \end{aligned}$$

Proposición 4.4.6. *La inmersión canónica :*

$$\Phi : X \longrightarrow 2^X_H$$

es un homeomorfismo sobre $\Phi(X)$.

Por último, para obtener una mejor representación de los morfismos de la forma en el caso localmente conexo, necesitamos una base de entornos de X en 2^X_H que obtenemos en la siguiente proposición y que es un resultado similar al conseguido en la proposición $\mathbf{3.2.4}$.

Proposición 4.4.7. *Sea* (X, d) *un espacio métrico compacto. Identifiquemos mediante la inmersión canónica* $\Phi : X \longrightarrow 2^X_H$, *al espacio* X *con su copia* $\Phi(X)$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *se define el siguiente conjunto:*

$$U_\varepsilon = \{C \in 2^X_H \mid diam(C) < \varepsilon\}.$$

Se tiene entonces que la familia de abiertos $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *es una base de entornos de* X *en* 2^X_H. *En particular la familia* $\{U_{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *será una base numerable de entornos abiertos de* X *en* 2^X_H.

DEMOSTRACIÓN. Llevaremos a cabo la demostración de manera similar a como lo hicimos en $\mathbf{3.2.4}$. Primero comprobaremos que U_ε es un abierto de 2^X_H para cualquier $\varepsilon > 0$ y después probaremos que para todo U, entorno abierto de X en 2^X_H, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Phi(X) \subset U_\varepsilon \subset U.$$

Como $diam(\{x\}) = 0$ para todo $\{x\} \in \Phi(X)$, es obvio entonces que $\Phi(X) \subset U_\varepsilon$ para cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Pasemos pues a verificar que U_ε es un abierto de 2^X_H para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $C \in U_\varepsilon$, con $diam(C) = r < \varepsilon$, y tomemos en 2^X_H la bola $B_H(C, \delta)$, donde $\delta = (\varepsilon - r)/2$. Se sigue entonces que para todo $D \in B_H(C, \delta)$ se tiene que $H_d(C, D) < \delta$, en particular, para todo punto $p \in D$ se verifica que existe un punto $p_c \in C$ tal que $d(p, p_c) < \delta$.

Así pues, dados dos puntos $p,\ p' \in D$, existen $p_c, p'_c \in C$ tales que $d(p, p_c) < \delta$ y $d(p', p'_c) < \delta$, lo que nos permite acotar la distancia para todo $p, p' \in D$:

$$d(p, p') \leq d(p, p_c) + d(p_c, p'_c) + d(p'_c, p') <$$
$$< (\varepsilon - r)/2 + (\varepsilon - r)/2 + r = (\varepsilon - r) + r = \varepsilon.$$

Obtenemos así que $diam(D) < \varepsilon$ para todo $D \in B_H(C, \delta)$ y por tanto $D \in U_\varepsilon$.

Resumiendo tenemos que para cualquiera que sea $C \in U_\varepsilon$, con $diam(C) = r$, existe un abierto básico $B_H(C, (\varepsilon - r)/2)$ de X en 2^X_H tal que

$$C \in B_H(C, (\varepsilon - r)/2) \subset U_\varepsilon.$$

Después de lo cual, podemos asegurar que U_ε es un abierto de 2^X_H como queríamos.

Para la segunda parte de la demostración tomamos U abierto X en 2^X_H. Para cada $x \in X$ elegimos un $\varepsilon_x > 0$ de tal forma que el abierto $B_H(\{x\}, \varepsilon_x)$ de x en 2^X_H verifica que $B_H(\{x\}, \varepsilon_x) \subset U$; se sigue entonces que la familia:

$$\mathcal{D} = \{B_H(\{x\}, \varepsilon_x)\}\}_{x \in X},$$

es un recubrimiento de X por abiertos de 2^X_H. Por ser X es un espacio compacto existe un número positivo β, que es el número de Lebesgue del recubrimiento $\mathcal{D}$, con la propiedad de que dado $x \in X$ la bola $B_H(\{x\}, \beta)$ está contenida en al menos un elemento del recubrimiento $\mathcal{D}$, es decir, existe al menos un $x' \in X$ tal que la bola $B_H(\{x'\}, \varepsilon_{x'}) \in \mathcal{D}$ cumple que:

$$B_H(\{x\}, \beta) \subset B_H(\{x'\}, \varepsilon_{x'}) \subset U.$$

Si tomamos el abierto $U_{\beta/2} \in \mathcal{U} = \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, se tiene entonces de la propia definición de $U_{\beta/2}$ que para todo $C \in U_{\beta/2}$ se verifica que $C \in B_H(\{c\}, \beta/2)$ para todo $c \in C$.

Además puesto que $c \in C \subset X$, por lo expuesto anteriormente, existirá un punto $x_c \in X$ y $B_H(\{x_c\}, \varepsilon_{x_c}) \in \mathcal{D}$ tal que $B_H(\{c\}, \beta/2) \subset B_H(\{x_c\}, \varepsilon_{x_c})$. Llegamos así a que para cada $C \in U_{\beta/2}$ se cumple

$$C \in B_H(\{c'\}, \beta/2) \subset B_H(x'_c, \varepsilon_{c'}) \subset U.$$

Es decir, para cada abierto U de X en 2^X_{upp} existe un abierto $U_{\beta/2}\mathcal{U}$ tal que $X \subset U_{\beta/2} \subset U$ lo que concluye la demostración. □

Con todos estos resultados estamos ya en disposición de obtener una nueva descripción intrínseca de la teoría de la forma para el caso de espacios métricos compactos conexos y localmente conexos.

