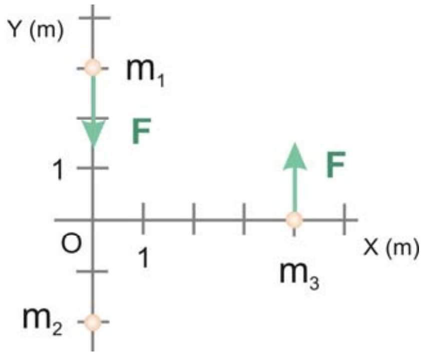
**4.-** Se tiene un sistema de partículas formado por tres masas puntuales de valores $m_1 = m$, $m_2 = 3m$ y $m_3 = 2m$. La posición de las masas en el instante inicial y las fuerzas externas a las que se ven sometidas (de módulo constante F) son las que se muestran en la figura. El centro de masas (CM) se está trasladando con una velocidad $\mathbf{V}_{CM} = 3\,\mathbf{i}$ (m/s) con respecto a O.




a) ¿Puede el CM describir una trayectoria curva?. Calcular el momento lineal del sistema con respecto a O, ¿es contante?. ¿Se conserva el momento angular del sistema con respecto a O?.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = F(-\vec{j}) + F\,\vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

- El CM no puede describir una trayectoria curva (aceleración normal no nula) porque se mueve sin aceleración.

- Momento lineal $\vec{p} = M\,\vec{v}_{CM} \qquad M = m_1 + m_2 + m_3 = 6m \qquad \vec{v}_{CM} = 3\vec{i}$

$$\vec{p} = 6m3\vec{i} = 18m\,\vec{i} \ \ (kg\,m/s) \qquad \vec{a}_{CM} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{v}_{CM} \text{ cte} \ \Rightarrow \ \vec{p} \text{ cte}$$

- ¿Momento angular $\vec{L}$ cte? $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \cancel{F(-\vec{j})\times 3\vec{j}} + F\vec{j}\times 4\vec{i} \neq 0$

$\vec{L}$ no se conseva porque los momentos de las fuerzas externas no se cancelan.

b) Si en un instante dado las velocidades de las masas $m_1$ y $m_2$ son respectivamente $\mathbf{v}_1 = -12\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_2 = 6\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$ (en m/s), calcular la energía cinética interna del sistema en ese instante.

$$\boxed{E_c = E_{c_{\text{int}}} + E_{c_{orb}}} \qquad E_{c_{orb}} = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 = 27m\,; \quad E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_1 = -12\vec{j} \qquad \vec{v}_2 = 6\vec{i} + 8\vec{j} \qquad v_1 = 12 \qquad v_2 = \sqrt{100} \qquad v_{CM} = 3$$

Calculamos $\vec{v}_3$ a partir de la definición de $\vec{v}_{CM}$ (cte)

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{6m} = \frac{\cancel{m}(-12\vec{j}) + 3\cancel{m}(6\vec{i} + 8\vec{j}) + 2\cancel{m}\vec{v}_3}{6\cancel{m}} = 3\vec{i}$$

$$-12\vec{j} + 18\vec{i} + 24\vec{j} + 2\vec{v}_3 = 18\vec{i} \quad \Rightarrow \quad 12\vec{j} + 2\vec{v}_3 = 0 \quad \Rightarrow \vec{v}_3 = -6\vec{j}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m 12^2 + \frac{1}{2} 3m100 + \frac{1}{2} 2m 6^2 = 258m$$

$$E_{c_{\text{int}}} = E_c - E_{c_{orb}} = 258m - 27m = 231m \quad (J)$$

c) Calcular el vector posición del CM en función del tiempo.

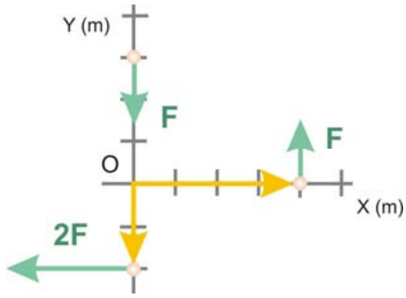
$$\vec{r}_{CM} = \int \vec{v}_{CM}\, dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_{CM}\, t \quad \text{ya que } \vec{v}_{CM} \text{ es constante } \vec{v}_{CM} = 3\vec{i}\,.$$

$\vec{r}_0$ vector posición del CM en $t = 0$

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1\vec{r}_{01} + m_2\vec{r}_{02} + m_3\vec{r}_{03}}{6m} = \frac{m\,3\vec{j} + 3m(-2\vec{j}) + 2m\,4\vec{i}}{6m} = \frac{8\vec{i} - 3\vec{j}}{6} = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + 3t\,\vec{i} = \left(\frac{4}{3} + 3t\right)\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \quad (m)$$

d) Si además actuáse sobre $m_2$ otra fuerza externa de valor **F**= - 2 F **i** calcular la aceleración del CM. Razonar si se conservan entonces el momento lineal y el momento angular del sistema.




- $\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} = \frac{-2F\vec{i}}{6m} = \frac{-F}{3m}\vec{i} \quad (m/s^2)$

- $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}$ no se conserva

- $\sum \vec{\tau}_{ext} = 4\vec{i} \times F\vec{j} + \left(-2\vec{j} \times 2F(-\vec{i})\right) = 4F\,\vec{k} - 4F\,\vec{k} = 0$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}$ sí se conserva