El *Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West*, 4.4.4, nos permite definir las aplicaciones aproximativas en el sentido de K. Borsuk en [Bo.6] para el caso de los espacios métricos compactos conexos y localmente conexos, de la siguiente manera:

"Si X e Y son dos continuos de Peano no degenerados entonces una aplicación aproximativa de X en Y es una familia $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $f_n : X \longrightarrow 2^Y_H$ son aplicaciones continuas univaluadas para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que para todo U abierto de Y en 2^Y_H existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que f_n es homotópica a f_{n+1} en U, $f_n|U \simeq f_{n+1}|U$, para todo $n \geq n_0$."

Utilizando las dos siguientes proposiciones.

Proposición 4.4.8. *([N.1]) La topología de Vietoris o topología finita coincide en 2^X con la topología generada a partir de la métrica de Hausdorff, cuando el espacio X es un espacio métrico compacto.*

Proposición 4.4.9. *([Mi.1]) Toda función F que asigna a cada punto x de un espacio topológico X un subespacio cerrado no vacío $F(x)$ de un espacio topológico Y, es una función continua del espacio X en 2^Y con la topología de Vietoris si y solo si la función multivaluada $F : X \longrightarrow Y$ es semicontinua superior e inferiormente.*

Obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.4.10. *Sean X, Y dos continuos de Peano. Una función multivaluada $F : X \longrightarrow Y$ es semicontinua superior e inferiormente si y solo si la función univaluada $f : X \longrightarrow 2^Y_H$, definida por $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$, es continua.*

Además se tiene la siguiente relación entre las multiredes y las aplicaciones aproximativas.

Proposición 4.4.11. *Una sucesión $\widetilde{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (donde $F_n : X \longrightarrow Y$ son funciones multivaluadas semicontinuas superior e inferiormente) es una multired si y solo si la sucesión $\widetilde{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (donde $f_n : X \longrightarrow 2^Y_H$ son funciones continuas univaluadas y $f_n = F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) es una aplicación aproximativa en el sentido de K. Borsuk.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de esta proposición es exactamente igual que la demostración de la proposición $4.2.7$ solo que cambiando 2^X_{upp} por 2^X_H y $U_\varepsilon = \{C \in 2^X_{upp} \mid diam(C) < \varepsilon\}$ por $U_\varepsilon = \{C \in 2^X_H \mid diam(C) < \varepsilon\}$. □

De donde se deduce el corolario:

Corolario 4.4.12. *Para la clase de los espacios métricos compactos conexos y localmente conexos, obtenemos una nueva descripción intrínseca de la teoría de la forma usando para definir las multiredes entre ellos funciones multivaluadas semicontinuas superiormente e inferiormente.*

Conseguimos así una descripción más fuerte, en el caso de los espacios continuos de Peano, que la obtenida por J.M.R. Sanjurjo en [Sa.3].

Extendemos ahora nuestro resultado a espacios métricos compactos localmente conexos (no necesariamente conexos).

Teorema 4.4.13. *Para la clase de los espacios métricos compactos y localmente conexos, encontramos una descripción intrínseca de la teoría de la forma usando para definir las multiredes entre ellos, funciones multivaluadas semicontinuas superior e inferiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, d) un espacio métrico compacto localmente conexo. Denotaremos por $\square X$ el conjunto de todas las componentes conexas de X. Por ser X un espacio compacto y localmente conexo, existirán una cantidad finita de componentes conexas $X_1, X_2, \ldots, X_{n_0}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n_0} X_i$.

También del hecho de ser X un espacio compacto y localmente conexo, obtenemos que 2_H^X compacto y localmente conexo y por tanto, 2_H^X tiene una cantidad finita de componentes conexas. Puesto que $2_H^X \supset 2^{X_1} \oplus 2^{X_2} \oplus \ldots, 2^{X_{n_0}}$, es fácil detectar que las componentes conexas de 2_H^X que cortan a la copia canónica de X son exactamente $2^{X_1} \oplus 2^{X_2} \oplus \ldots, 2^{X_{n_0}}$. Se tiene entonces que $X \subset 2^{X_1} \oplus 2^{X_2} \oplus \ldots, 2^{X_{n_0}} \subset 2_H^X$.

Salvo en el caso de que la componente conexa sea un punto, el hiperespacio de cada componente X_i para todo $i = 1, \ldots, n_0$, por ser X_i compacta conexa y localmente conexa, es homeomorfo al cubo de Hilbert; esto es, $2_H^{X_i} \approx \mathcal{Q}$ para todo $i = 1, \ldots, n_0$. Se tiene por tanto, que el espacio $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n_0} 2_H^{X_i}$ es un ANR donde el espacio X está sumergido como cerrado. Las aplicaciones aproximativas se definen ahora entre espacios métricos compactos localmente conexos que podemos considerar sumergidos en el ANR $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n_0} 2_H^{X_i}$ con la topología inducida por la métrica de *Hausdorff*. Además, como $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n_0} 2_H^{X_i}$ es un abierto de 2^X que contiene a la copia canónica de X, se sigue que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda aplicación $f : Y \longrightarrow 2_H^X$ con $diam\,(f(Y)) < \varepsilon_0$, se tiene que $f(Y) \subset \bigoplus_{i=1}^{n_0} 2_H^{X_i}$. Así pues, podemos considerar que las aplicaciones aproximativas serán de la forma $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$f_n : Y \longrightarrow X \subset \bigoplus_{i=1}^{n_0} 2_H^{X_i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De este modo, usando las proposiciones $4.4.10$ y $4.4.11$, obtenemos que las multiredes en el caso de los espacios métricos compactos localmente conexos, se pueden definir utilizando funciones multivaluadas que son a la vez semicontinuas superior e inferiormente.

□

Uno de los resultados más importantes en teoría de la forma es el obtenido por T. A. Chapman en [Chap.1] en el que el autor demuestra que la forma de un espacio métrico compacto, sumergido como Z-conjunto, depende y determina el tipo de homeomorfismos de su complementario en el cubo de Hilbert.

Teorema 4.4.14. **Teorema de complementarios de Chapman.**
Sean X, Y dos espacios métricos compactos sumergidos como Z-conjuntos en el cubo de Hilbert Q, entonces X e Y tienen la misma forma sí y solo sí sus complementarios en el cubo de Hilbert $Q - X$ y $Q - Y$ son homeomorfos.

Teniendo en cuenta la siguiente proposición $4.4.15$, que podemos encontrar enunciada y demostrada por ejemplo en [V.1], y el *Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West*, $4.4.4$, obtenemos en el teorema $4.4.16$ una transcripción del *teorema de complementarios de Chapman* para el caso de los espacios continuos de Peano no degenerados.

Proposición 4.4.15. *Si X es un continuo de Peano no degenerado entonces se tiene que su inmersión canónica $\Phi(X)$ es un Z-conjunto en el hiperespacio 2_H^X que es un cubo de Hilbert.*

Teorema 4.4.16. *Sean X, Y dos continuos de Peano no degenerados entonces X e Y tienen la misma forma sí y solo sí su complementarios $2_H^X - X$ y $2_H^Y - Y$ son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que X e Y son dos continuos de Peano no degenerados del *Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West*, $4.4.4$, obtenemos que existen dos homeomorfismos $h : 2_H^X \longrightarrow Q$ y $h' : 2_H^Y \longrightarrow Q$. Así pues, tenemos que $h|_{2_H^X - X} : 2_H^X - X \longrightarrow Q - h(X)$ y $h'|_{2_H^Y} : 2_H^Y - Y \longrightarrow Q - h'(Y)$ son también homeomorfismos. Además de la proposición **4.4.15**, se sigue que $h(X)$ y $h'(Y)$ son Z-conjuntos en el cubo de Hilbert.

Por tanto si suponemos que X e Y son dos continuos de Peano no degenerados que tienen la misma forma, de la proposición **4.4.15** y del *teorema de Chapman*, **4.4.14**, se sigue que $Q - h(X)$ y $Q - h'(Y)$ son homeomorfos y por tanto, que $2_H^X - X$ y $2_H^Y - Y$ son homeomorfos como queríamos.

Si suponemos que X e Y son dos continuos de Peano no degenerados tales que $2_H^X - X$ y $2_H^X - Y$ son homeomorfos, se sigue entonces que $Q - h(X)$ y $Q - h'(Y)$ son homeomorfos; y puesto que $h(X)$ y $h'(X)$ son Z-conjunto en el cubo de Hilbert, del *teorema de Chapman*, **4.4.14**, se obtiene que $h(X)$ y $h'(Y)$ tienen las misma forma y por tanto, también X e Y como queríamos demostrar. $\square$

Si X e Y son dos espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua podemos entonces, de igual modo que hicimos en el primer capítulo con la topología semifinita superior en **1.4.1**, definir una función $2^f : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$ entre sus hiperespacios con la topología generada a partir de la métrica de *Hausdorff* por:

$$\begin{aligned} 2^f \quad : 2_H^X \longrightarrow & \qquad 2_H^Y \\ C \longrightarrow & \quad 2^f(C) = \overline{f(C)}. \end{aligned}$$

La ventaja en este caso es que $f(C)$ es siempre cerrado, hecho que junto a la observación de que la métrica *Hausdorff* restringida a X coincide con la métrica de X nos lleva a poder asegurar que 2^f es una aplicación continua.

Dados X, Y espacios métricos compactos es obvio que si X es homeomorfo a Y entonces, se tiene que $2_H^X - X$ es uniformemente homeomorfo a $2_H^Y - Y$. (De aquí y en todo lo que resta uniformemente homeomorfo significa que existe un homeomorfismo uniforme respecto a las métricas tal que su inversa es también uniforme).

Si 2_H^X es homeomorfo a 2_H^Y en general no es cierto que X e Y sean homeomorfos como se obtiene del *Teorema de hiperespacios de Curtis-Schori-West*, 4.4.4. (Pelczynski en [Pelc.1] proporciona un contraejemplo).

Puesto que si X es un continuo de Peano no degenerado entonces $2_H^X - X$ es denso en 2_H^X, en el siguiente teorema se demuestra que en el caso de los continuos de Peano la estructura uniforme del complementario del espacio en su hiperespacio con la métrica heredada, depende y determina la estructura topológica del espacio.

Teorema 4.4.17. *Sean (X, d), (Y, d') dos continuos de Peano no degenerados. Entonces X e Y son homeomorfos si y solo si $(2_H^X - X, |_{H_d})$ y $(2_H^Y - Y, |_{H_{d'}})$ son uniformemente homeomorfos, donde $|_{H_d}$ y $|_{H_{d'}}$ representan las métricas de Hausdorff de 2_H^X y 2_H^Y respectivamente restringidas a sus complementarios $2_H^X - X$ y $2_H^Y - Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos suponiendo que existe $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo y por tanto, la aplicación $2^h : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$ será también un homeomorfismo. Puesto que $(2_H^X, H_d)$ y $(2_H^Y, H_{d'})$ son métricos compactos, se sigue entonces que 2^h es un homeomorfismo uniforme. Así pues, como $h(X) = Y$, se tiene entonces que $2^h|_{2_H^X - X} : 2_H^X - X \longrightarrow 2_H^Y - Y$ es un homeomorfismo uniforme respecto a las métricas H_d y $H_{d'}$ restringidas a $2_H^X - X$ y $2_H^Y - Y$.

En el otro sentido, supongamos que existe $h : 2_H^X - X \longrightarrow 2_H^Y - Y$ homeomorfismo uniforme. Puesto que tanto $(2_H^X, H_d)$ como $(2_H^Y, H_{d'})$ son la compleción métrica de $(2_H^X - X, |_{H_d})$ y $(2_H^Y - Y, |_{H_{d'}})$ respectivamente, se tiene entonces que tanto h como h^{-1} admiten una extensión continua a los totales: $\widehat{h} : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$, $\widehat{h^{-1}} : 2_H^Y \longrightarrow 2_H^X$.

Como

$$(\widehat{h} \circ \widehat{h^{-1}})|_{2_H^Y - Y} = Id|_{2_H^Y - Y} \qquad \text{y} \qquad (\widehat{h^{-1}} \circ \widehat{h})|_{2_H^X - X} = Id|_{2_H^X - X},$$

se sigue entonces que las dos aplicaciones coinciden en el total, es decir:

$$\widehat{h} \circ \widehat{h^{-1}} = Id|_{2^Y_H} \qquad \text{y} \qquad \widehat{h^{-1}} \circ \widehat{h} = Id|_{2^X_H}.$$

Obtenemos así que $\widehat{h}$ es un homeomorfismo tal que $\widehat{h}|_{2^X_H - X} = h$ y por tanto, $\widehat{h}(X) \subset Y$ y $\widehat{h^{-1}}(Y) \subset X,$ de donde se deduce que X e Y son homeomorfos como queríamos. □

Observación 4.4.18. En vista de lo anterior uno pude observar que en algún sentido la diferencia entre la clasificación topológica y la clasificación por la forma, en el caso (no degenerado) de los espacios continuos de Peano viene a ser como la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme.

Nos preguntamos ahora que ocurre si en el teorema $4.4.\mathbf{17}$ no se impone que los espacios sean continuos de Peano. La respuesta la obtenemos en el teorema $4.4.\mathbf{22}$ pero antes daremos unas proposiciones previas que nos serán necesarias para su demostración.

Observar que por ser los espacios con los que estamos trabajando métricos compactos, si un cerrado está formado por puntos aislados entonces tiene una cantidad finita de puntos aislados.

La demostración de las siguientes proposiciones, **4.4.19**, **4.4.20** se puede ver en el artículo de A. Pelczynski [Pelc.1].

Proposición 4.4.19. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces $C \in 2^X$ es un punto aislado de 2^X_H si y solo si todos los puntos de C son puntos aislados de $X,$ es decir, C es una unión finita de puntos aislados de X.*

Proposición 4.4.20. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios infinitos métricos compactos, sean X_0 e Y_0 los conjuntos de los puntos aislados de X e $Y,$ respectivamente. Supongamos que X_0 es denso en X y Y_0 es denso en Y. Entonces todo homeomorfismo $h : X - X_0 \longrightarrow Y - Y_0$ puede extenderse a un homeomorfismo de X en Y.*

Proposición 4.4.21. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto no degenerado. Entonces X no tiene puntos aislados si y solo si $2^X_H - X$ es denso en 2^X_H.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos suponiendo que X no tienen puntos aislados.

Sea C un cerrado de X y por tanto, también compacto con más de un punto. Dado $\varepsilon > 0$, la familia $\mathcal{H} = \{\bigcup_{x \in C} B_d(\{x\}, \varepsilon)\}$ forma un recubrimiento abierto de C en X, en particular, si tomamos $\varepsilon_n = 1/n$ la familia $\mathcal{H}_n = \{\bigcup_{x \in C} B_d(\{x\}, 1/n)\}$ forma un recubrimiento abierto de C en X, del cual podemos extraer un subrecubrimiento finito. Esto es, existen $x^n_1, x^n_2, \ldots, x^n_{m_n} \in C$ tales que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} B_d(\{x^n_i\}, 1/n).$$

Así pues, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $C_n = \{x^n_1, x^n_2, x^n_3 \ldots x^n_{m_n}\}$ al conjunto de puntos de C tales que $\widehat{\mathcal{H}}_n = \{\bigcup_{x \in C_n} B_d(\{x\}, 1/n)\}$ es un subrecubrimiento finito del recubrimiento $\mathcal{H}_n$, esto es:

$$C \subset \bigcup_{x \in C_n} B_d(\{x\}, 1/n) \subset \bigcup_{x \in C} B_d(\{x\}, 1/n).$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces

$$C \subset B_d(C_n, 1/n) \qquad \text{y} \qquad C_n \subset B_d(C, 1/n).$$

De donde obtenemos que $H_d(C, C_n) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que nos conduce al siguiente resultado:

$$\lim_{n \to \infty} C_n = C.$$

Sea ahora C un cerrado de X con un solo punto, $C = \{x_0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $\varepsilon_n = 1/n$ y en cada bola $B_d(\{x_0\}, \varepsilon_n)$, puesto que X no tiene puntos aislados, un punto $x_n \in B_d(\{x_0\}, \varepsilon_n)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ formamos el cerrado $C_n = \{x_0, x_n\}$ de X. Se tiene entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{x_0\} \subset B_d(C_n, \varepsilon_n) \qquad \text{y} \qquad C_n \subset B_d(\{x_0\}, \varepsilon_n).$$

De donde se sigue que $H_d(\{x_0\}, C_n) < \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos así el siguiente resultado:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = x_0.$$

Queda así demostrado que $2^X_H - X$ es denso en 2^X_H como queríamos.

En el otro sentido, supongamos que $2^X_H - X$ es denso en 2^X_H, se sigue entonces que la copia canónica de X no contiene ningún abierto de 2^X_H y por tanto, 2^X_H no tiene puntos aislados; entonces usando la proposición anterior **4.4.19**, obtenemos que X no tiene puntos aislados. $\square$

Teorema 4.4.22. *Sean (X, d), (Y, d') espacios métricos compactos, entonces X, Y son homeomorfos sí y solo sí $(2^X_H - X, |_{H_d})$ y $(2^Y_H - Y, |_{H'_d})$ son uniformemente homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. • $\Longrightarrow$) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y $2^f : 2^X_H \longrightarrow 2^Y_H$ el correspondiente homeomorfismo entre sus hiperespacios, generado a partir de f, definido por $2^f(C) = \overline{f(C)} = f(C)$ para todo $C \in 2^X_H$.

Debido a que la imagen del espacio X, mediante el homeomorfismo 2^f, es el espacio Y y que además 2^X_H y 2^Y_H son espacios métricos y compactos, podemos concluir que el homeomorfismo 2^f restringido a $2^X_H - X$ es, como queríamos, un homeomorfismo uniforme entre $2^X_H - X$ y $2^Y_H - Y$.

- $\Longleftarrow$) En el otro sentido, supongamos ahora que existe un homeomorfismo uniforme $h : 2^X_H - X \longrightarrow 2^Y_H - Y$ y denotemos por $\mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{A}(Y)$ al conjunto de los puntos aislados de X e Y respectivamente. Sean $P_F(\mathcal{A}(X))$ y $P_F(\mathcal{A}(Y))$ el conjunto de las partes finitas de $\mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{A}(Y)$ respectivamente, y $P_{F+1}(\mathcal{A}(X))$ y $P_{F+1}(\mathcal{A}(Y))$ el conjunto de las partes finitas de $\mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{A}(Y)$ con más de un punto. De la proposición $\mathbf{4.4.19}$, se sigue que el homeomorfismo h induce una biyección entre $P_{F+1}(\mathcal{A}(X))$ y $P_{F+1}(\mathcal{A}(Y))$. En el caso de $Card\,(\mathcal{A}(X))$ sea finito obviamente se tiene que que $Card\,(\mathcal{A}(X)) = Card\,(\mathcal{A}(Y))$. Por otra parte si $Card\,(\mathcal{A}(X))$, es infinito, puesto que $P_{F+1}(\mathcal{A}(X)) \subset (P_F(\mathcal{A}(X)))$ y $Card\,(\mathcal{A}(X)) = Card\,(P_F(\mathcal{A}(X)))$, se tiene entonces que

$$Card\,(\mathcal{A}(X)) \geq Card\,(P_{F+1}(\mathcal{A}(X))) \qquad \text{y} \qquad Card\,(\mathcal{A}(Y)) \geq Card\,(P_{F+1}(\mathcal{A}(Y))).$$

Dado $x_0 \in \mathcal{A}(X)$, formamos la familia

$$\Big\{C_x = \{x_0, x\}\Big\}_{\{x\in(\mathcal{A}(X)-x_0)\}} \subset P_{F+1}(\mathcal{A}(X)).$$

Puesto que $Card\Big(\Big\{C_x\Big\}_{\{x\in(\mathcal{A}(X)-x_0)\}}\Big) = Card\,(\mathcal{A}(X))$ se tiene entonces

$$Card\,(\mathcal{A}(X)) \leq Card\,(P_{F+1}(\mathcal{A}(X))) \quad \text{y} \quad Card\,(\mathcal{A}(Y)) \leq Card\,(P_{F+1}(\mathcal{A}(Y))).$$

Concluimos así que

$$Card\,(\mathcal{A}(X)) = Card\,(\mathcal{A}(Y)).$$

Estudiamos los siguientes casos.

  - **a)** Si suponemos que X tiene todos sus puntos aislados, entonces por ser X compacto, se sigue que X será de la forma $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y por tanto, 2^X_H también será un conjunto finito de puntos aislados. Puesto que $2^X_H - X$ y $2^Y_H - Y$ son uniformemente homeomorfos, se sigue entonces que $2_H^Y - Y$ también será un conjunto finito de puntos aislados. Así pues, Y ha de ser también un conjunto finito de puntos aislados y como $Card\,(\mathcal{A}(X)) = Card\,(\mathcal{A}(Y))$, obtenemos de este modo que $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, llegando así a que X es homeomorfo a Y.

– **b)** Si $Card\,(\mathcal{A}(X)) = Card\,(\mathcal{A}(Y)) = 0$, es decir, X e Y no tienen puntos aislados se sigue de la proposición **4.4.21**, que $2_H^X - X$ y $2_H^Y - Y$ son densos en 2_H^X y en 2_H^Y respectivamente.
Puesto que $2_H^X - X$ es un espacio métrico y 2_H^Y es un espacio métrico completo, ya que 2_H^Y es métrico compacto, se tiene entonces que la aplicación

$$h : 2_H^X - X \longrightarrow 2_H^Y - Y \subset 2_H^Y,$$

definida de un subconjunto denso $2_H^X - X$ de 2_H^X en el espacio 2_H^Y, que es uniformemente continua, tiene una extensión $\widehat{h} : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$ uniformemente continua.
De igual forma, puesto que $2_H^Y - Y$ es un espacio métrico y 2_H^X es un espacio métrico completo, entonces

$$h^{-1} : 2_H^Y - Y \longrightarrow 2_H^X - X \subset 2_H^X,$$

definida de un subconjunto denso $2_H^Y - Y$ de 2_H^Y en el espacio 2_H^X, que es uniformemente continua, tiene una extensión $\widehat{h^{-1}} : 2_H^Y \longrightarrow 2_H^X$ uniformemente continua. Obtenemos así que el homeomorfismo uniforme $h : 2_H^X - X \longrightarrow 2_H^Y - Y$ se extiende a $\widehat{h} : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$ que es un homeomorfismo uniforme y por tanto, X es homeomorfo a Y.

– **c)** Supongamos ahora que $Card\,(\mathcal{A}(X)) = Card\,(\mathcal{A}(Y))$ es finito y el espacio X es un métrico compacto no finito. Sean $\mathcal{A}(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathcal{A}(Y) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, denotemos por X', Y' al conjunto de los puntos no aislados de X e Y respectivamente, es decir, $X = \mathcal{A}(X) \cup X'$ y $Y = \mathcal{A}(Y) \cup Y'$. Observar que $2_H^{X'}$ y $2_H^{Y'}$ son métricos completos y como X' e Y' no tienen puntos aislados, se sigue de la proposición **4.4.21**, que $2_H^{X'} - X'$ y $2_H^{Y'} - Y'$ son densos en $2_H^{X'}$ y en $2_H^{Y'}$ respectivamente. Además como $2_H^{X'} - X' \subset 2_H^X - X$ y $2_H^{Y'} - Y' \subset 2_H^Y - Y$, entonces la aplicación $\widehat{h}|_{2_H^{X'}-X'} : 2_H^{X'} - X' \longrightarrow 2_H^{Y'} - Y'$ es un homeomorfismo uniforme y por el caso **b)** obtenemos que $\widehat{h}$ tiene una extensión $\widetilde{h} : 2_H^{X'} \longrightarrow 2_H^{Y'}$ que es un homeomorfismo uniforme.

Dada la aplicación biyectiva $\varphi : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$ definimos un homeomorfismo $H : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$ de la siguiente manera

$$H(C) = \begin{cases} \widetilde{h}(C) & \text{si } C \in 2_H^{X'} \\ \varphi(x_i) & \text{si } x_i \in \mathcal{A}(X). \end{cases}$$

– **d)** Si X es un compacto no finito con una cantidad infinita de puntos aislados, se tiene puesto que X es métrico compacto y por tanto separable, que $Card(\mathcal{A}(X)) = Card(\mathcal{A}(Y)) = \aleph_0$.

Así pues, para cada punto $x_0 \in X - \mathcal{A}(X)$ y para cada bola $B_d(\{x_0\}, 1/n)$ elegimos un punto $x_n \in X$, con $x_n \neq x_0$ y $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$, tal que $x_n \in B_d(\{x_0\}, 1/n)$. Consideremos ahora los puntos $C_n = \{x_0, x_n\}$ de $2_H^X - X$ y formemos la sucesión $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es una sucesión de Cauchy en $2_H^X - X$ que converge al punto x_0.

Si calculamos la imagen de la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mediante el homeomorfismo h, obtenemos que $\{h(C_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $2_H^Y - Y$ que converge en 2_H^Y. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} h(\{x_0, x_n\}) = D$ donde $D \in 2_H^Y - Y$, entonces existe $F \in 2_H^X - X$ tal que $h^{-1}(D) = F$ y $\lim_{n\to\infty} h^{-1}(h(\{x_0, x_n\})) = F \neq x_0$. Obtenemos de este modo que $\{h(C_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto de $y_0 \in Y$.

Observar que $y_0 \in Y$ es independiente de la sucesión que se tome, es decir, si x_n es una sucesión en X que tiende a x_0, con $x_n \neq x_0$ y $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$, y formamos la sucesión de Cauchy $C'_n = \{x'_n, x_0\}$

que converge a x_0, entonces por ser h un homeomorfismo uniforme, se sigue que para todo $\varepsilon = 1/n$ existe un $\delta > 0$ de tal forma que si $H_d(\{x_n, x_0\}, \{x'_m, x_0\}) < \delta$ entonces $H_{d'}(h(\{x_n, x_0\}), h(\{x'_m, x_0\})) < 1/n$, de donde se deduce

$$\lim_{n\to\infty} h(\{x_0, x_n\}) = \lim_{m\to\infty} h(\{x_0, x'_m\}).$$

Además en este caso, puesto que $\lim_{n\to\infty} h(\{x_0, x_n\}) = y_0$, se tiene que para todo $\varepsilon = 1/n$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_0 \subset B_{d'}(h(\{x_0, x_n\}), \varepsilon)$ y $h(\{x_0, x_n\}) \subset B_{d'}(y_0, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$; por tanto, para todo $n \geq n_0$ y para cada $y_n \in h(\{x_0, x_n\})$, se tiene $d'(y_n, y_0) < 1/n$. Es decir, podemos construir una sucesión no constante en Y que tenga por límite y_0. Así pues, y_0 es un punto no aislado de Y.

Denotamos por X' e Y' el conjunto de los puntos no aislados de X e Y respectivamente y definimos la aplicación

$$\widehat{h} : (2^X_H - X) \cup X' \longrightarrow (2^Y_H - Y) \cup Y'$$

por

$$\widehat{h}(C) = \begin{cases} h(C) & \text{si } C \in 2^X_H - X \\ \lim_{n\to\infty} h(\{x_0, x_n\}) & \text{si } x_0 \in X' \end{cases}$$

Sea $x_0 \in \overline{\mathcal{A}(X)} - \mathcal{A}(X) \subset X'$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dadas las sucesiones $\{x_0, x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2n-1}, x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $2^X_H - X$ que convergen al punto x_0 sabemos

$$\lim_{n\to\infty} h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\}) = \lim_{n\to\infty} h(\{x_0, x_n\}) = y_0,$$

donde y_0 es un punto no aislado de Y.

Puesto que $\{x_{2n-1}, x_{2n}\}$ es un punto aislado de $2^X_H - X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\})$ es un punto aislado de $2^Y_H - Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$

y de **4.4.19**, se sigue que $h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\}) = \{y_1^n, \ldots, y_k^n\}$ donde y_i^n es un punto aislado de Y. Podemos entonces formar una sucesión de puntos aislados a partir de los $h(\{x_{2n-1}, x_{2n}\})$, que converja a y_0.

Obtenemos así que si $x_0 \in \overline{\mathcal{A}(X)} - \mathcal{A}(X) \subset X'$ entonces $\widehat{h}(x_0) \in \overline{\mathcal{A}(Y)} - \mathcal{A}(Y) \subset Y'$ y por tanto, la aplicación $\widehat{h}|_{(\overline{\mathcal{A}(X)} - \mathcal{A}(X))}$ es un homeomorfismo entre $\overline{\mathcal{A}(X)} - \mathcal{A}(X)$ y $\overline{\mathcal{A}(Y)} - \mathcal{A}(Y)$. Como $\overline{\mathcal{A}(X)}$ y $\overline{\mathcal{A}(Y)}$ son métricos compactos infinitos y $\mathcal{A}(X)$ es denso $\overline{\mathcal{A}(X)}$ y $\mathcal{A}(Y)$ es denso $\overline{\mathcal{A}(Y)}$, como enunciamos en la proposición **4.4.20** A. Pelczynski en [Pelc.1] demuestra que se puede extender la aplicación $\widehat{h}|_{\overline{\mathcal{A}(X)} - \mathcal{A}(X)}$ a un homeomorfismo $\widetilde{h}$ de $\overline{\mathcal{A}(X)}$ en $\overline{\mathcal{A}(Y)}$.

Definimos ahora la aplicación $F : 2_H^X \longrightarrow 2_H^Y$ por

$$F(C) = \begin{cases} \widehat{h}(C) & \text{si } C \in (2_H^X - X) \cup (X' - \overline{\mathcal{A}(X)}) \\ \widetilde{h}(x_0) & \text{si } x_0 \in \overline{A(X)} \end{cases}$$

que es un homeomorfismo uniforme.

$\square$

BIBLIOGRAFIA

- [Bo.1] K. Borsuk, *Concerning homotopy properties of compacta*. Fund. Math. **62** (1968) 223-254.
- [Bo.2] K. Borsuk, *Concerning the notion of the shape of compacta*. Proc. Intern. Symp. Topo. and Appli. Hercegnovi (1968) 98-104.
- [Bo.3] K. Borsuk, *A movable compacta*. Fund. Math. **66** (1969) 137-146.
- [Bo.4] K. Borsuk, *A note on theory of shape of compacta*. Fund. Math. **67** (1970) 265-278.
- [Bo.5] K. Borsuk, *On the concept of shape for metrizable space*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **18** (1970), 127-132.
- [Bo.6] K. Borsuk, *Theory of shape*. Lecture Notes Series **28**, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus (1971).
- [Bo.7] K. Borsuk, *Theory of shape*. Monografie Matematyczne 59, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1975).
- [Bo.8] K. Borsuk, *Theory of retracts.* Monografie Matematyczne, P. A. N. Warszawa (1967).
- [Bo.9] K. Borsuk, *On some metrization of the hyperspace of compacta set*. Fund. Math. **41** (1954) 168-202.
- [Bo-Dy.1] K. Borsuk and J. Dydak, *What is theory of shape?*. Bull. Austr. Math. Soc. **22** (1969) 161-198.

- [Chap.1] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert cube manifolds*. Conf. Board of the Math. Sci. Regional conf. Series in Math. **28** Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [Co-Po.1] J.M. Cordier y T. Porter, *Shape Theory, Categorical Methods of approximation*. Ellis Hordwood Series: Mathematics and its applications. Ellis Hordwood, Chichester, (1989).
- [Cu-Mo-R.1] E. Cuchillo-Ibañéz, M. A. Morón y F. R. Ruiz del Portal, *Lower semifinite topology in hyperspaces*. Topol. Proc. **17** (1992) 29-39.
- [Cu-Mo-R.2] E. Cuchillo-Ibañéz, M. A. Morón y F. R. Ruiz del Portal, *Ultrametric Spaces, valued and semivalued groups arising from the Theory of Shape*. preprint (2002).
- [Cu-Mo-R.3] E. Cuchillo-Ibañéz, M. A. Morón y F. R. Ruiz del Portal, *A note on isomorphic groups and nonhomeomorphic spaces*. Acta Math. Hungar **82** (1999) 297-300.
- [Cu-Mo-R-Sa.1] E. Cuchillo-Ibañéz, M. A. Morón, F. R. Ruiz del Portal y J. M. R. Sanjurjo , *A topology for the sets of shape morphisms*. Topol. and its Appl. **94** (1999) 51-60.
- [Cur-Scho.1] D. W. Curtis y R. M. Schori 2^X *and* $\mathcal{C}(X)$ *are homeomorphic to the hilbert cube*. Bull. Amer. Math. Society **80** (1974) 927-931.
- [D.1] James Dugundji, *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass, (1966).
- [Dy-Se.1] J. Dydak y J. Segal, *Shape Theory: An introduction*. Lecture Notes in Math. **688**, Springer, Berlin (1978).
- [E.1] R. Engelking, *General topology*. P.W.N., Warszawa (1977).
- [F.1] R. H. Fox, *On Shape*. Fund. Math. **74** (1972), 47-71.
- [Gi-Sa.1] A. Giraldo y J. M. R. Sanjurjo , *Density and finiteness. A discrete approach to shape*. Topol. and its Appl. **76** (1997) 61-77.

- [Hu.1] Sze-Tsen Hu, *Theory of retracts*. Wayne State University Press, Detroit (1965).
- [Hur-Wa.1] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension theory* . Princeton University. Press, Princeton, N. J., (1948).
- [Hy.1] D.M. Hyman, *A remark on Fox's paper Shape*. Fund. Math. **75** (1972) 205-208
- [J.1] I.M. James, *History of Topology*, North-Holland (1999).
- [Ke.1] J.L. Kelley, *General topoloy*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princenton, New Jersey, (1960).
- [Ku.1] K. Kuratowski, *Topology I*. Academic Press (1966).
- [Ku.2] K. Kuratowski, *Topology II*. Academic Press (1968).
- [Ma-O-Pi.1] J. Margalef, E. Outerelo y J.L. Pinilla, *Topología I, II*. Alhambra, Madrid 1975
- [Ma-O-Pi.2] J. Margalef, E. Outerelo y J.L. Pinilla, *Topología III*. Alhambra, Madrid 1980
- [Mar.1] S. Mardešić, *Shapes for topological spaces*. Gen. Top. Appl. **3** (1973) 265-282.
- [Mar.2] S. Mardešić, *Equivalence of two notions of shapes for metric spaces*. Bull. Acad. Pol. Sci. **20** (1973) 1137-1142.
- [Mar.3] S. Mardešić, *Absolute Neighborhood Retracts and Shape Theory*. Handbook of History of Topology. North-Holland, I. M. James (Ed.) (1999) 241-269.
- [Mar-Se.1] S. Mardešić y J. Segal, *Shapes of compacta and ANR-Systems*. Fund. Math. **72** (1971) 41-59.
- [Mar-Se.2] S. Mardešić y J. Segal, *Equivalence of the Borsuk and ANR-Systems approach to Shapes*. Fund. Math. **72** (1971), 61-68.
- [Mar-Se.3] S. Mardešić y J. Segal, *Shapes Theory*. North-Holland, Amsterdam, (1982).

- [Mar-Se.4] S. Mardešić y J. Segal, *History of shapes theory and its applications to general topology*. Handbook of the history of general topology **3** Klumer Acad. Pub., Dordrecht, (2001) 1145-1177.
- [Mc.1] R. A. McCoy, *Homeomorphism groups of Hilbert cube manifolds*. General Topology Appl. **2** (1972) 55-60.
- [Mi.1] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*. Trans. A. M. S. **71** (1951) 152-182.
- [Mor.1] K. Morita, *On Shapes of topological spaces*. Fund. Math. **86** (1975) 251-259.
- [Mo-R.1] M.A. Morón y F.R. Ruiz del Portal *Ultrametric and infinite dimensional Whitehead theorens in shape theory*. Manusc. Math. **89** (1996) 325-333.
- [Mo-R.2] M.A. Morón y F.R. Ruiz del Portal *Shape as a Cantor completion process*. Math. Z. **225** (1997) 67-86.
- [N.1] S.B. Nadler, *Hyperspaces of sets*. Marcl Dekker, New York and basel, (1978).
- [Pelc.1] A. Pelczynski, *A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X*. Bull. Pol. Acad. Sci. **13** (1965) 85-89.
- [Rub.1] M. Rubin, *on the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms*. Trans. A. M. S., **312** (1989) 487-538.
- [Sa.1] J. M. R. Sanjurjo, *A non- continuous description of Shape*. Quart. J. Math. Oxford Ser. **40** (1989) 351-359.
- [Sa.2] J. M. R. Sanjurjo, *Shape morphisms and small multivalued map*. Math. Japonica **35** No 4 (1990) 713-717.
- [Sa.3] J. M. R. Sanjurjo, *An intrinsic description of Shape*. Trans. Amer. Math. Soc. **329** No 2 (1992) 625-636.
- [Schi.1] W.H. Schikhof, *Ultrametric Calculus. An introductionto p-adic analysis*. Cambridge Univ. Press(1984).

- [Scho-We.1] R. Schori y J. E. West, 2^I *is homeomorphic to the Hilbert cube*. Bull. Amer. Math Soc. **78** (1972) 402-406.
- [V.1] J. Van Mill, *Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and introduction*, North-Holland, 1989.
- [Va.1] A. Van Rooij, *Non-Archimedean functional analysis*, Marcel Dekker Inc. New York (1978)
- [Walk.1] R. Walker, *The Stone-čech compactifications*. Springer-verlag (1974).
- [Whi.1] J. V. Whittaker, *On isomorphic groups and homeoomorphic space*, Ann. of Math., **78** (1963), 74-91.